

Mathématiques élémentaires

Logique et mathématiques

"Pas de mathématiques sans une certaine technique logique."

J.M. SALANSKIS

"Dans l'édifice de la pensée, notamment mathématique, la logique établit parallèlement les bases du raisonnement et les outils pour faire progresser la connaissance."

G. GUERRERIO

"La logique est l'étude des moyens de preuve."

C. PERELMAN

Cellule de Géométrie – Catégorie pédagogique de la HEH

DEMAL Michel

demal.michel@skynet.be

DRAMAIX Jérémy

jeremy.dramaix@gmail.com

HIGNY Samuel

higny_samuel@hotmail.com

LAFOT Cindy

lafot.cindy@hotmail.com

MALAGUARNERA Angelo

angelo.malaguarnera@gmail.com

Logique et mathématiques

Plan

1. Introduction

2. Propositions

3. Propositions quantifiées

3.1. Les propositions existentielles

3.2. Propositions universelles

3.3. Propositions à plusieurs quantificateurs

4. Les conjonctions "et" et "ou" en logique

4.1. La conjonction "et" dans le langage usuel

4.2. La conjonction "ou"

5. Négation d'une proposition ($\neg p$)

6. Double négation d'une proposition

7. Négation d'une proposition quantifiée

7.1. Négation d'un "pour tout" ($\neg \forall = \exists$)

7.2. Négation d'un "il existe" ($\neg \exists = \forall$)

8. Négation des conjonctions "et" et "ou"

8.1. Négation de la conjonction "et" ($\neg (p \text{ et } q) = \neg p \text{ ou } \neg q$)

8.2. Négation de la conjonction "ou" ($\neg (p \text{ ou } q) = \neg p \text{ et } \neg q$)

8.3. Négation de la conjonction "et" ($\neg (p \text{ et } q) = \neg p \text{ ou } \neg q$)

8.4. Négation de la conjonction "ou" ($\neg (p \text{ ou } q) = \neg p \text{ et } \neg q$)

9. Implication et équivalence

9.1. Dédution - Inférence - Implication

9.1.1. Dédution

9.1.2. Les propositions implications $p \Rightarrow q$

9.1.3. Implications et théorie mathématique

9.1.4. Les différentes expressions de l'implication

9.2. Équivalence

Équivalence et implication

10. Principaux procédés de démonstration

10.1. Procédés servant à montrer la non- véracité d'une proposition

Le contre-exemple

10.2. Procédés servant à montrer la véracité d'une proposition

10.2.1. Les démonstrations hypothético-déductives

10.2.2. Les démonstrations par l'absurde

10.2.3. Les démonstrations selon le principe de la contraposée

10.2.4. Les démonstrations par récurrence

10.2.5. Les démonstrations par "dessins" et "superpositions"

10.3. Démonstrations formelles et informelles

11. Définition et propriétés

11.1. Définition et propriétés

11.2. Définition, propriétés et déduction

11.3. Les différents types de définitions en mathématique

11.4. Quelle définition, à quel âge?

12. Théorie mathématique - Théorie déductive

13. L'activité mathématique

Logique et mathématique

Les notes ci-après sont des notes partielles destinées à servir de document de base pour un exposé oral. Elles seront bien évidemment "complétées" lors de cet exposé.

1. Introduction

Contrairement au langage familier¹, la mathématique utilise une syntaxe, des symboles, des procédés dont le sens est univoquement déterminé. La méconnaissance de cette syntaxe, de ces symboles, de ces procédés crée souvent un désaccord entre les élèves et la mathématique. Aussi, faut-il s'assurer que les élèves de l'école primaire ou de l'enseignement secondaire s'initient petit à petit au sens précis de ces symboles, syntaxes et procédés imposés par la mathématique.

Dans cette partie, nous aborderons de **manière intuitive** quelques concepts qui sous-tendent toute l'activité mathématique. Nous commencerons par préciser les notions de proposition, proposition quantifiée, conjonction, négation de propositions, négation de propositions quantifiées ainsi que la négation des conjonctions "et" et "ou". Ensuite, nous analyserons les concepts d'implication (inférence), d'équivalence, de définition et les principaux procédés de démonstration. Nous terminerons par l'examen des expressions "théorie mathématique" et "activité mathématique".

