HAUTE ECOLE EN HAINAUT

Cellule de Géométrie

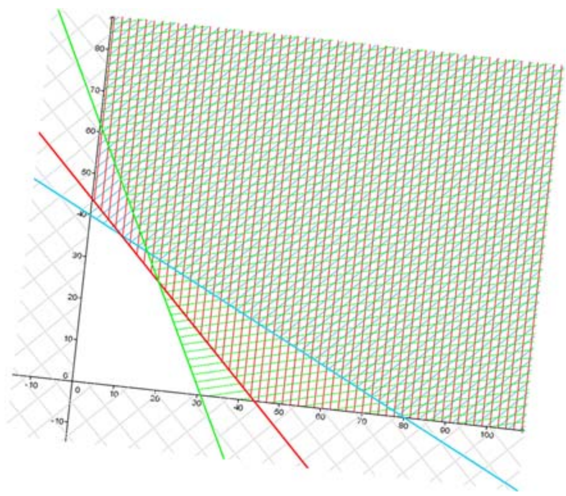
Campus pédagogique

Mathématiques élémentaires

Donner du sens aux équations et inéquations linéaires à 2 inconnues

ou

La programmation linéaire à 2 variables



H.E.H. - Campus Pédagogique
Boulevard Albert-Elisabeth, 2
7000 Mons (Belgique)

Mail: geometrie@hecfh.be
Site: www.hecfh.be/cellulegeometrie

Cellule de Géométrie

Document 26

La programmation linéaire consiste à optimiser (minimiser ou maximiser) une fonction linéaire sous des contraintes elles aussi linéaires. On cherchera ainsi, par exemple, à rendre un bénéfice, exprimé par une fonction linéaire, le plus grand possible ou à rendre un coût, exprimé aussi par une fonction linéaire, le plus petit possible sous des contraintes linéaires.

Cette méthode a été mise au point par l'Américain Georges BERNARD DANTZIG (1914 - 2005).

La petite histoire veut que cette méthode, dit algorithme du simplexe, fut mise au point par DANTZIG sur base d'un quiproquo. En effet, dans un de ses cours de doctorat à l'Université de BERKELEY, le professeur Jerzy NEYMAN a proposé deux problèmes dits ouverts en statistiques. Un problème ouvert est un problème qui, bien qu'ayant été formulé, n'a pas encore été résolu. De tels problèmes sont d'une difficulté importante et demandent des recherches pouvant s'étaler sur plusieurs années. DANTZIG était en retard et croyait qu'il s'agissait de devoirs. Sans prendre plusieurs années mais bien quelques jours, il les a résolus.

Donner du sens aux équations et inéquations linéaires à 2 inconnues ou la programmation linéaire à 2 variables

Plan

I. RAPPELS SUR LES RÉSOLUTIONS ALGÉBRIQUES ET GRAPHIQUES DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

Une usine vend des tuyaux d'acier galvanisé de diamètre 8 cm et de diamètre 11 cm. Les prix de vente sont calculés de manière à réaliser un bénéfice de 5€ sur les tuyaux de diamètre 8 cm et de 10€ sur les tuyaux de diamètre 11 cm.

Sachant que l'usine souhaite obtenir un bénéfice de 1120€, combien de tuyaux de chaque type doit-elle vendre? De plus, il est demandé de trouver une solution algébrique et une solution graphique.

Mise en forme synthétisée des données: Soit "x" le nombre de tuyaux de diamètre 8 cm et "y" le nombre de tuyaux de diamètre 11 cm.

Pour obtenir un bénéfice de 1120 €, il suffit de déterminer tous les couples de nombres naturels vérifiant l'équation du premier degré à 2 inconnues 5x + 10y = 1120, ou encore $y = \frac{-5}{10}x + \frac{1120}{10}$.

✓ Solution algébrique

Pour notre exemple, une des techniques consiste à donner des valeurs naturelles (entières et positives) à la variable "x" et à en déduire les valeurs correspondantes de "y" tout en ne retenant comme solutions admissibles que les solutions dont les deux inconnues sont entières et positives en même temps.

Les diverses solutions peuvent être présentées dans un tableau comme ci-dessous à partir de la relation $y = \frac{-5}{10}x + \frac{1120}{10}$ ou encore $y = \frac{-1}{2}x + 112$.

Ainsi:

Si x = 0 alors $y = \frac{-1}{2} \cdot 0 + 112 = 112$;

Si x = 1 alors $y = \frac{-1}{2} \cdot 1 + 112 = 111{,}5$ solution non admissible car la valeur de "y" doit être un naturel.

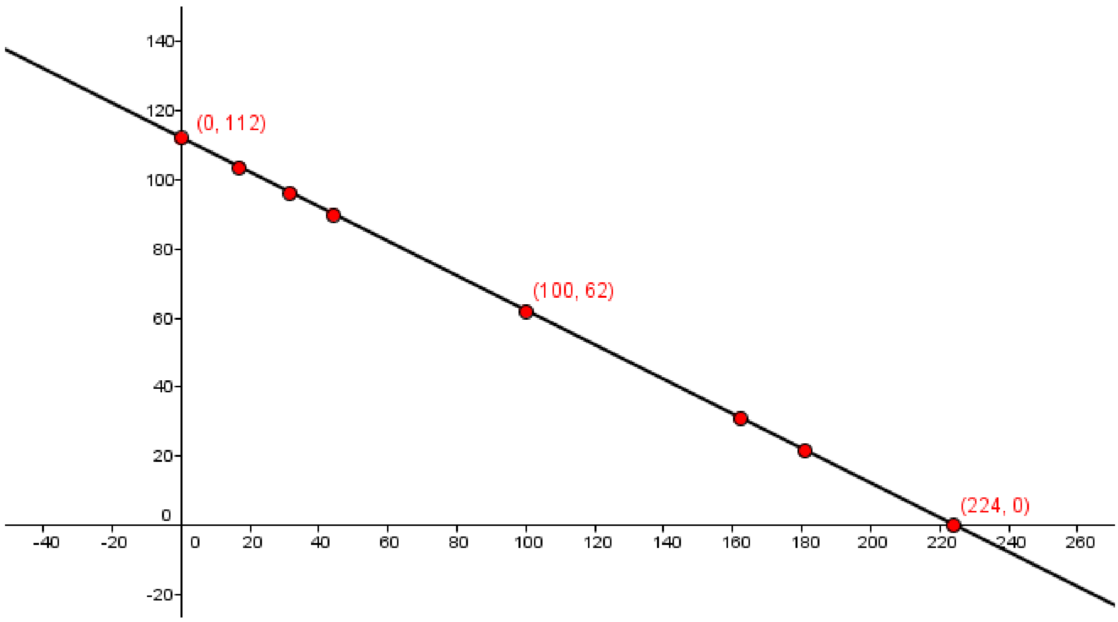
Il résulte immédiatement de l'expression $y = \frac{-1}{2}x + 112$ que le nombre de tuyaux de diamètre 8 cm, dans notre exemple, doit être un nombre pair. En effet si "x" est un nombre impair, il sera de la forme "2n+1" et "y" sera lui de la forme $y = \frac{-1}{2}(2n + 1) + 112 = -n + 111{,}5$; c'est-à-dire un nombre non naturel.

x	$y = \frac{-1}{2}x + 112$	Solutions
0	112	(0 ; 112)
2	111	(2 ; 111)
4	110	(4 ; 110)
…	…	…
100	62	(100 ; 62)
…	…	…
220	2	(220 ; 2)
222	1	(222 ; 1)
224	0	(224 ; 0)

On constate donc qu'il existe 113 solutions différentes pour obtenir un bénéfice de 1120€.

