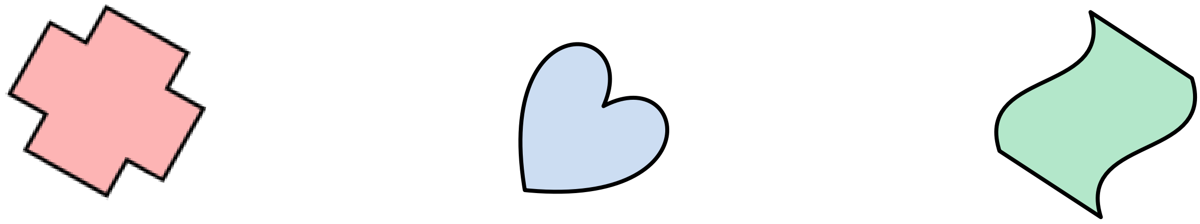
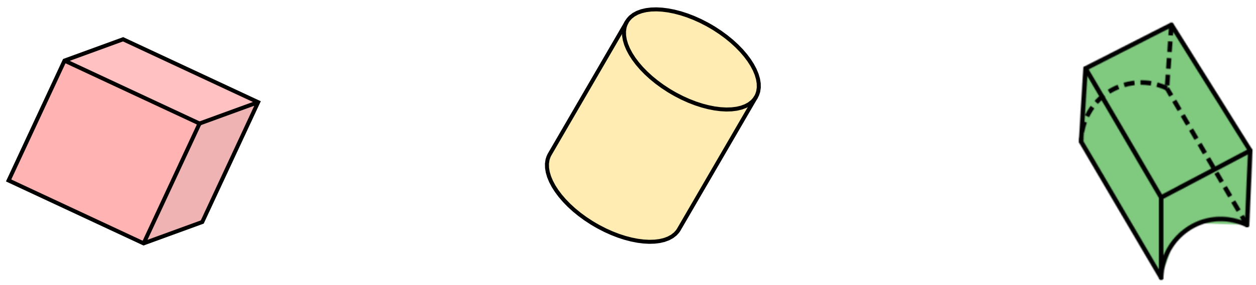
Cellule de Géométrie

UMONS
Université de Mons
Faculté des Sciences

Mathématiques élémentaires



Les figures et les solides géométriques selon les définitions actuelles des polygones et des polyèdres



L’émergence, au début du 20ième siècle, de polygones non-coplanaires et de polyèdres à faces non-planes (tels que ceux de PETRIE-COXETER et de GRÜNBAUM) a contraint les géomètres, à ne plus faire référence aux notions de surface et de solide pour définir les polygones et les polyèdres.

Nous nous proposons, dans ce document:

- de décrire quelques-uns de ces polygones non-coplanaires (gauches) et de ces polyèdres à faces non-planes;
- d’analyser des définitions des polygones et des polyèdres, qui tiennent compte de ces évolutions théoriques mais néanmoins adaptées aux élèves de l’enseignement obligatoire;

Les figures et les solides géométriques selon les définitions actuelles des polygones et des polyèdres

Plan

"Des polygones plans aux polygones non-coplanaires (gauches)"

"Des polyèdres à faces planes aux polyèdres à faces non-planes (gauches)"

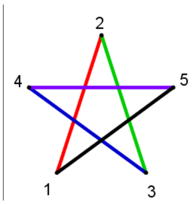
"Des polyèdres de l'espace aux polyèdres plans"

I. BREVE EVOLUTION HISTORIQUE DES POLYGONES ET DES POLYEDRES

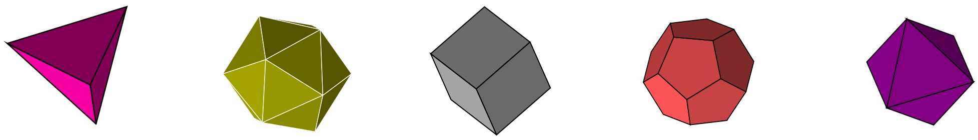
Les définitions actuelles des figures et des solides géométriques prennent essentiellement leurs origines dans l'évolution des notions de polygones réguliers et de polyèdres réguliers dans les espaces euclidiens de dimensions deux et trois ainsi que dans la notion de polytopes réguliers dans des espaces euclidiens de dimensions supérieur à trois. Ainsi,

- Les premières apparitions conscientes des polygones réguliers remontent vers 1500 ans avant J.-C. On trouve des représentations de 4-8-16-gones réguliers dans des décorations murales égyptiennes.

- Sept siècles avant J.-C. apparaît, sur un vase étrusque, un dessin de pentagramme (pentagone régulier étoilé); dessin qui sera repris, un siècle plus tard, comme symbole de reconnaissance par les Pythagoriciens.

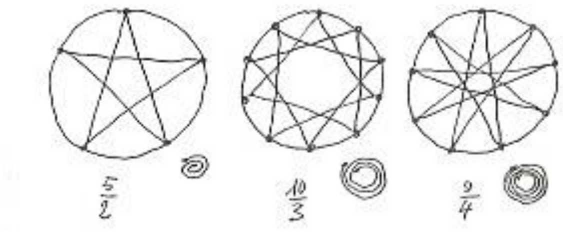


- Trois siècles avant J.-C., apparaît, dans les Eléments d'Euclide, une première étude structurée des polygones réguliers (convexes); étude qui aboutira à la détermination des fameux cinq polyèdres platoniciens (réguliers convexes).

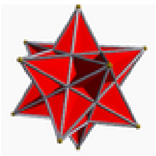


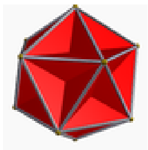
- Du 6^{ième} siècle avant J.-C. jusqu'au 13^{ième} après J.-C. les polygones sont perçus comme des figures du plan euclidiens (espace de dimensions deux) et ne concernent essentiellement que:
  - la construction de polygones réguliers à la règle et au compas;
  - des calculs d'aire;
  - des problèmes métriques tels que la recherche du rapport entre la longueur d'un côté d'un polygone régulier et les longueurs des rayons des cercles inscrit ou circonscrit au polygone régulier ou le rapport entre la longueur d'un côté d'un pentagramme et la longueur d'un côté du pentagone régulier de mêmes sommets;
  - la recherche des décimales du nombre "Pi";
  - la détermination de l'aire d'un disque par la méthode des polygones réguliers inscrits et circonscrits au disque.

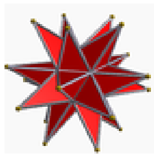
- Au 14^{ième} siècle après J.-C., Thomas BRADWARDINE réalise une première étude systématique des polygones réguliers étoilés.