2. Propositions

Les mathématiques travaillent sur des propositions à deux valeurs (vraie ou fausse) qui vérifient les principes suivants:

- a) Principe du tiers exclu: toute proposition est soit vraie soit fausse
- b) Principe de non-contradiction: toute proposition ne peut être à la fois vraie et fausse en même temps
- c) Principe d'identité: dans un même contexte, toute proposition garde sa valeur. Si on change de contexte, la proposition peut éventuellement changer de valeur de vérité.

Exemples:

1. la proposition "une symétrie centrale est un déplacement" est une proposition qui sera toujours vraie dans le plan. Dans l'espace, cette proposition deviendra une proposition fausse (une symétrie centrale est un retournement de l'espace).
2. la proposition "une translation est un déplacement" est une proposition vraie aussi bien dans le plan que dans l'espace.

Exemples de propositions:

P_1 : 6 est un nombre pair – (V) (1)

P_2 : un mouton a 5 pattes – (F) (0)

P_3 : la porte est ouverte

¹ Les réalités familières sont rarement des modèles pour la mathématique.

Exemples de non-propositions:

- "2 + 3"
- La porte est-elle ouverte?
- Ouvre la porte

On appelle proposition, toute expression à laquelle est associée une et une seule valeur logique et qui vérifie les trois principes ci-dessus.

3. Propositions quantifiées

Les propositions quantifiées sont des propositions qui contiennent un ou plusieurs quantificateurs.

3.1. Les propositions existentielles

Les propositions existentielles sont des propositions qui sont vraies ou fausses pour certains objets d'une catégorie. On les utilise lorsqu'on veut affirmer l'existence d'objets ayant telle ou telle propriété.

Pour exprimer l'existence d'objets ayant telle ou telle propriété, on utilise le quantificateur (existantiel): "il existe" (\exists).

Le quantificateur existentiel "il existe" (\exists) est à prendre au sens de "il existe au moins".

Si on demande de dessiner 3 pièces telles qu'il existe une pièce en position face, on obtient comme solutions possibles:

F P P - F F P - F F F

Pour symboliser "il existe exactement", on écrit " $\exists!$ ", c'est-à-dire "il existe une seule valeur" qui satisfait la proposition.

3.2. Propositions universelles

Les propositions universelles sont des propositions qui sont vraies ou fausses pour tous les objets d'une catégorie. On les utilise lorsqu'on veut exprimer le fait que tous les objets d'une catégorie possèdent telle ou telle propriété.

Pour exprimer que l'ensemble des objets de la catégorie possède telle ou telle propriété, on utilise le quantificateur (universel): "pour tout" (\forall).

Le quantificateur universel "pour tout" (\forall) est à prendre au sens de "quel que soit l'élément" ou "pour chaque élément".

Si on demande de dessiner 3 pièces telles que toutes les pièces soient en position face, on obtient la solution:

F F F

3.3. Propositions à plusieurs quantificateurs

Dans les propositions à plusieurs quantificateurs, l'ordre de ceux-ci a une grande importance. **Conventionnellement en logique**, un "pour tout" suivi d'un "il existe" n'a pas le même sens qu'un "il existe" suivi d'un "pour tout".

En logique, des expressions telles que: "pour tout coffre, il existe une clé" et "il existe une clé pour tout coffre" ont des sens différents.

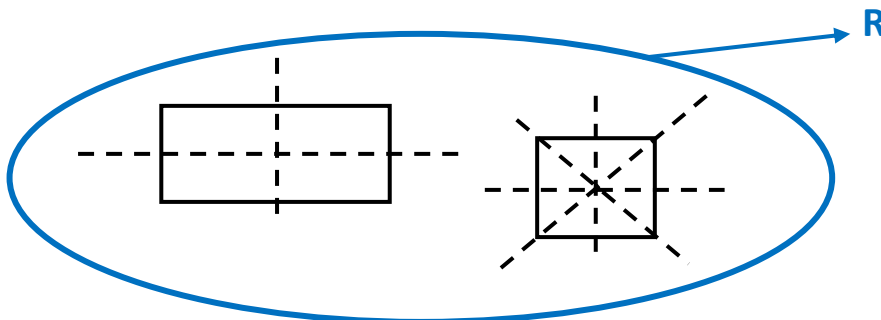
- L'expression "pour tout coffre, il existe une clé" signifie conventionnellement en logique que chaque coffre possède sa propre clé.
- Par contre, l'expression "il existe une clé pour tout coffre" signifie qu'il existe une clé (un passe partout) qui peut ouvrir chaque coffre.