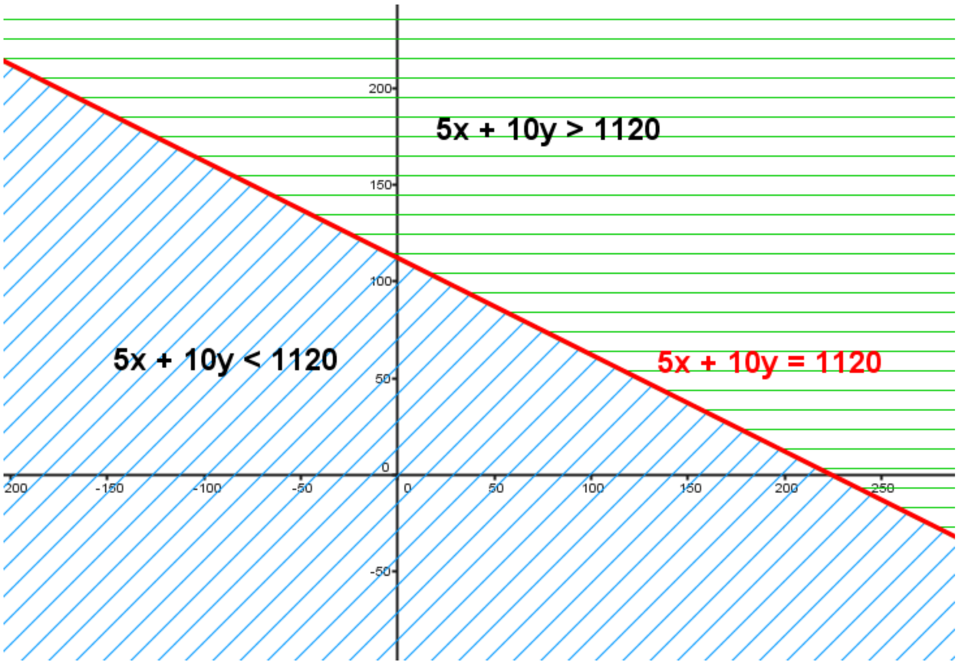
✓ Solution graphique

Les 113 solutions graphiques sont obtenues, en repérant dans le premier quadrant, les points de la droite $y = \frac{-1}{2}x + 112$ dont les 2 coordonnées sont des naturels.



Remarques:

1)



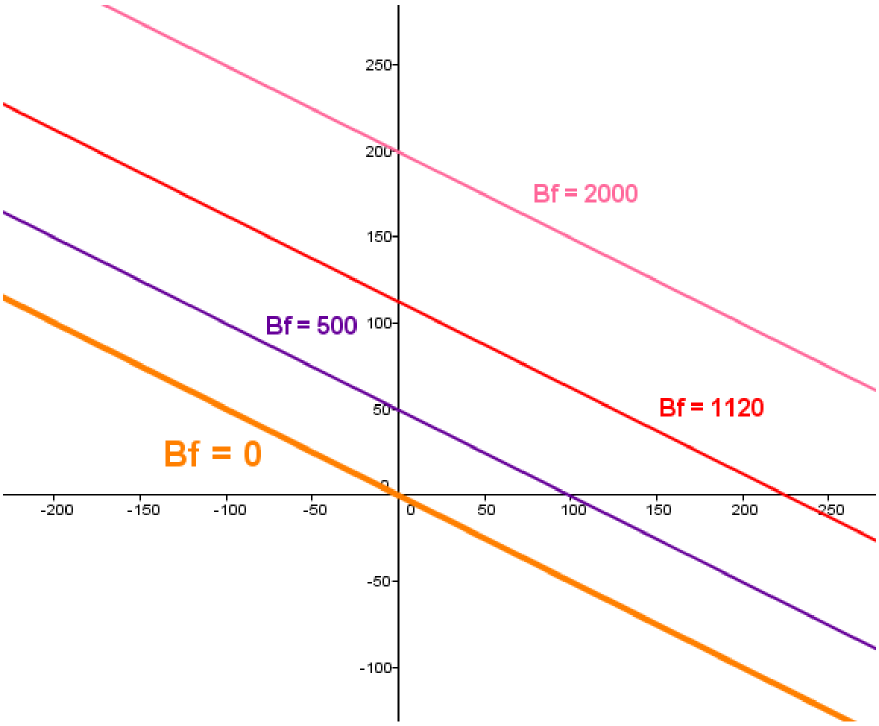
- Les coordonnées des points de la droite vérifient l'équation 5x + 10y = 1120.
- Les coordonnées des points au-dessus de la droite sont telles que 5x + 10y > 1120.
- Les coordonnées des points en dessous de la droite sont telles que 5x + 10y < 120.

Il en résulte donc que les solutions:

- de l'inéquation 5x + 10y < 1120 sont données par les coordonnées des points du demi-plan, dans notre exemple, en dessous de la droite d'équation 5x + 10y = 1120;
- de l'inéquation 5x + 10y > 1120 sont données par les coordonnées des points du demi-plan, dans notre exemple, au-dessus de la droite d'équation 5x + 10y = 1120.

2) La recherche des solutions graphiques qui procurent, dans notre exemple, un bénéfice de 500€, 2000€, 0€ se fait en traçant respectivement les droites dont les équations sont :

- 5x + 10y = 500 ⇔ $y = \frac{-1}{2}x + 50$ (Bf = 500)
- 5x + 10y = 2000 ⇔ $y = \frac{-1}{2}x + 200$ (Bf = 2000)
- 5x + 10y = 0 ⇔ $y = \frac{-1}{2}x + 0$ (Bf = 0)



Toutes ces droites ont le même coefficient angulaire, la même pente (ici $\frac{-1}{2}$); elles sont donc parallèles entre elles.

De plus, les termes indépendants de toutes ces droites sont directement proportionnels de la valeur du bénéfice souhaité. Dès lors, plus le bénéfice est important, plus le terme indépendant dans les équations est important ; il en résulte donc que plus la droite se déplace parallèlement à la droite des bénéfices nuls vers les y positifs plus le bénéfice sera élevé.

II. Résolution de problèmes à l'aide de la programmation linéaire

1. "Bière brune ou blonde?" ou maximiser le bénéfice

Un brasseur produit des tonneaux de bière blonde et de bière brune. Pour produire un tonneau de bière blonde, il utilise 3 kg de maïs, 140 gr de houblon et 20 kg de malt. Pour produire un tonneau de bière brune, il utilise 6 kg de maïs, 140 gr de houblon et 10 kg de malt.

Le brasseur dispose dans sa réserve de 240 kg de maïs, 6,16 kg de houblon et 620 kg de malt.

Sachant qu'il peut vendre un tonneau de bière blonde en faisant un bénéfice de 35€ et un tonneau de bière brune en faisant un bénéfice de 50€, combien de tonneaux de chaque sorte doit-il produire pour maximiser son bénéfice?

1.1. Mise en forme synthétisée des données

1.1.1. Réserves

 **Maïs** → 240 kg

 **Houblon** → 6,16 kg (6160 gr)

 **Malt** → 620 kg

1.1.2. Quantités nécessaires pour chaque type de tonneaux

	Maïs	**Houblon**	**Malt**
Bière blonde	3 kg	140 gr	20 kg
Bière brune	6 kg	140 gr	10 kg

1.1.3. Bénéfices par type de tonneaux

35€ pour un tonneau de bière blonde.

50€ pour un tonneau de bière brune.

1.2. Mise en équations des données

1.2.1. Choix des variables

Soit X_1 le nombre de tonneaux de bière blonde.
Soit X_2 le nombre de tonneaux de bière brune.

1.2.2. Fonction à maximiser

$f(X_1, X_2) = 35\,X_1 + 50\,X_2$

1.3. Contraintes à respecter

Dans cette partie, nous déterminerons les contraintes imposées à X_1 et à X_2 en fonction des données spécifiées au point 1. Ces contraintes sont au nombre de quatre.