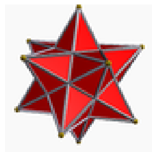


- Le premier polyèdre régulier étoilé est l'œuvre du peintre Paolo UCCELO (le grand dodécaèdre étoilé est dû à UCCELO vers 1430 dans la Cathédrale Saint-Marc à Venise). Par la suite, Johannes KÉPLER (1571-1630) découvre, vers 1619, le grand et le petit dodécaèdre étoilé. Louis POINSOT (1777-1859) redécouvre les deux polyèdres réguliers étoilés de KÉPLER ainsi que le grand icosaèdre régulier étoilé et le grand dodécaèdre régulier étoilé.


Grand icosaèdre


Grand dodécaèdre


Grand dodécaèdre étoilé


Petit dodécaèdre étoilé

Les polyèdres réguliers de KÉPLER-POINSOT sont des polyèdres non-convexes formés de polygones plans isométriques et ayant le même nombre de faces en chaque sommet.

  - Le grand icosaèdre possède des faces en forme de triangles équilatéraux – {3,5/2};
  - Le grand dodécaèdre possède des faces en forme de pentagones convexes réguliers – {5,5/2} ;
  - Le grand dodécaèdre étoilé possède des faces en forme de pentagrammes réguliers – {5/2,3};
  - Le petit dodécaèdre étoilé possède des faces isométriques en forme de pentagrammes réguliers – {5/2,5};

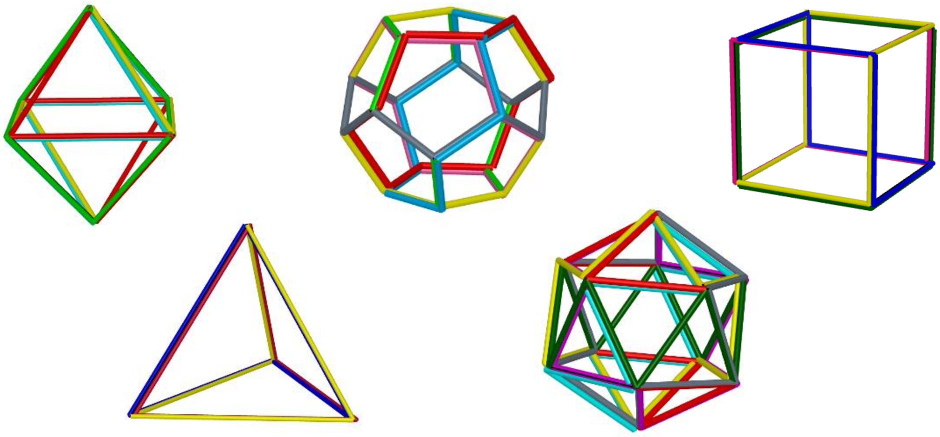
- La première personne à véritablement percevoir des polygones dans le plan et dans l'espace est Albert GIRARD (1625). Il est, selon nos lectures, le premier à proposer une définition qui concerne les polygones (toujours plans) dans les espaces euclidiens de dimensions deux et trois. Par la suite, d'autres mathématiciens proposeront des définitions analogues tels Jacques Henri MEISTER (1769), Louis POINSOT (1810), Auguste Ferdinand MÖBIUS (1865).

Remarque: S'il est possible de donner une définition d'un polygone **plan** aussi bien compatible en géométrie plane qu'en géométrie de l'espace, il n'en reste pas moins vrai que ce même polygone peut avoir des propriétés différentes en géométrie plane qu'en géométrie de l'espace.

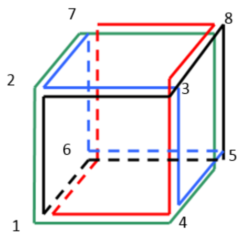
Ainsi en **géométrie plane**, un carré possède 4 symétries (automorphismes) du type déplacement et 4 symétries (automorphismes) du type retournement alors qu'en **géométrie de l'espace**, un carré possède **16** automorphismes (voir annexe 1). De plus ajoutons encore qu'en géométrie plane un carré possède une face alors qu'en géométrie de l'espace, il en possède deux.

Ces deux commentaires montrent que la géométrie plane n'est pas la géométrie dans un plan plongé dans l'espace. *(Pour plus d'informations à ce sujet, veuillez consulter le document 18 intitulé "Automorphismes de solides" à la page 77 - Le carré plongé dans E^3).*

- Il semble que jusqu'au début du 20ième siècle, les polygones sont plans et font référence au niveau des définitions à la notion de surface plane. Il faut attendre 1925 pour voir une évolution importante dans l'étude des polygones avec la découverte de polygones gauches réguliers par John Flinders Petrie (1907-1972) et Harold Scott Mac Donald Coxeter (1907-2003) sur les cinq polyèdres platoniciens: ce sont les fameux "petrigones". Petrigones qui engendreront, par la suite, les cinq premiers polyèdres réguliers à faces gauches (non planes) de l'histoire.



À titre d'exemple, le cube de Petrie est composé d'hexagones gauches réguliers:



Ce sont les 4 hexagones gauches (non- **coplanaires)** réguliers suivants:

L'hexagone rouge (7 - 8 - 3 - 4 - 1 - 6)
L'hexagone bleu (7 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6)
L'hexagone vert (7 - 8 - 5 - 4 - 1 - 2)
L'hexagone noir (2 - 3 - 8 - 5 - 6 - 1)

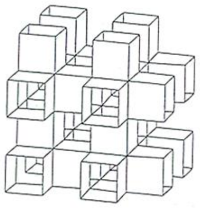
Si ce type de polyèdres peut paraître surprenant, il vérifie néanmoins les caractéristiques habituelles des polyèdres usuels, à savoir:

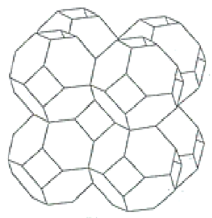
- *"Toute arête est un côté commun à deux faces."*
  L'arête "3 - 8" est à l'intersection de l'hexagone noir et de l'hexagone rouge.
- *"En chaque sommet, il arrive au moins trois faces."*
  Au sommet 3, il arrive les hexagones bleu, noir et rouge.
- *"Toutes les faces sont des polygones."*
- *"Le polyèdre est en une seule partie."*
- *"Aucun sommet n'est commun à plusieurs angles-solides."*
- *"Les extrémités des arêtes sont les sommets du polyèdre."*

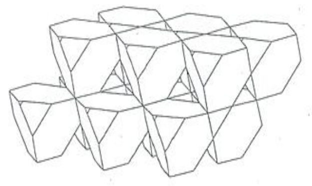
Remarques:

- En 1968, Shoen montre que ces "pétrigones" déterminés sur les polyèdres platoniciens ont une structure de polyèdres réguliers. (Toutes les faces sont des polygones gauches réguliers et en chaque sommet il arrive le même nombre de faces.)
- Les polyèdres sont aussi réguliers au sens de la transitivité des faces et des sommets.