On peut intuitivement retenir que:

- si le même objet est valable pour chaque élément, alors on utilise un "il existe" (\exists) suivi d'un "pour tout" (\forall).
- si à chaque objet, correspond (au moins) un élément dépendant de l'objet considéré, alors on utilise un "pour tout" (\forall) suivi d'un "il existe" (\exists).

Exemples:

1. Que faut-il choisir à propos de la famille des rectangles: la proposition 1 ou la proposition 2?



P_1 : Pour tout rectangle, il existe (au moins) deux axes de symétrie.

P_2 : Il existe (au moins) deux axes de symétrie pour tout rectangle.

2. Que faut-il choisir à propos des phrases suivantes si on souhaite respecter les conventions de la logique formelle:

P_1 : Pour tout (chaque) élève, il existe un journal de classe.

P_2 : Il existe un journal de classe pour tout (chaque) élève.

Remarque: Des expressions telles que: "pour tous les coffres, il existe une clé" et "il existe une clé pour tous les coffres" ont naturellement, dans le langage familier, le même sens.

4. Les conjonctions "et" et "ou" en logique

Les conjonctions "et" et "ou" servent, en logique, à définir de nouvelles propositions à partir de propositions premières (p et q), (p ou q).

En langage usuel et contrairement à la logique, les conjonctions "et" et "ou" peuvent prendre des sens différents, comme l'illustrent les exemples ci-après.

4.1. La conjonction "et" dans le langage usuel

Soient les phrases:

- 3 et 4 font 7;
- Les pensionnés et les étudiants bénéficient de réductions dans les transports en commun;
- Les élèves qui portent des bottes et une écharpe peuvent sortir en récréation.

Dans le langage courant, la conjonction "et" possède le sens de l'union dans les phrases (1) et (2). Dans la phrase (3), la conjonction "et" possède le sens de l'intersection: les élèves doivent remplir les deux conditions en même temps.

Les deux premiers "et" sont des "et" entre personnes (objets) alors que le troisième "et" est un "et" entre qualités.

Ainsi, les phrases "les élèves qui portent des lunettes et les élèves qui portent une montre peuvent sortir" et "les élèves qui portent des lunettes et une montre peuvent sortir" n'ont pas le même sens.

De même, écrire "tous les nombres naturels qui sont pairs et tous les nombres naturels qui sont impairs" revient à écrire tous les nombres naturels et écrire "tous les nombres naturels qui sont pairs et impairs" revient à ne rien écrire puisqu'un nombre naturel ne peut pas être à la fois pair et impair.

Les expressions "les quadrilatères qui possèdent 4 angles droits et 4 côtés isométriques" et "les quadrilatères qui possèdent 4 angles droits et les quadrilatères qui possèdent 4 côtés isométriques" n'ont pas non plus le même sens.

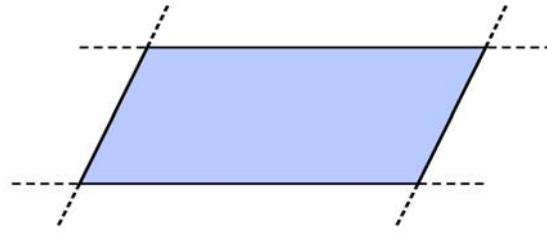
En logique, la conjonction "et" est à prendre au sens de l'intersection, c'est-à-dire dans le sens de posséder les deux "qualités" en même temps.

Remarque concernant la conjonction "et": Au niveau pédagogique, certains enfants ont des difficultés à accepter et à comprendre une proposition du type suivant:

"Un quadrilatère qui possède deux paires de côtés parallèles **et** un angle droit est un membre de la famille des rectangles" - (Rectangle quelconque ou carré).

En effet, comme leur démarche est d'imaginer les concepts par partie de phrases et dans l'ordre de la lecture, les enfants ont tendance à considérer les deux contraintes comme incompatibles.