1.3.1. Contrainte naturelle

Le nombre de tonneaux produits est nécessairement un nombre naturel.
$X_1\,,\,X_2 \in \mathbb{N}$

1.3.2. Contrainte liée au maïs

$3\,X_1 + 6\,X_2 \leq 240$

1.3.3. Contrainte liée au houblon

$140\,X_1 + 140\,X_2 \leq 6160$

1.3.4. Contrainte liée au malt

$20\,X_1 + 10\,X_2 \leq 620$

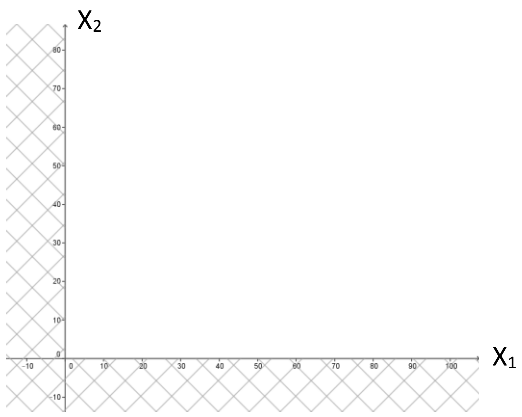
1.4. Recherche du polygone des contraintes

Dans cette partie, nous délimiterons les couples (X_1, X_2) qui vérifient toutes les contraintes ci-dessus en même temps.

1.4.1. Contrainte naturelle

$X_1\,,\,X_2 \in \mathbb{N}$

X_1 et X_2 étant des nombres naturels, nous nous limiterons donc au premier quadrant.



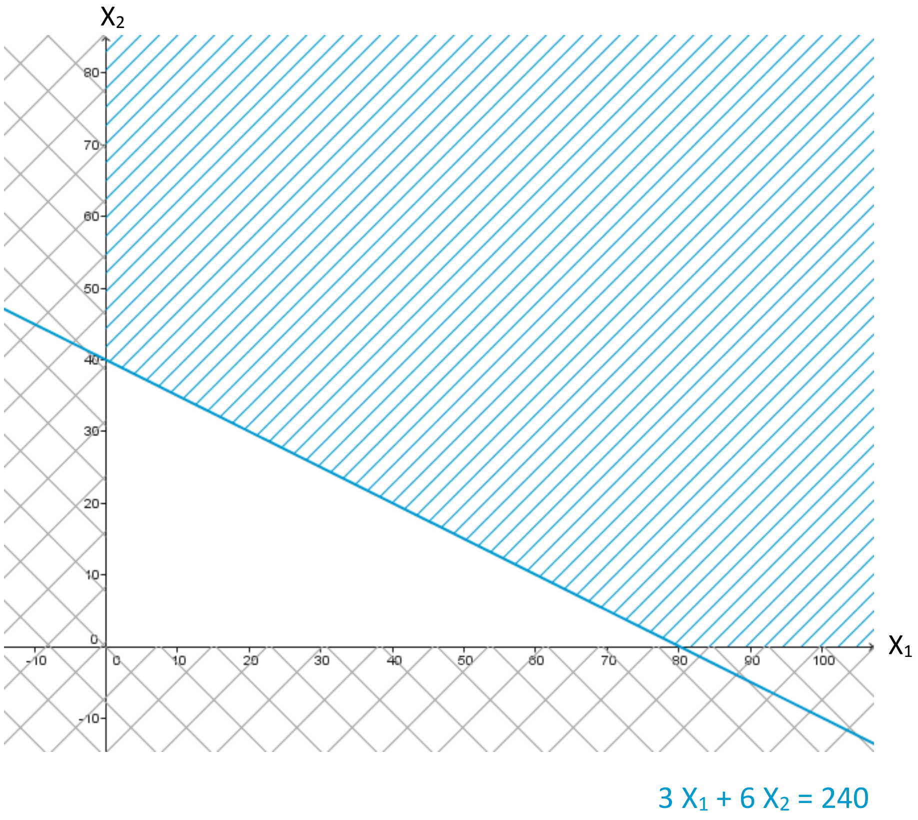
1.4.2. Contrainte maïs

$3\ X_1 + 6\ X_2 \leq 240$

Nous recherchons d'abord les points de coordonnées (X_1, X_2) qui vérifient l'équation $3\ X_1 + 6\ X_2 = 240$, c'est-à-dire les points de la droite définie par cette équation.

Les points du premier quadrant vérifiant l'équation $3\ X_1 + 6\ X_2 \leq 240$ sont en dessous de cette droite.

X_1	X_2
0	40
80	0



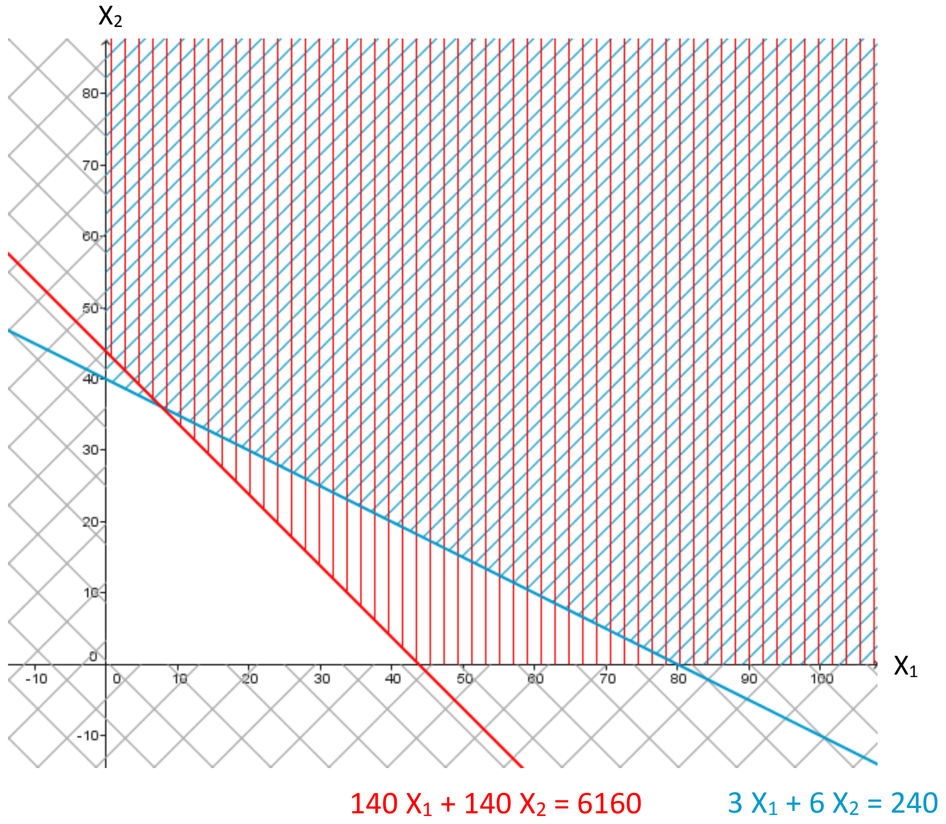
1.4.3. Contrainte houblon

$140\ X_1 + 140\ X_2 \leq 6160$

Nous recherchons d'abord les points de coordonnées (X_1, X_2) qui vérifient l'équation $140\ X_1 + 140\ X_2 = 6160$, c'est-à-dire les points de la droite définie par cette équation.

Ensuite, les points du premier quadrant vérifiant l'équation $140\ X_1 + 140\ X_2 \leq 6160$ sont en dessous de cette droite.