- Ajoutons encore qu'en 1926, Petrie et Coxeter mettent en évidence trois nouveaux polyèdres infinis que l'on appelle "éponges de Petrie-Coxeter" et qui sont des polyèdres infinis non plans constitués respectivement en chaque sommet:
  - soit de 6 carrés;
  - soit de 4 hexagones plans réguliers;
  - soit de 6 hexagones plans réguliers.


6 carrés
en chaque sommet

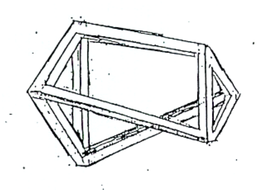

4 hexagones plans réguliers
en chaque sommet

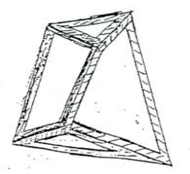

6 hexagones plans réguliers
en chaque sommet

- Les découvertes de Petrie-Coxeter sont les prémices d'une surprenante et merveilleuse aventure dans le monde des polyèdres de l'espace (E^3) et du plan (E^2). Cette aventure aboutira à la fin des années 1970 au classement des polyèdres réguliers de Branko Grünbaum et à l'apparition de nouvelles définitions de la régularité faisant appel à la notion de symétries au sens large (automorphismes) ainsi qu'à la notion de chambres ou de drapeaux maximaux. Avec ces nouvelles définitions de la régularité, B. Grünbaum montrera qu'il existe 47 polyèdres réguliers.

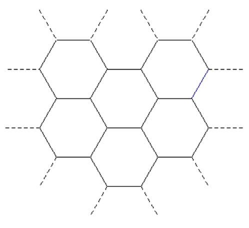
- Pour terminer, précisons que jusqu'à la première moitié du 20$^{\text{ième}}$ siècle:
  - Les polygones sont des figures planes délimitées par des segments de droites avec des contraintes tels que la figure doit être fermée, en une seule partie (connexe) et telle qu'en un sommet arrivent exactement 2 segments de droite.
  - les polyèdres sont essentiellement des solides finis de l'espace déterminés par des plans. Cette vision entraîne donc assez naturellement une définition du type: "*solides dont toutes les faces sont planes*". Cette vision des polyèdres est stable comme dit ci-avant jusqu'à la première moitié du 20$^{\text{ième}}$ siècle, à deux exceptions près: la première est due à Léonard de Vinci (1452-1519) et la deuxième à Kepler (1571-1630).

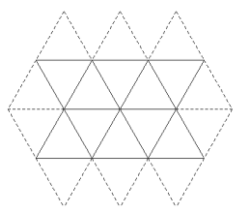
Léonard de Vinci dessine (sans le moindre commentaire) des polyèdres où il apparaît des faces non-planes (gauches).

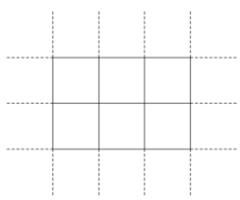




Képler (1619) accepte les trois pavages réguliers comme étant des polyèdres *plans infinis* constitués de polygones *plans finis*.







II. DEFINITIONS "ACTUELLES" DES POLYGONES ET DES POLYEDRES EUCLIDIENS

Cette trop brève description historique des polygones et polyèdres montre que des "nouvelles" définitions pour les polygones et les polyèdres s'imposent afin d'englober aussi bien l'idée qu'il existe des polygones plans et des polygones non-coplanaires finis ou infinis ainsi que des polyèdres de l'espace à faces planes et à faces non-coplanaires ainsi que des polyèdres plans infinis.

Pour englober tous ces types de polygones et polyèdres, les "nouvelles" définitions ne peuvent donc plus faire explicitement référence à la notion de surface ni de solide. Celles-ci s'appuient essentiellement sur les constituants premiers des polygones et des polyèdres; c'est-à-dire sur les notions de sommets et de côtés pour les polygones; de sommets, d'arêtes et de faces pour les polyèdres ainsi que sur les relations reliant ces premiers éléments.

1. Polygones euclidiens

Actuellement et pour l'enseignement obligatoire, les polygones euclidiens peuvent se définir de la manière suivante:

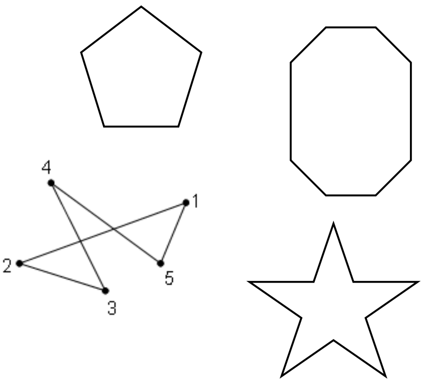
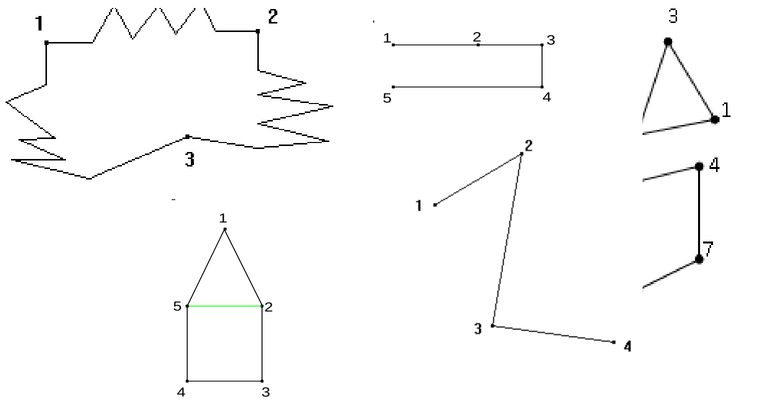
1.1. Définition des polygones euclidiens

Par définition, les polygones euclidiens sont constitués de sommets et de côtés tels que:

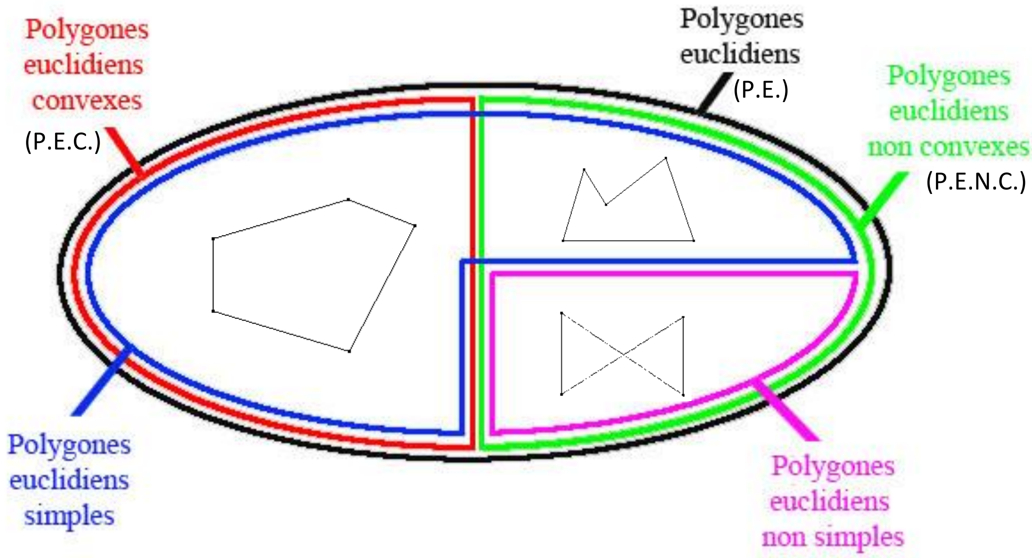
- **les sommets forment un ensemble fini ordonné de points d'un même plan;**
- **les côtés sont des segments de droites dont les extrémités sont des sommets;**
- **deux côtés consécutifs ne sont jamais alignés (colinéaires);**
- **tout sommet est l'extrémité d'exactement deux côtés;**
- **les sommets et les côtés forment une figure en une seule partie (connexe).**

Remarque: Euclidien au sens où il s'agit de polygones dont:

- Tous les sommets appartiennent à un même plan (polygone plan).
- Les sommets sont en nombre fini.
- Deux côtés consécutifs sont non-alignés.

Exemples de polygones euclidiens	Figures constituées de segments de droites qui ne sont pas des polygones euclidiens
	

1.2. Structure des polygones euclidiens

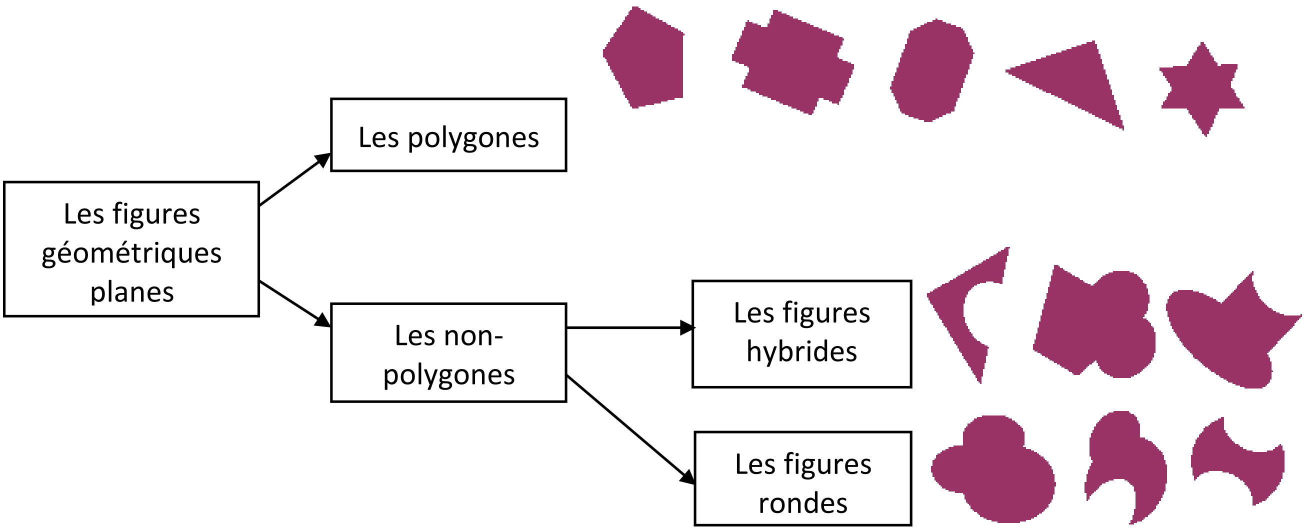


1.3. Figures géométriques euclidiennes

1.3.1. Structure des figures géométriques euclidiennes

Les polygones euclidiens ne sont qu'une partie d'une structure plus générale que sont les figures géométriques euclidiennes. Celles-ci se décomposent en polygones et en non-polygones. Ces derniers se décomposent à leur tour en figures rondes et en figures hybrides.

Le diagramme en arbre ci-joint illustre cette décomposition:

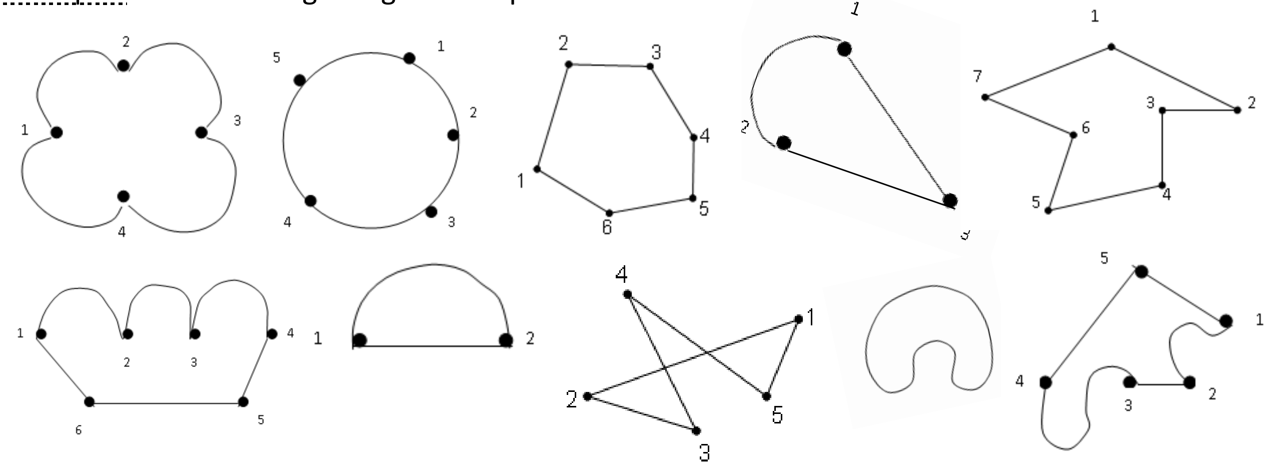


1.3.2. Définition des figures géométriques euclidiennes

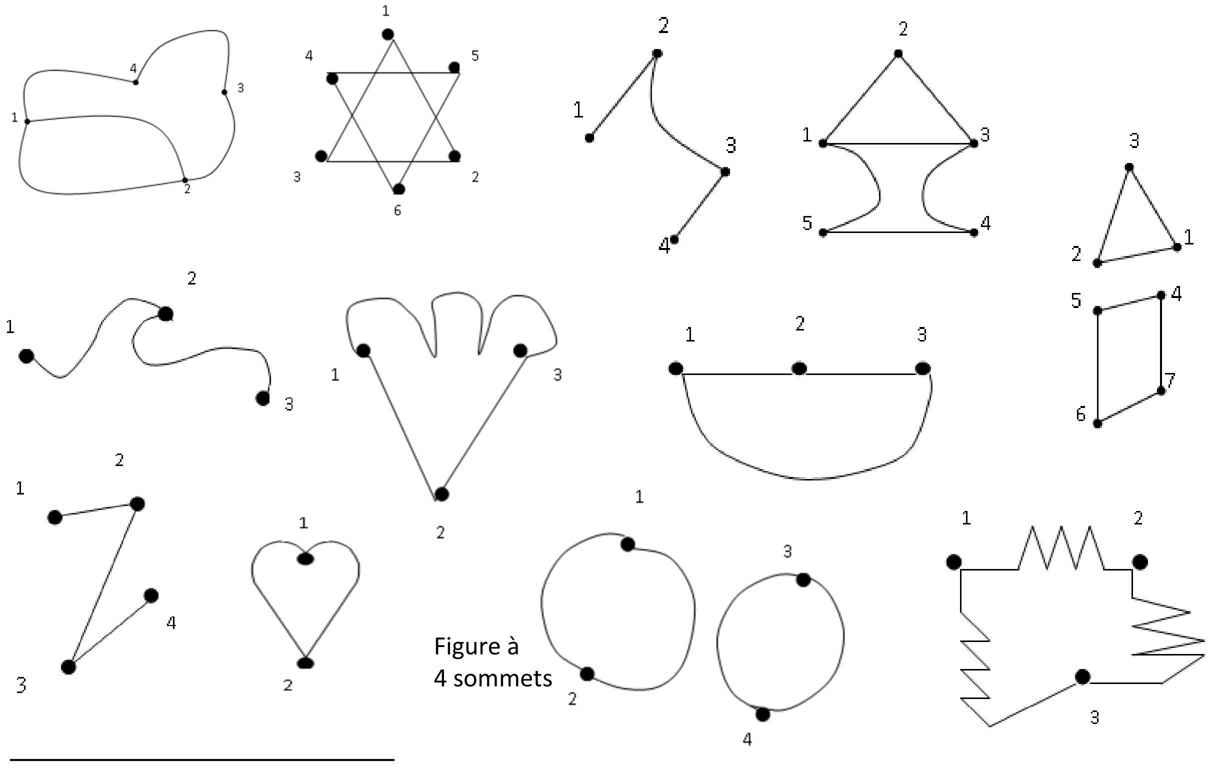
Par définition, les figures géométriques euclidiennes sont constituées de sommets et de côtés tels que:

- **les sommets forment un ensemble fini de points d'un même plan;**
- **les côtés sont soit droits, soit courbes;**
- **les côtés sont tous coplanaires;**
- **les côtés droits sont des segments de droites dont les extrémités sont des sommets;**
- **les côtés courbes sont tantôt des courbes fermées sans sommet, tantôt des arcs de courbes dont les extrémités sont des sommets;**
- **les côtés sont sans pointe sauf éventuellement en leurs sommets[1];**
- **tout sommet est l'extrémité d'exactement deux côtés;**
- **deux côtés droits consécutifs ne sont jamais alignés;**
- **les sommets et les côtés forment une figure en une seule partie (connexe).**

Exemples: dessins de figures géométriques euclidiennes



Contre-exemples: dessins de figures qui ne sont pas des figures géométriques euclidiennes



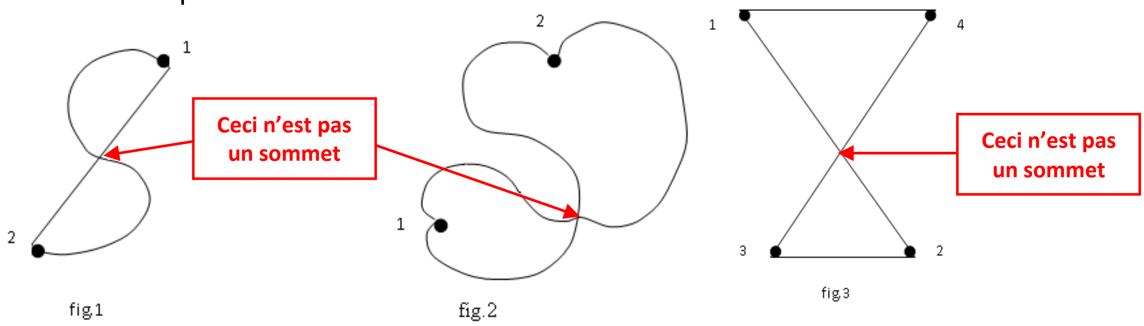
[1] Les côtés courbes sont tels qu'en chacun de leurs points, il existe une tangente qui varie continûment sauf éventuellement en leurs sommets.

Il découle immédiatement de la définition adoptée, que dans un plan, il existe 3 types de figures géométriques euclidiennes:

- Les figures géométriques euclidiennes dont tous les côtés sont des segments de droites: **les polygones.**
- Les figures géométriques euclidiennes dont tous les côtés sont des côtés "courbes": **les figures rondes.**
- Les figures géométriques euclidiennes qui possèdent au moins un côté droit et au moins un côté courbe: les **figures hybrides.**

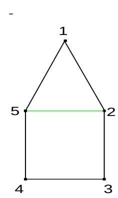
Remarques:

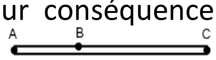
- La condition *"tout sommet est l'extrémité d'exactement deux côtés"* n'a pas le même sens que *"l'intersection de deux côtés est un sommet"*. À titre d'exemples, les figures 1 et 2 ont exactement 2 sommets. La figure 3 possède exactement 4 sommets. Ces trois figures sont dites non-simples.