Ainsi, en analysant seulement le premier membre de la phrase ("quadrilatère ayant deux paires de côtés parallèles"), ces élèves-là considèrent qu'il s'agit d'un parallélogramme quelconque.



Ensuite, s'ils se limitent à la représentation par le dessin, comme ci-dessus. La deuxième contrainte devient impossible à leurs yeux puisqu'ils ne voient pas d'angle droit dans un parallélogramme (quelconque).

Certains enfants confrontés à la définition donnée ci-dessus pensent quand même parfois aux rectangles (quelconques ou aux carrés) mais considèrent qu'à propos des rectangles, il faut nécessairement exprimer les 4 angles droits et non pas un seul angle droit! Pour ces enfants-là, le déterminant de l'expression "un", de "un angle droit" est perçu au sens de "exactement un" et non pas au sens de "au moins un"

4.2. La conjonction "ou"

Semblablement à la conjonction "et", la conjonction "ou" peut prendre des sens différents dans le langage usuel.

La langue française attribue à la conjonction "ou", au moins 3 sens possibles:

le "ou" exclusif, le "ou" inclusif et le "ou" d'équivalence.

"ou" exclusif, au sens de: **soit l'un, soit l'autre** (mais pas les deux en même temps)

Exemple: Entre ou sors!

"ou" inclusif, au sens de: **ou bien l'un, ou bien l'autre, ou bien les deux en même temps**

Exemple: Les élèves qui portent des bottes ou une écharpe peuvent sortir en récréation.

"ou" d'équivalence:

Exemples: Paris ou la Ville Lumière;
Bruges ou la Venise du nord

En logique, le "ou" est à prendre au sens inclusif (soit l'un et pas l'autre, soit l'autre et pas l'un, soit les deux en même temps).

Dès lors, en mathématique et à propos des quadrilatères, il faut interpréter l'expression géométrique ci-après de la manière suivante:

"Tous les côtés sont isométriques ou tous les angles sont isométriques."

Il faut penser aux quadrilatères qui ont, soit:

- tous les côtés de même longueur et au moins deux angles d'amplitude différente: les losanges quelconques;
- au moins deux cotés non isométriques et tous les angles isométriques: les rectangles quelconques;
- tous les côtés de même longueur et tous les angles de même amplitude: les carrés.

Exercice:

Comment interpréter en logique les phrases suivantes?

1. Les élèves qui portent une montre ou une écharpe peuvent sortir.
2. Les élèves qui portent une montre ou les élèves qui portent une écharpe peuvent sortir.

5. Négation d'une proposition ($\neg p$)

Soient les propositions:

p_1 : 6 est un nombre pair (V)

p_2 : 7 est un nombre pair (F)

La négation de ces propositions donne:

$\neg p_1$: 6 n'est pas un nombre pair (F)

$\neg p_2$: 7 n'est pas un nombre pair (V)

La négation d'une proposition est une proposition qui est vraie (fausse) si la proposition de départ est fausse (vraie).

Remarque: négation et contraire ne sont pas synonymes.

6. Double négation d'une proposition

Dans la vie courante, une double négation tend souvent à renforcer la négation.

Exemple: "Voulez-vous danser?" - Réponse: "Non - non"

En mathématique, une double négation est une affirmation.

En effet:

Si p est vrai, alors $\neg p$ est fausse, d'où $\neg(\neg p)$ est vraie.

Si p est fausse, alors $\neg p$ est vraie, d'où $\neg(\neg p)$ est fausse.

P	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
1	0	1
0	1	0

Exemples:

- "La porte n'est pas non fermée" signifie que "la porte est fermée".
- En sachant que tout nombre naturel est soit pair ou impair:
"6 n'est pas non pair" signifie que "6 est un nombre pair".

En effet:

6 n'est pas $\underbrace{\text{non pair}}_{\text{impair}}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{pair}}$

Remarque: La règle de la double négation est utilisée pour justifier la véracité d'une proposition dans la conclusion d'une démonstration par l'absurde.

7. Négation d'une proposition quantifiée

7.1. Négation d'un "pour tout" ($\neg \forall = \exists$)

La négation d'une proposition contenant le quantificateur universel donne une proposition contenant le quantificateur existentiel.