X_1	X_2
0	44
44	0



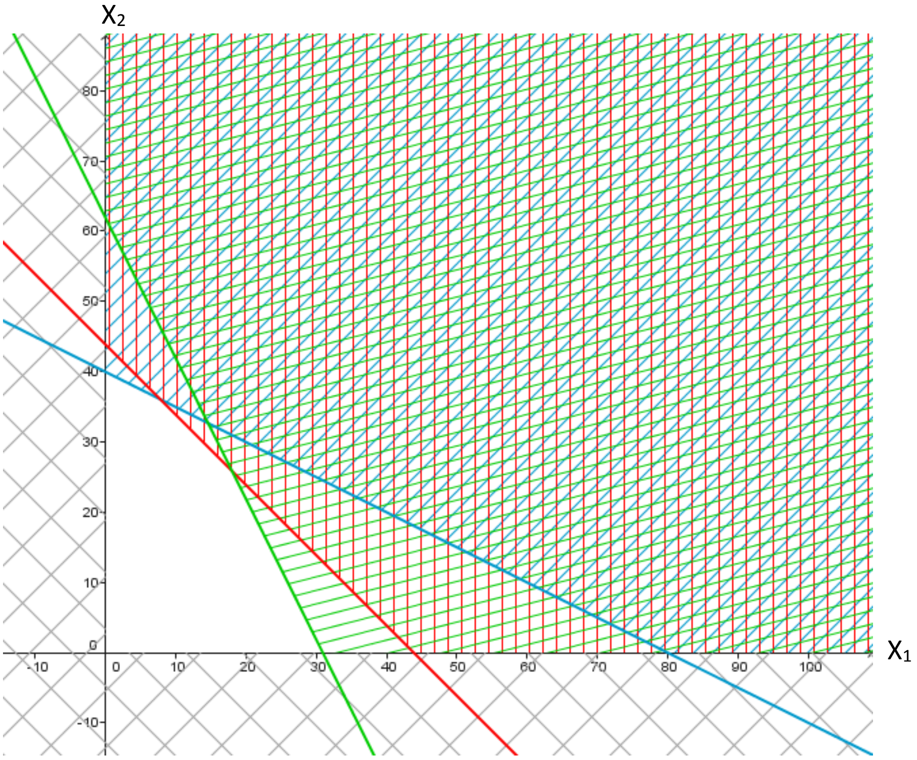
1.4.4. Contrainte malt

$20\ X_1 + 10\ X_2 \leq 620$

Nous recherchons d'abord les points de coordonnées (X_1, X_2) qui vérifient l'équation $20\ X_1 + 10\ X_2 = 620$, c'est-à-dire les points de la droite définie par cette équation.

Ensuite, les points du premier quadrant vérifiant l'équation $20\ X_1 + 10\ X_2 \leq 620$ sont en dessous de cette droite.

X_1	X_2
0	62
31	0



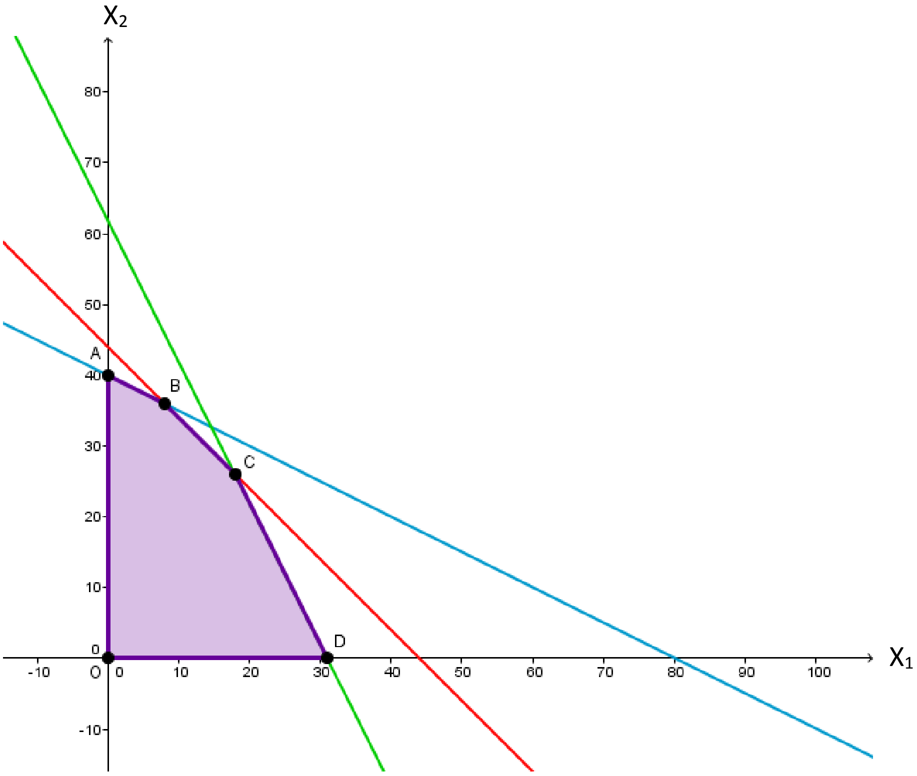
$20\ X_1 + 10\ X_2 = 620$ Malt

$140\ X_1 + 140\ X_2 = 6160$ Houblon

$3\ X_1 + 6\ X_2 = 240$ Maïs

1.4.5. En résumé

Les points dont les coordonnées vérifient en même temps les quatre contraintes ci-dessus sont représentés par le polygone ABCDO.



$20\ X_1 + 10\ X_2 = 620$ Malt

$140\ X_1 + 140\ X_2 = 6160$ Houblon

$3\ X_1 + 6\ X_2 = 240$ Maïs

1.5. Recherche du bénéfice maximum

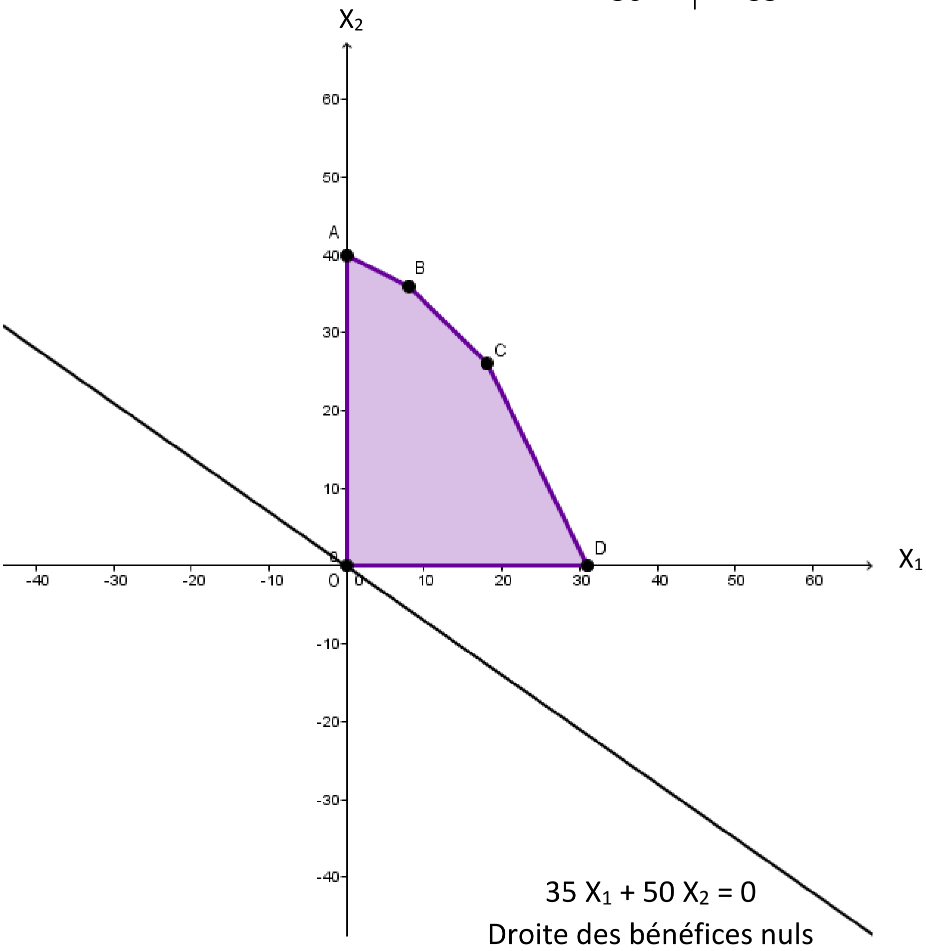
La recherche du bénéfice maximum se fera en translatant la droite des bénéfices nuls au maximum vers les y positifs tout en restant dans le polygone des contraintes.