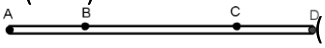


- Une définition actuelle et générale qui recouvre les différents types de polygones citée ci-avant a été proposée par Francis BUEKENHOUT. "*Dans l'espace euclidien (ou le plan, ou …) un polygone est un ensemble* **S** *de points appelés sommets et un ensemble a de segments fermés appelés arêtes tels que:*
  - *tout 's' appartenant à* **S** *est l'extrémité de deux membres de* **A***;*
  - *tout 'a' appartenant à* **A** *admet pour extrémités deux membres de* **S***;*
  - *deux éléments de (***S** *U* **A***) peuvent être reliés par une succession de sommets-côtés.*"

- La contrainte "*tout sommet est à l'intersection de deux côtes*" dans la définition des polygones s'explique aussi pour, au moins, les deux raisons suivantes:
  - Elle permet de ne pas considérer le squelette, formé uniquement de segments de droites, d'un polyèdre comme étant un polygone gauche de l'espace. Nous verrons par la suite que dans la définition des polyèdres, il arrive en chaque sommet au minimum 3 arêtes (segments de droites). Cette différence permet donc de ne pas confondre un polygone de l'espace avec un polyèdre.
  - La propriété classique "*le nombre de sommets est égal au nombre de côtés et au nombre d'angles*" (nécessaire dans de nombreux théorèmes) liée aux polygones serait mise en défaut dans des figures planes convexes et connexes constituées uniquement de segments de droites. À titre d'exemple le dessin de la "maison" ci-contre est convexe, d'un seul tenant (connexe), formé de 6 segments de droites, de 5 sommets et de 7 angles.



- La contrainte "*2 côtés droits consécutifs sont non alignés*" dans la définition des polygones euclidiens à pour conséquence d'éliminer, par exemple, les triangles dégénérés T(ABC) 

, les parallélogrammes dégénérés Q(ABCD) 

([AB] // [CD] et ([AD] // [BC]). Ces deux types de figures sont à éliminer car alors, la propriété "*les médiatrices de tout triangle sont concourantes*" ne serait plus vérifiée. Ainsi que les propriétés "*les côtés opposés et les angles opposés sont isométriques*" ne seraient non plus vérifiées dans les parallélogrammes.

2. Polyèdres euclidiens

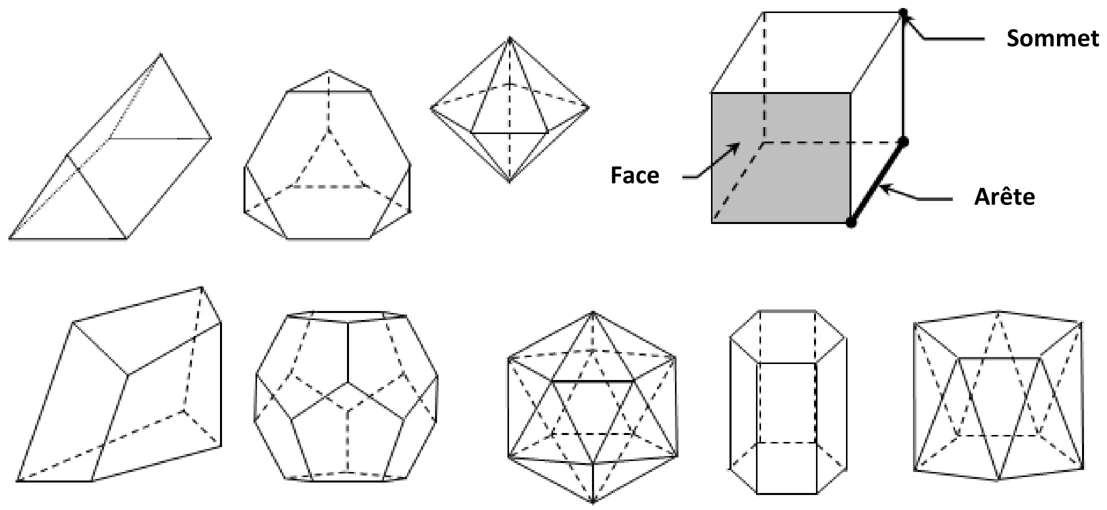
2.1. Définition des polyèdres euclidiens

Semblablement aux polygones, et toujours pour l'enseignement obligatoire, une "nouvelle" définition pour les polyèdres s'impose aussi. Actuellement, les polyèdres euclidiens peuvent se définir de la manière suivante:

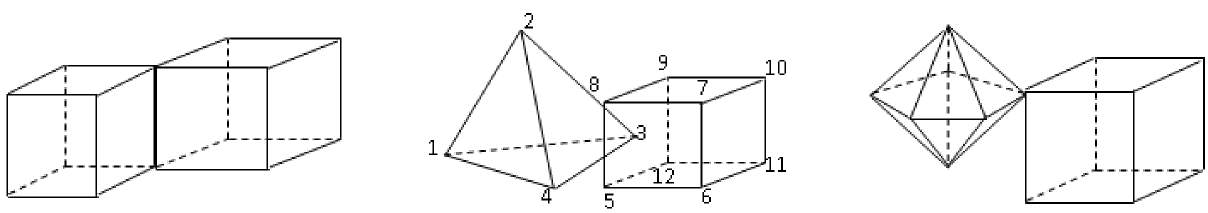
Un polyèdre euclidien est formé de sommets, d'arêtes et de faces, tel que:

- **toutes les faces sont des polygones euclidiens;**
- **toute arête est à l'intersection de deux faces;**
- **les extrémités des arêtes sont les sommets du polyèdre;**
- **les faces, les sommets et les arêtes forment un ensemble en une seule partie (connexe);**
- **deux faces contiguës ne sont jamais coplanaires;**
- **aucun sommet n'est commun à plusieurs angles-polyèdres.**

Exemples de polyèdres euclidiens:



Exemples de solides formés de faces polygonales qui ne sont pas des polyèdres:

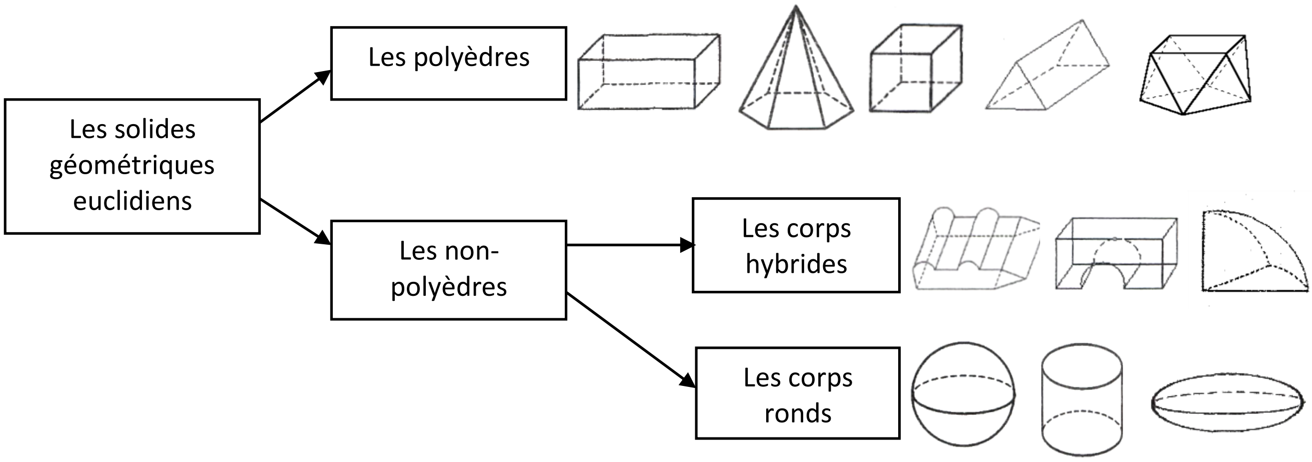


2.2. Solides géométriques euclidiens

2.2.1. Structure des solides géométriques euclidiens

Ici aussi et semblablement aux polygones, les polyèdres euclidiens ne sont qu'une partie d'une structure plus générale que sont les solides géométriques euclidiens. Ceux-ci se décomposent en polyèdres et en non-polyèdres. Ces derniers se décomposent également à leur tour en corps ronds et en corps hybrides.

Le diagramme en arbre ci-joint illustre cette décomposition.



2.2.2. Définition des solides euclidiens

Un solide euclidien est constitué de sommets, d'arêtes et de faces, tel que:

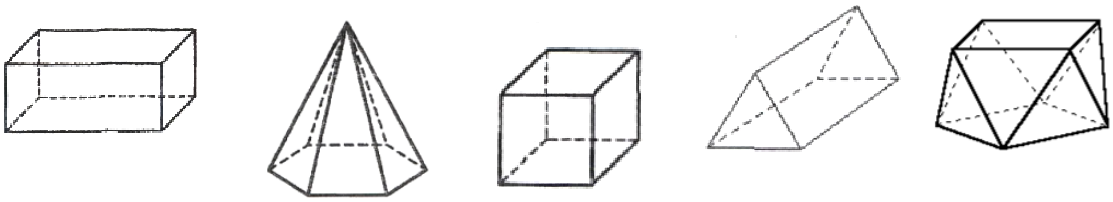
- **les sommets forment un ensemble fini de points de l'espace;**
- **les arêtes sont soit droites, soit courbes au sens des côtés des figures géométriques euclidiennes[2];**
- **toute arête est à l'intersection de deux faces;**
- **les faces sont: soit des surfaces courbes continues fermées ou des portions de surfaces courbes continues; soit des figures géométriques au sens euclidien (figures planes rondes, polygones plans, figures planes hybrides);**
- **les faces courbes continues sont sans "aspérité" (sans pointe) sauf éventuellement aux frontières (bords) des faces ou en un sommet;**
- **les extrémités des arêtes sont des sommets;**
- **dans les non-polyèdres, il peut exister des sommets qui n'appartiennent à aucune arête;**
- **deux faces planes contiguës ne sont jamais coplanaires;**
- **les faces, les arêtes et les sommets forment une seule partie (connexe);**
- **aucun sommet n'est commun à plusieurs angles-solides.**

Il découle de cette définition qu'il existe trois types de solides géométriques euclidiens:

- les solides géométriques euclidiens dont toutes les faces sont des polygones: **les polyèdres.**
- les solides géométriques euclidiens dont toutes les faces sont des faces courbes (non-planes) et/ou des faces planes rondes: **les corps ronds.**
- les solides géométriques euclidiens dont au moins une face plane est une figure hybride: **les corps hybrides.**

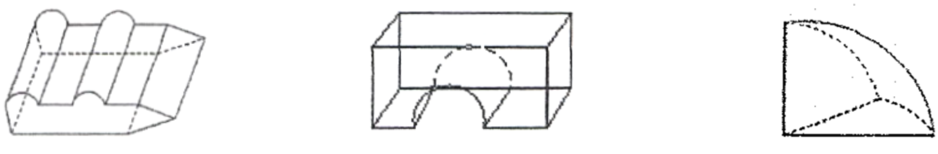
2.2.3. Définitions des différents types de solides géométriques euclidiens

Un **polyèdre** est un "solide géométrique dont toutes les faces sont des polygones".

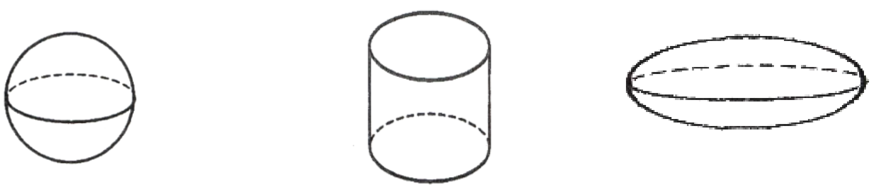


Un **non-polyèdre** est un "*solide géométrique pour lequel il existe au moins une face non-polygonale*".

Un **corps hybride** est un "*solide géométrique pour lequel il existe au moins une face plane hybride*".