Exemples:

- Dans un ensemble de 3 pièces, nier qu'elles sont toutes en position "face" revient à affirmer qu'il existe (au moins) une pièce en position "pile".

La négation de F F F, soit $\neg (F F F)$, donne comme réponses possibles: P F F ; P P F ; P P P, c'est-à-dire : "il existe au moins une pièce en position pile."

- Nier que tous les élèves de la classe sont des filles revient à affirmer qu'il existe (au moins) un garçon dans la classe.

7.2. Négation d'un "il existe" ($\neg \exists = \forall$)

La négation d'une proposition contenant le quantificateur existentiel donne une proposition contenant le quantificateur universel.

Exemples:

- Dans un ensemble de 3 pièces, nier la proposition "il existe" (au moins) une pièce en position face" revient à affirmer que toutes les pièces sont en position "pile".
- Nier qu'il existe au moins un garçon dans la classe revient à affirmer que tous les élèves sont des filles.

8. Négation des conjonctions "et" et "ou"

8.1. Négation de la conjonction "et" ($\neg (p \text{ et } q) = \neg p \text{ ou } \neg q$)

La négation d'une proposition contenant la conjonction "et" revient à exprimer cette négation à l'aide d'une proposition contenant la conjonction "ou" et les négations des propositions p et q.

Exemples:

Nier que "les élèves ont des bottes et une écharpe" revient à affirmer que "les élèves n'ont pas de bottes ou n'ont pas d'écharpe".

En effet, pour ne pas avoir "des bottes et une écharpe" en même temps, il suffit:

- soit de ne pas avoir de bottes mais une écharpe;
- soit d'avoir des bottes mais pas d'écharpe;
- soit de ne pas avoir de bottes ni d'écharpe en même temps.

8.2. Négation de la conjonction "ou" ($\neg (p \text{ ou } q) = \neg p \text{ et } \neg q$)

La négation d'une proposition contenant la conjonction "ou" revient à exprimer cette négation à l'aide d'une proposition contenant la conjonction "et" et les négations des propositions p et q.

Exemples:

Nier que "les élèves ont une écharpe ou une montre" revient à affirmer que "les élèves n'ont pas d'écharpe et n'ont pas de montre"; ce qui peut s'écrire: "les élèves n'ont pas d'écharpe et de montre".

En effet, pour avoir "une écharpe ou une montre", il suffit:

- soit d'avoir une écharpe et pas de montre;
- soit de ne pas avoir une écharpe mais une montre;
- soit d'avoir une écharpe et une montre en même temps.

Dès lors, pour "ne pas avoir d'écharpe ou de montre", il suffit de ne pas être dans une des trois situations ci-dessus; ce qui est équivalent à affirmer que "les élèves n'ont pas de d'écharpe et n'ont pas de montre".

Exercices:

1. "On appelle polygone régulier, un polygone dont tous les côtés sont de même longueur et tous les angles sont de même amplitude." Donner les conditions pour qu'un polygone soit non régulier.
2. Nier que tous les élèves portent des lunettes et une montre.
3. Nier qu'il existe des élèves qui portent des lunettes et une montre.

9. Implication et équivalence

9.1. Déduction - Inférence - Implication

"On n'accède pas au stade formel si on confond implication et équivalence et si on ne fait pas la différence entre les deux." - Jean PIAGET

9.1.1. Déduction

Avant d'entrer dans les nuances de la théorie de l'inférence et de l'implication, en logique, il est indispensable que les enfants:

- prennent conscience de l'existence de relations de causalité (déduction), de dépendance entre des éléments qui, à priori, semblent fort différents tels que par exemples: le parallélisme et les angles isométriques, dans les quadrilatères;
- se familiarisent avec les concepts (non innés chez la plupart d'entre eux) de conséquences vraies et de conséquences fausses sous l'hypothèse d'antécédents vrais. En effet, ce type de relations et ces concepts sont à la base de tout raisonnement déductif correct qu'ils devront s'approprier pour accéder au "jeu mathématique". De plus, avant d'aborder des conséquences mathématiques vraies ou fausses ainsi que leur(s) justification(s), il semble souhaitable d'habituer les jeunes élèves avec des exemples non mathématiques appropriés.