Cette translation peut potentiellement nous donner deux résultats: soit un sommet du polygone (si la droite des bénéfices nuls n'est pas parallèle à un de ses côtés), soit un côté du polygone (si la droite des bénéfices nuls est parallèle à ce côté). Dans ce dernier cas, tous les points de ce côté sont solutions optimales du problème.

1.5.1. Droite des bénéfices nuls

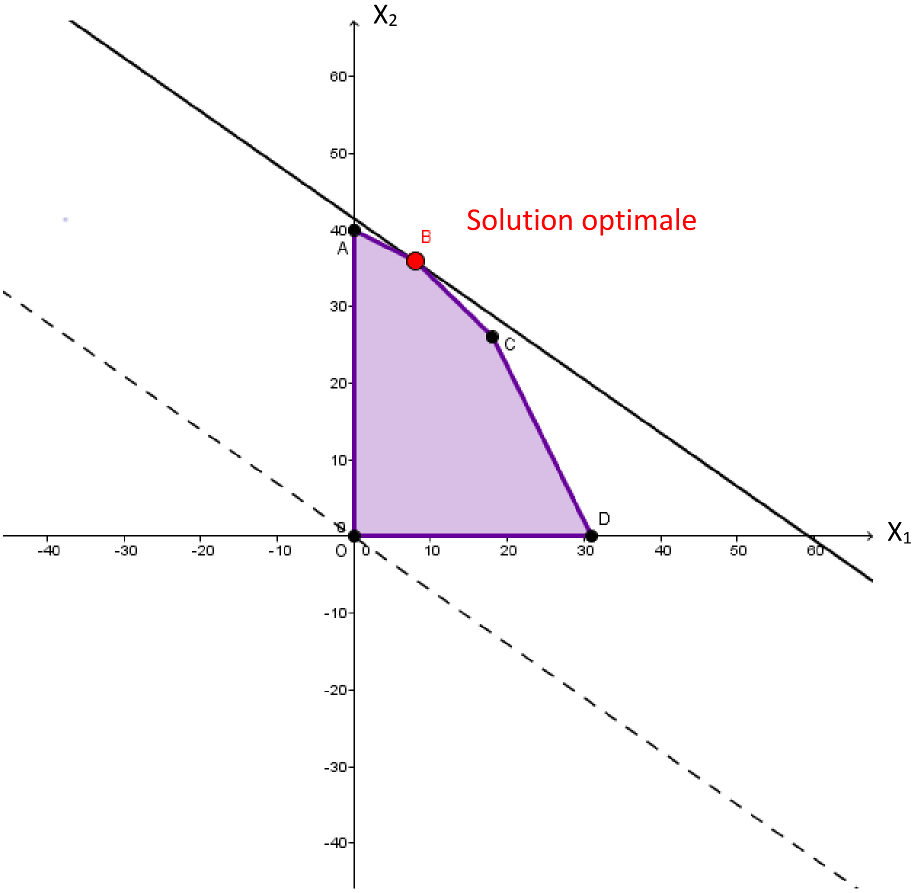
$35\ X_1 + 50\ X_2 = 0$
(Bf = 0)

X_1	X_2
0	0
50	35



1.5.2. Solution optimale et recherche de ses coordonnées

Dans le cas présent, la solution optimale est donnée par les coordonnées du point B.



Ces coordonnées sont obtenues, dans notre exemple, en recherchant l'intersection de la droite de la contrainte des maïs ($3\ X_1 + 6\ X_2 = 240$) et celle de la contrainte du houblon ($140\ X_1 + 140\ X_2 = 6160$), c'est-à-dire B (8 ; 36).

Pour obtenir le bénéfice maximum, il faut donc produire 8 tonneaux de bière blonde et 36 tonneaux de bière brune. Le bénéfice maximum s'élèvera à $(35€ \times 8) + (50€ \times 36) = 2080€$.

Remarques:

1) Pour obtenir le bénéfice maximum, la programmation linéaire nous indique qu'il suffit de produire 8 tonneaux de bière blonde et 36 tonneaux de bière brune.

On peut néanmoins se demander si le brasseur n'a pas intérêt à produire un seul type de bière pour optimiser son bénéfice.

La réponse est clairement non comme le montre l'analyse suivante:

- S'il ne produit que de la bière blonde (0 tonneau de bière brune ; $X_2 = 0$) alors $X_1 = 30$ et le bénéfice dans ce cas est: 30 x 35 € = 1050 €.
- S'il ne produit que de la bière brune (0 tonneau de bière blonde ; $X_1 = 0$) alors $X_2 = 40$ et le bénéfice dans ce cas est de 40 x 50 € = 2000 €.

Dans les deux cas, le bénéfice sera moindre que le bénéfice maximum (2080 €) obtenu par la méthode du simplexe.

2) Une autre question se pose au brasseur concernant ses stocks de matières premières: "utilise-t-il tous ses stocks de matières premières pour obtenir son bénéfice maximum?"

Son bénéfice maximum est obtenu en produisant 8 tonneaux de bière blonde et 36 tonneaux de bière brune (X_1 = 8 et X_2 = 36).

Comme il utilise 3 kg de maïs par tonneau de bière blonde et 6 kg par tonneau de bière brune, la quantité de maïs utilisée sera donc de "8 x 3 kg + 36 x 6 kg = 240 kg", c'est-à-dire toute la quantité de maïs en stock.

Comme il utilise 140 gr de houblon par tonneau de bière blonde et 140 gr par tonneau de bière brune, la quantité de houblon utilisée sera donc de "8 x 140 g + 36 x 140 g = 6160 g", c'est-à-dire toute la quantité de houblon en stock.

Comme il utilise 20 kg de malt par tonneau de bière blonde et 10 kg par tonneau de bière brune, la quantité de malt utilisée sera donc de "8 x 20 kg + 36 x 10 kg = 420 kg". Dans ce cas, il n'utilise pas toute la quantité (620kg) de malt disponible en stock. Il pourrait donc diminuer son stock de malt de 200 kg.

On peut montrer dans ce cas que la solution du problème reste identique avec un stock de 420 kg de malt.

2. "Quelle figurine en chocolat pour Pâques?" ou minimiser le coût d'un travail

À l'approche des fêtes de Pâques, deux artisans chocolatiers A et B travaillent à temps réduit dans un petit atelier et fabriquent des figurines en chocolat: la figurine de type "*Œuf en fleur*" et la figurine de type "*Girafoco*".

Figurine de type "*Œuf en fleur*"

Figurine de type "*Girafoco*"

L'artisan A coûte 3 unités monétaires par heure et B coûte 2 unités monétaires par heure à l'entreprise. Nous savons qu'une unité monétaire équivaut à 10 euros bruts.

A produit 10 figurines *"Œuf en fleur"* et 4 figurines "*Girafoco*" chaque heure (10 + 4 figurines par heure).