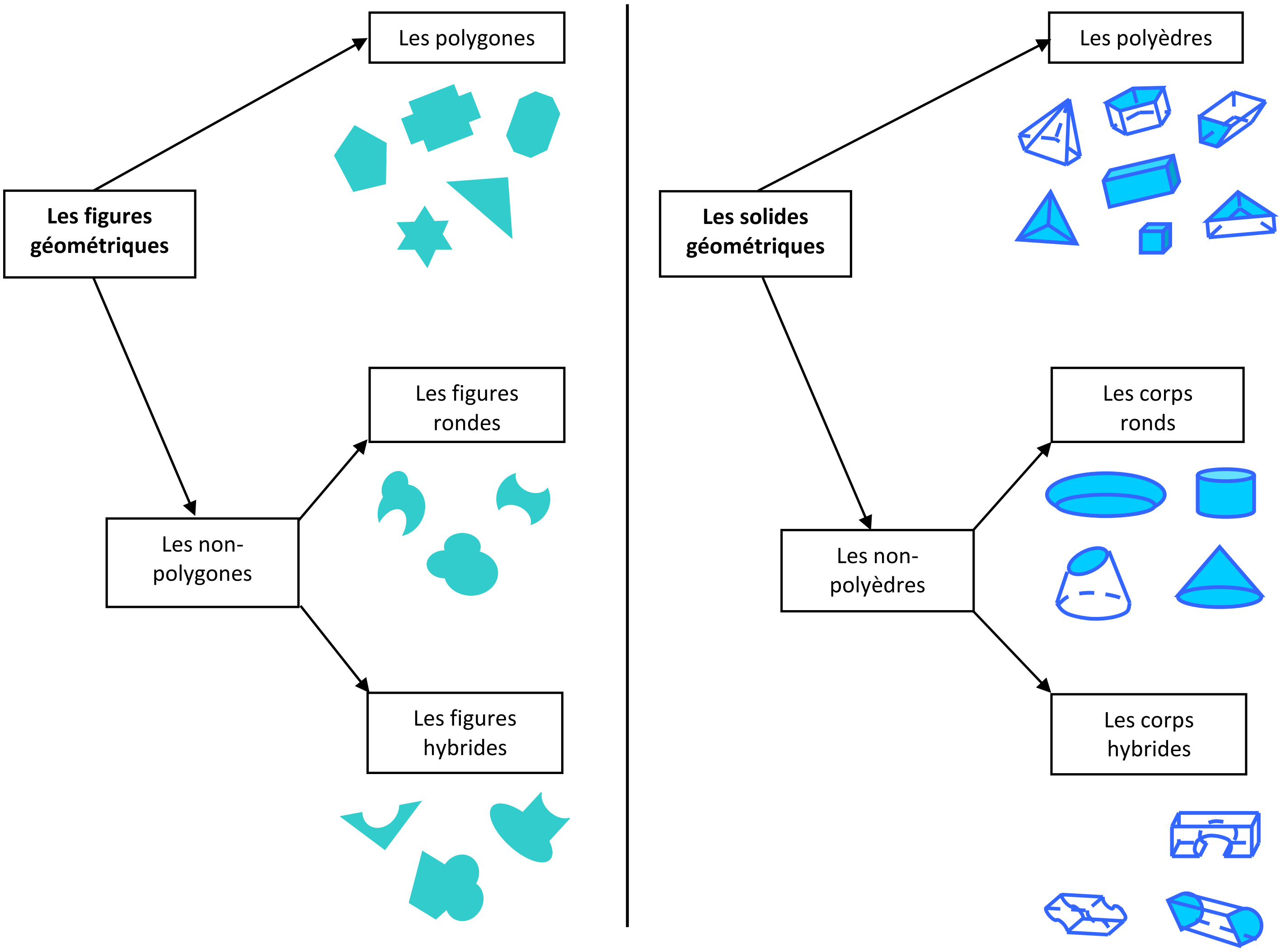


Un **corps rond** est un "*solide géométrique dont toutes les faces sont des faces courbes (non-planes) et/ou des faces planes rondes*".



Remarque: Les critères retenus pour classer les solides géométriques ont pour avantage:

- d'une part, d'aboutir à un classement des solides géométriques analogue aux classements des figures géométriques planes.



- d'autre part, d'être des critères géométriques et non pas des critères non mathématiques comme par exemple "*solides qui roulent ou ne roulent pas*" ou "*solides boules ou non-boules*".

Remarque: Semblablement à la définition "générale" proposé par F. BUEKENHAUT pour les polygones, citons pour simple information la définition générale et actuelle de Grünbaum pour les polyèdres.

Les polyèdres selon GRÜNBAUM[2]

[…] Tout au long de l'histoire des mathématiques, différentes notions ont été introduites pour caractériser les polyèdres. Ce qui a donné lieu, non sans certains sarcasmes, à l'affirmation que "la seule chose qu'ont en commun tous les polyèdres, c'est en réalité leur nom." Par exemple, les polyèdres étaient considérés dans la Grèce antique comme des corps solides, mais plus tard, ils ont été traités plutôt comme des surfaces.

[2] CLAUDI A., *Les Mille Facettes de la beauté géométrique*, Barcelone, RBA Coleccionables S.A., 2012, Coll. "Le monde est mathématique", pg. 19

Évidemment, selon les polygones utilisés pour former les faces [(polygones plans finis convexes ou étoilés, polygones plans infinis, polygones gauches finis ou infinis…)], on obtient différents types de polyèdres. Ici, nous prendrons des polyèdres qui présentent les trois caractéristiques essentielles suivantes: un nombre fini de faces polygonales (de sorte que deux faces qui se coupent aient un sommet ou une arête en commun), des arêtes qui n'appartiennent qu'à deux faces et des sommets où arrivent plusieurs arêtes et faces (au moins trois).

La définition formulée par B. Grünbaum est considérée comme très importante, car elle couvre un champ très vaste de polyèdres. Elle indique qu'un polyèdre P est une famille de polygones (faces de P) possédant les trois propriétés suivantes:

1. *Chaque arête n'est l'arête que d'une seule autre face.*
2. *Pour chaque paire d'arêtes A et A' de P, il existe une chaîne $A = A_0, F_1, F_2, A_2…, F_n, A_n = A'$ d'arêtes (A_i) et de faces (F_i) de P dans laquelle chaque face F_i est incidente à A_{i-1} et A_i.*
3. *Tout ensemble compact de l'espace (ensemble délimité qui entre dans une sphère et contient tous ses points frontière) ne peut couper qu'un nombre fini de faces de P.*

Naturellement, la classe privilégiée et très particulière des polyèdres peut très bien et très simplement être désignée par un ensemble délimité de l'espace exprimable en termes d'intersection d'un nombre de demi-espaces fermés, mais ces polyèdres convexes ne sont que la pointe visible d'un immense iceberg. La définition de Grünbaum couvre un champ très vaste de polyèdres. […]