9.1.2. Les propositions implications $p \Rightarrow q$

A partir de deux propositions "p" et "q", on peut obtenir une proposition appelée implication et notée " $p \Rightarrow q$ ". Comme toute autre proposition, celle-ci est soit vraie, soit fausse, et il semble assez naturel que la véracité ou la non véracité de la proposition implication

("p \Rightarrow q") dépende des valeurs de vérité des propositions "p" et "q". En tenant compte des valeurs de vérité de celle-ci, quatre cas sont à analyser et peuvent se résumer comme dans le tableau ci-dessous:

p	q	p \Rightarrow q
V	V	?
V	F	?
F	V	?
F	F	?

L'expérience et l'intuition poussent à admettre que la proposition implication "p \Rightarrow q" est vraie lorsque les propositions "p" et "q" sont vraies et que la proposition implication "p \Rightarrow q" est fausse lorsque la proposition "p" est vraie et que la proposition "q" est fausse. Par contre, il n'en est plus de même lorsqu'on doit admettre que la proposition implication "p \Rightarrow q" est vraie lorsque la proposition "p" est fausse, et ce, quelle que soit la valeur de vérité de la proposition "q".

En effet, accepter que les deux propositions suivantes: ("3 + 4 = 9" implique "Bruxelles est la capitale de la France") et ("3 + 4 = 9" implique "Bruxelles est la capitale de la Belgique") sont des propositions vraies, demande un sens de l'humour que seuls des habitués de la théorie de la logique possèdent et apprécient.

En fait, c'est pour des raisons de cohérence théorique que l'on pose (impose) par définition, que la proposition implication "p \Rightarrow q" est toujours vraie, sauf dans le cas où l'antécédent (p) est vrai et le conséquent (q) faux.

On **impose** donc, que cela ait du sens ou non, la table de vérité suivante pour la proposition implication "p \Rightarrow q":

p	q	p \Rightarrow q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

9.1.3. Implications et théorie mathématique

En mathématique, les théorèmes et les propositions implications sont synonymes.

La recherche de la véracité éventuelle d'un théorème revient donc à déterminer la véracité d'une proposition implication "p \Rightarrow q". En effet, un théorème peut se concevoir comme une proposition implication où l'antécédent (la proposition "p") représente la ou les hypothèse(s), et le conséquent (la proposition "q"), la thèse. Le théorème est vrai ou faux suivant que la proposition implication "hypothèse(s) \Rightarrow thèse" est vraie ou fausse.

Il est d'usage, avec les débutants, de ne proposer que des théorèmes (implications) où les hypothèses (antécédents) sont vrai(e)s. Sous cette contrainte et sur base de la définition de la table de vérité de la proposition implication, rechercher la véracité ou la non-véracité des théorèmes (les propositions implications "hypothèses \Rightarrow thèse") se ramène donc à démontrer la véracité ou la non-véracité de la thèse (conséquent).

La table de vérité de la proposition implication (" $p \Rightarrow q$ ") indique que, dans le cas où l'antécédent est vrai, la proposition implication "hypothèse \Rightarrow thèse" (le théorème) est vraie (fausse) lorsque le conséquent (la thèse) est vrai (faux).

Remarque: Certains auteurs utilisent l'expression "inférence" au lieu de "implication", lorsqu'ils veulent affirmer qu'ils travaillent sur des propositions implications (" $p \Rightarrow q$ ") où l'antécédent est toujours vrai.

9.1.4. Les différentes expressions de l'implication

L'implication " $p \Rightarrow q$ " peut se lire: "si p alors q".

Exemple: "Il pleut implique que l'herbe est mouillée" peut se lire: "s'il pleut, alors l'herbe est mouillée".