B produit 5 figurines *"Œuf en fleur"* et 7 figurines "*Girafoco*" chaque heure (5 + 7 figurines par heure).

L'atelier reçoit une commande pressante de 50 figurines de chaque type. Pour des raisons techniques, il n'est pas possible de consacrer plus de 11 heures (au total) pour la fabrication des diverses figurines en chocolat.

Le problème posé au responsable des artisans chocolatiers est de savoir combien d'heures A et B devront travailler pour que le coût total soit minimum.

2.1. Mise en forme synthétisée des données

2.1.1. Nombre de figurines de chaque type produites par heure par A et B

	Type "*Œuf en fleur*"	Type "*Girafoco*"
Chocolatier A	10	4
Chocolatier B	5	7

2.1.2. Coût des chocolatiers par heure

- Chocolatier A : 3 unités monétaires/heure
- Chocolatier B : 2 unités monétaires/heure

2.1.3. Commande pressante

- 50 figurines "*Œuf en fleur*" et 50 figurines "*Girafoco*"

2.1.4. Total maximum d'heures disponibles pour la commande

- 11 heures

2.2. Mise en équations des données

2.2.1. Choix des variables

Soit X_A le nombre d'heures travaillées par A.
Soit X_B le nombre d'heures travaillées par B.

2.2.2. Fonction à minimiser

Nous devons minimiser le coût total, c'est-à-dire le coût de A plus celui de B.

La fonction à minimiser est: $\mathbf{f (X_A, X_B) = 3 X_A + 2 X_B}$

En effet, A coûte 3 unités monétaires par heure, donc 3 X_A unités monétaires pour X_A heures, et B coûte 2 unités monétaires par heure, donc 2 X_B unités monétaires pour X_B heures.

2.3. Contraintes à respecter

2.3.1. Contrainte naturelle

Il n'est pas possible de travailler pendant un nombre d’heures négatif.
$X_A \geq 0$ et $X_B \geq 0$

2.3.2. Contrainte liée au nombre d'heures total

A et B ne peuvent pas travailler plus de 11 heures.
$X_A + X_B \leq 11$

2.3.3. Contrainte liée au type "*Œuf en fleur*"

A produit par heure 14 figurines, dont 10 du type *"Œuf en fleur"*.
B produit par heure 12 figurines, dont 5 du type *" Œuf en fleur".*
$10 X_A + 5 X_B \geq 50$

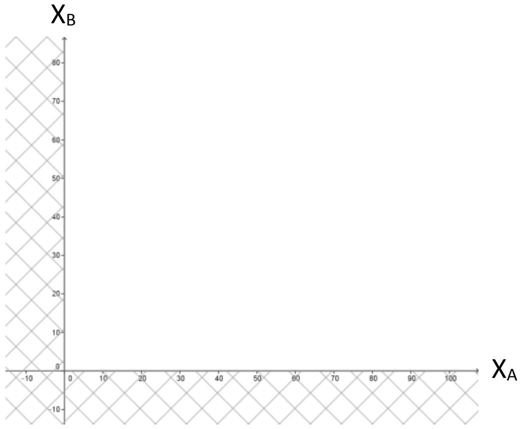
2.3.4. Contrainte liée au type "*Girafoco*"

A produit par heure 14 figurines, dont 4 du type *" Girafoco"*.
B produit par heure 12 figurines, dont 7 du type *"Girafoco"*.
$4 X_A + 7 X_B \geq 50$

2.4. Recherche du polygone des contraintes

2.4.1. Contrainte naturelle

X_A et X_B étant des nombres positifs ou nuls, nous nous limiterons donc au premier quadrant.



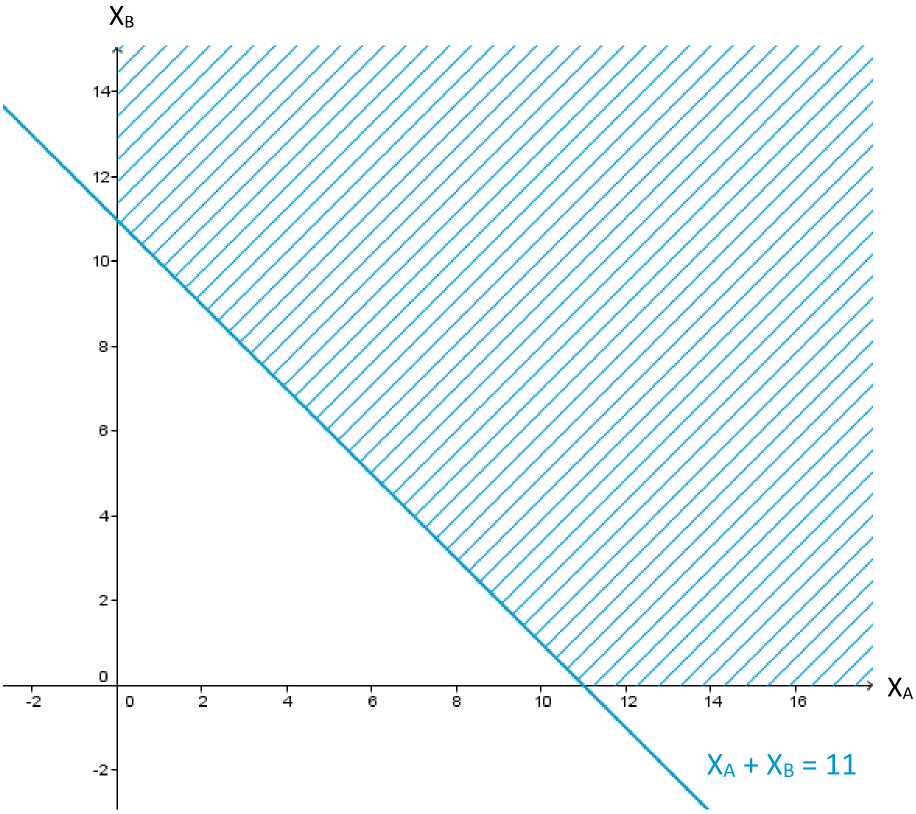
2.4.2. Contrainte liée au nombre total d'heures disponibles

$X_A + X_B \leq 11$

Nous recherchons d'abord les points de coordonnées (X_A, X_B) qui vérifient l'équation $X_A + X_B = 11$, c'est-à-dire les points de la droite définie par cette équation.

Les points du premier quadrant vérifiant l'équation $X_A + X_B \leq 11$ sont en dessous de cette droite.