Remarque: L'implication " $p \Rightarrow q$ " se lit également:

- "q" est une **condition nécessaire** pour "p"
- "p" est une **condition suffisante** pour "q"
- "q" **résulte de** "p"
- **Il faut** "q" pour avoir "p"
- **Il suffit de** "p" pour avoir "q"

L'exemple: "Il pleut" **implique que** "l'herbe est mouillée" peut donc se dire également:

- **si** "il pleut", **alors** "l'herbe est mouillée"
- "l'herbe est mouillée" **est une condition nécessaire pour** "il pleut"
- "il pleut" **est une condition suffisante pour** "l'herbe est mouillée"
- **Il faut** "l'herbe est mouillée" **pour avoir** "il pleut"
- **Il suffit de** "il pleut" **pour avoir** "l'herbe est mouillée"

Un nombre important d'élèves confond l'implication " $p \Rightarrow q$ " et l'implication réciproque " $q \Rightarrow p$ ". En effet, des propositions et leur réciproque, comme celles ci-dessous, sont souvent considérées par les enfants, comme identiques et exprimant la même idée.

A₁: "Il n'y a plus d'essence dans le réservoir de la voiture" implique "le moteur s'éteint". (V)

A₂: "Le moteur s'éteint" implique "il n'y a plus d'essence dans le réservoir de la voiture". (F)

Dans les quadrilatères:

B₁: "4 angles droits" implique "les diagonales sont de la même longueur". (V)

B₂: "Les diagonales sont de la même longueur" implique "4 angles droits". (F)

Les conjonctions et locutions "car, en effet, donc, puisque, parce que, par ailleurs" sont également à faire rencontrer et utiliser par les élèves.

Exercices:

1. Préciser si les conséquences suivantes sont vraies ou fausses:

- Si la cour est mouillée, alors il pleut. (V, F)
- "La lumière s'éteint" implique "il y a une panne de courant". (V, F)

2. Compléter pour que les implications soient vraies ou fausses:

- Si la température est inférieure à zéro degré, alors (V)
- (F)

9.2. Équivalence²

Dans certains cas, les propositions "p" et "q" sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses en même temps. On dit alors qu'elles sont équivalentes et on écrit " $p \Leftrightarrow q$ ". Dans une équivalence, on exclut la possibilité que, en même temps, l'une soit vraie et l'autre soit fausse.

Équivalence et implication

D'une manière générale, si l'implication " $p \Rightarrow q$ " est vraie, sa réciproque " $q \Rightarrow p$ " est fausse. Néanmoins, pour certaines propositions "p" et "q", les implications " $p \Rightarrow q$ " et " $q \Rightarrow p$ " sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses en même temps. Dans ce cas, "p" et "q" sont deux propositions équivalentes.

Remarque: " $p \Leftrightarrow q$ " se lit également:

- p si et seulement si q
- p est nécessaire et suffisant pour q
- q est nécessaire et suffisant pour p
- pour avoir p, il faut et il suffit d'avoir q
- pour avoir q, il faut et il suffit d'avoir p

Exemples, dans la famille des triangles:

- "3 angles de même amplitude" **est équivalent à** "3 côtés de même longueur".
- "Les 3 angles sont de même amplitude" **si et seulement si** "les 3 côtés sont de même longueur".
- **Pour avoir** "les 3 angles de même amplitude", **il faut et il suffit d'avoir** "3 côtés de même longueur".
- **Pour avoir** "3 côtés de même longueur", **il faut et il suffit d'avoir** "3 angles de même amplitude".

10. Principaux procédés de démonstration

Une des règles du "jeu" de la mathématique est de savoir si un ensemble d'informations A (des hypothèses et des notions rencontrées antérieurement) entraîne la véracité ou la non-véracité d'une proposition B. Pour le vérifier, la logique met à disposition les procédés suivants:

10.1. Procédés servant à montrer la non-véracité d'une proposition

Le contre-exemple

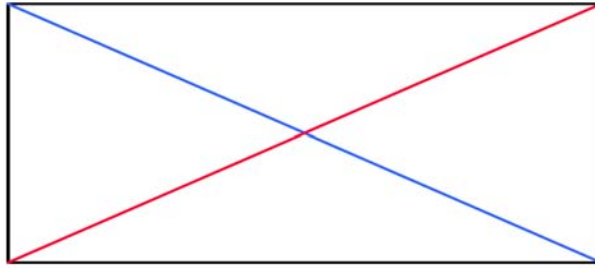
Le procédé du contre-exemple permet de montrer qu'une proposition est fausse. Pour montrer qu'une proposition est fausse, il suffit généralement d'exhiber un contre-exemple.