X_A	X_B
0	11
11	0



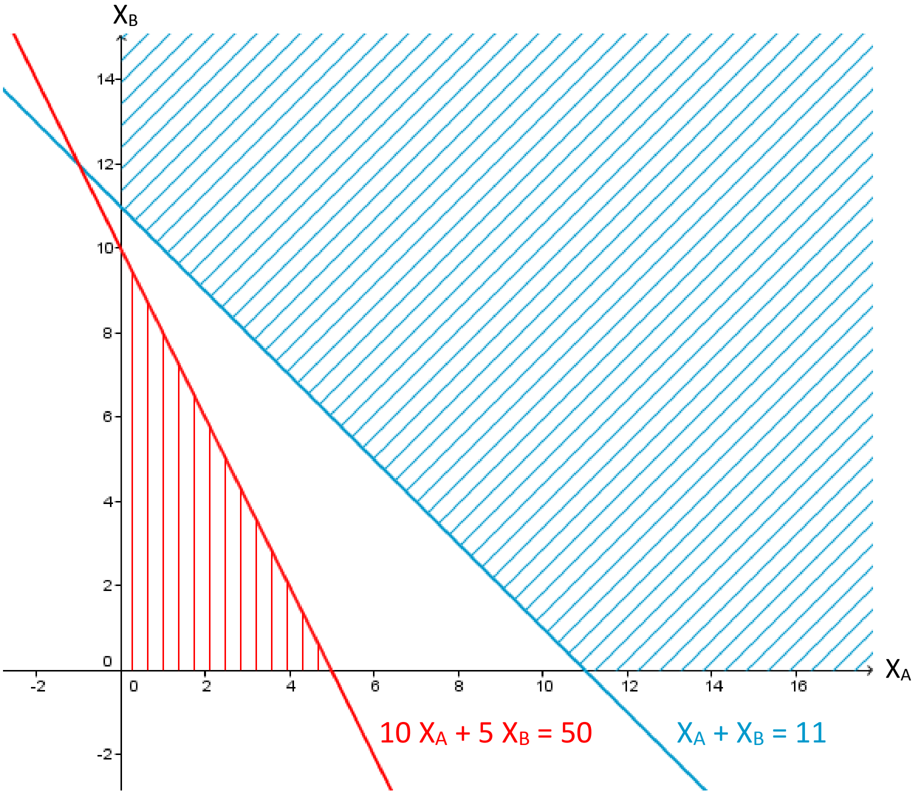
2.4.3. Contrainte "*Œuf en fleur*"

$10\ X_A + 5\ X_B \geq 50$

Nous recherchons d'abord les points de coordonnées (X_A, X_B) qui vérifient l'équation $10\ X_A + 5\ X_B = 50$, c'est-à-dire les points de la droite définie par cette équation.

Les points du premier quadrant vérifiant l'équation $10\ X_A + 5\ X_B \geq 50$ sont au-dessus de cette droite.

X_A	X_B
0	10
5	0



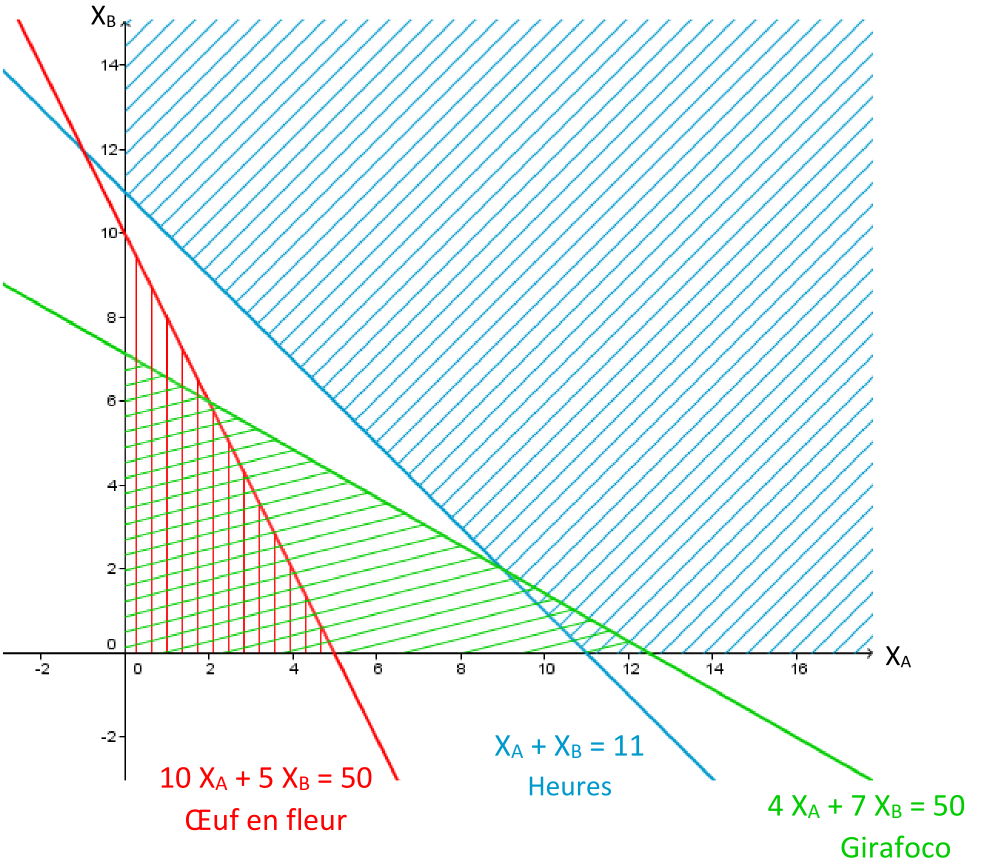
2.4.4. Contrainte "*Girafoco* "

$4\ X_A + 7\ X_B \geq 50$

Nous recherchons d'abord les points de coordonnées (X_A, X_B) qui vérifient l'équation $4\ X_A + 7\ X_B = 50$, c'est-à-dire les points de la droite définie par cette équation.

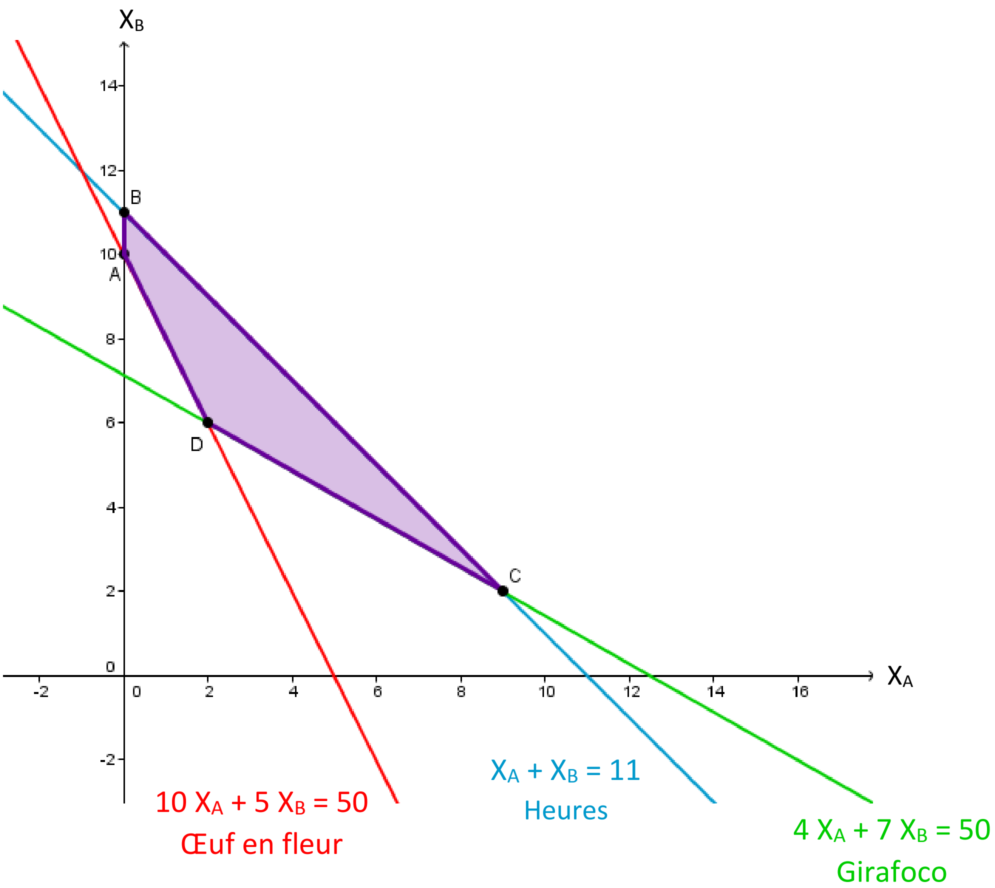
Les points du premier quadrant vérifiant l'équation $4\ X_A + 7\ X_B \geq 50$ sont au-dessus de cette droite.

X_A	X_B
2	6
9	2



2.4.5. En résumé

Les points dont les coordonnées vérifient en même temps les quatre contraintes ci-dessus sont représentés par le polygone ABCD.



2.5. Recherche du coût minimum

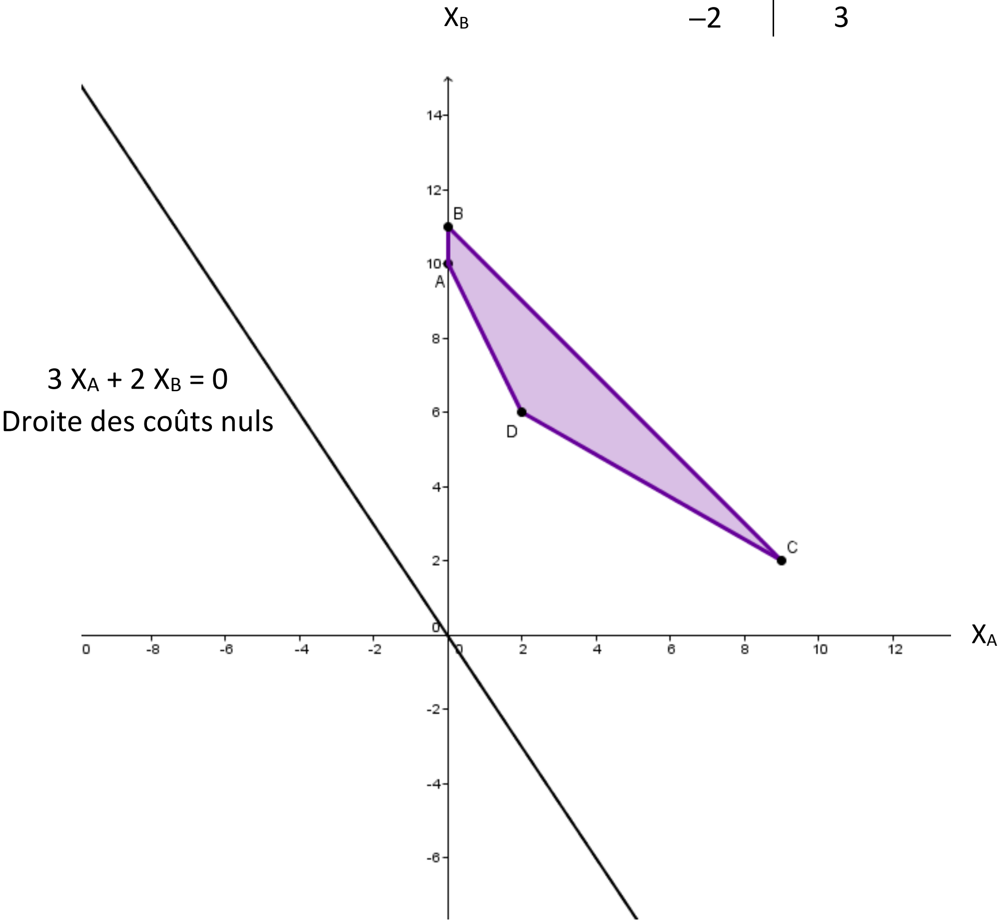
La recherche du coût minimum se fera en translatant la droite des coûts nuls au minimum vers les y positifs tout en restant dans le polygone des contraintes.

Cette translation peut potentiellement nous donner deux résultats: soit un sommet du polygone (si la droite des coûts nuls n'est pas parallèle à un de ses côtés), soit un côté du polygone (si la droite des coûts nuls est parallèle à ce côté). Dans ce dernier cas, tous les points de ce côté sont solutions optimales du problème.

2.5.1. Droite des coûts nuls

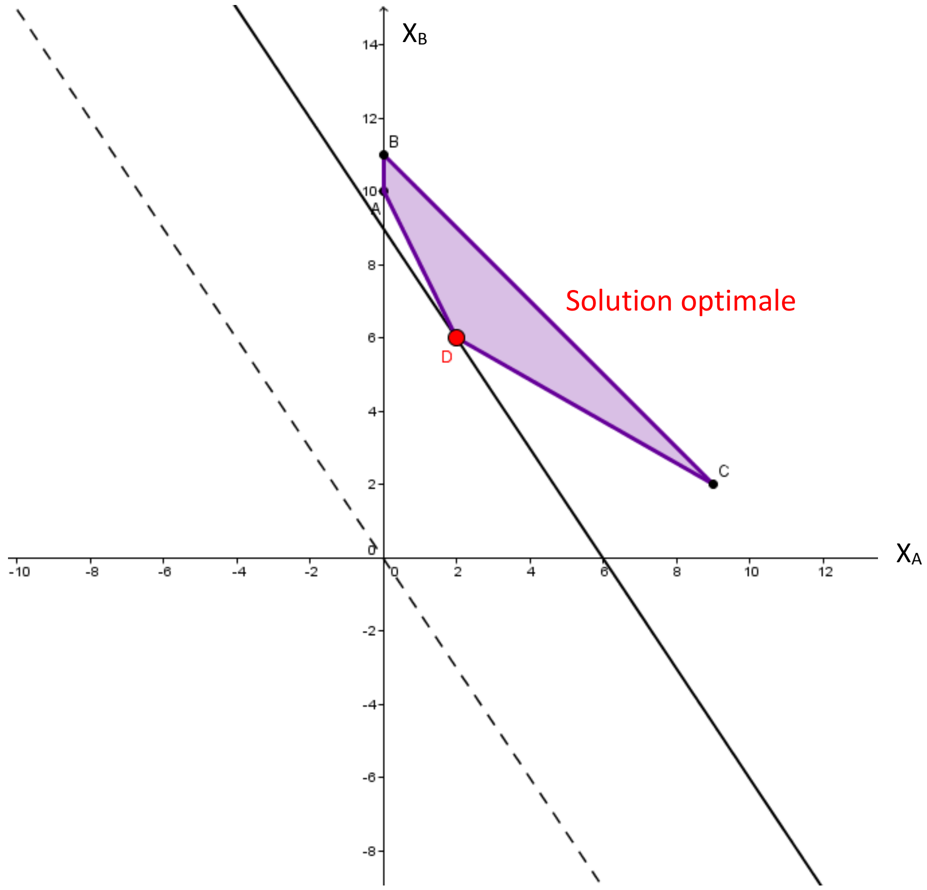
$3\ X_A + 2\ X_B = 0$
(Coût = 0)

X_A	X_B
0	0
−2	3



2.5.2. Solution optimale et recherche de ses coordonnées

Dans le cas présent, la solution optimale est donnée par les coordonnées du point D.



Ces coordonnées sont obtenues, dans notre exemple, en recherchant l'intersection de la droite de la contrainte des figurines *"Œuf en fleur"* ($10\,X_A + 5\,X_B = 50$) et celle de la contrainte des figurines *"Girafoco"* ($4\,X_A + 7\,X_B = 50$), c'est-à-dire D (2 ; 6).

Pour obtenir le coût minimum, il faut que le chocolatier A travaille pendant deux heures et le chocolatier B pendant six heures.

Le chocolatier A produit 28 figurines (14×2) et coûte 6 unités monétaires (3×2), ce qui correspond à 60 euros bruts.

Le chocolatier B produit 72 figurines (12×6) et coûte 12 unités monétaires (2×6), ce qui correspond à 120 euros bruts.

Le coût total pour l'entreprise sera donc de 180 euros bruts et le nombre total d'heures facturées à l'entreprise sera de 8 heures .

Mons, le 25 mars 2014

DEMAL M., DENUIT M., DRAMAIX J., HERMAN N., LAFOT C., MALAGUARNERA A. ET PIERARD S.