Exemple de proposition fausse, dans la famille des rectangles:

"Dans tout rectangle, les diagonales sont perpendiculaires".

En effet, la proposition n'est pas vérifiée (pas vraie), pour le rectangle "quelconque" ci-après:

² Avec de jeunes enfants, on se limite aux cas où l'antécédent est vrai.



On peut également montrer qu'une proposition est fausse en montrant que ses conséquences sont fausses.

10.2. Procédés servant à montrer la véracité d'une proposition

10.2.1. Les démonstrations hypothético-déductives

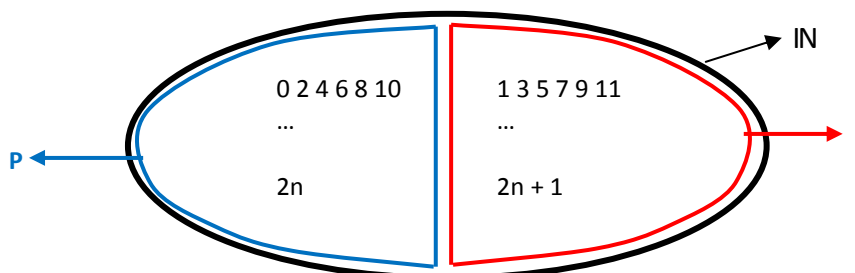
Procédés qui, partant des hypothèses et par implications successives, permettent de justifier qu'une thèse est vraie.

Exemple: Justifier la véracité de la proposition:

"Le carré de tout nombre pair est un nombre pair".

Avant de montrer la véracité de cette proposition, rappelons (sans justification) quatre propriétés des nombres naturels:

- Tout naturel est soit pair, soit impair.



- Le produit de deux nombres naturels est un nombre naturel.
- La réunion des nombres naturels pairs et des nombres naturels impairs donne les naturels.
- Un naturel ne peut être pair et impair en même temps.

Pour montrer, par le procédé de démonstration hypothético-déductive, que la proposition "le carré de tout nombre pair est un nombre pair" est une proposition vraie, on peut procéder comme suit:

Hypothèse: $\forall p \in P$

Thèse: $p^2 \in P$

Démonstration: $\forall p \in \mathbb{N}: p \in P \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \xi p = 2n \Rightarrow p^2 = 4n^2$
 $\Rightarrow p^2 = 2(2n^2) \Rightarrow p^2 \in P \text{ car } 2n^2 \in \mathbb{N}$

10.2.2. Les démonstrations par l'absurde

Pour justifier que des hypothèses entraînent une thèse en utilisant le procédé par l'absurde, on s'appuie sur le principe suivant:

- on suppose la négation de la **thèse**.
- par un raisonnement logique, on montre que la négation de la thèse entraîne une contradiction avec une des hypothèses posées ou avec une proposition déjà rencontrée.

La réalisation des deux phases ci avant entraîne que la négation de la thèse n'est pas admissible; c'est donc que celle-ci est vraie.

Exemple: (réciproque du théorème précédent) Soit à montrer la véracité de:

"Si le carré d'un nombre est pair, alors ce nombre est pair".

Pour montrer, par le procédé de démonstration par l'absurde, que ces propositions sont vraies, on peut procéder comme suit:

Hypothèse: $\forall p: p^2 \in P$

Thèse: $p \in P$

Démonstration (absurde): Supposons que "p" n'appartient pas à P

$$\Rightarrow p \in I \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: p = 2n + 1$$

$$\Rightarrow p^2 = (2n + 1)^2 \Rightarrow p^2 = 4n^2 + 4n + 1 \Rightarrow p^2 = 2(2n^2 + 2n) + 1$$

$$\Rightarrow p^2 \in I \text{ car } (2n^2 + 2n) \in \mathbb{N}$$

Or, ceci est contraire à l'hypothèse de départ ($p^2 \in P$).

Dès lors, supposer que "p" n'appartient pas à P n'est pas correct, d'où $p \in P$.

Beaucoup d'enseignants sont malheureusement convaincus que les démonstrations par l'absurde sont inaccessibles aux très jeunes enfants et proposent dès lors d'attendre 15 - 16 ans pour les aborder!

Pour les rédiger individuellement par écrit et de manière formelle, il est évident qu'il faut attendre cet âge.

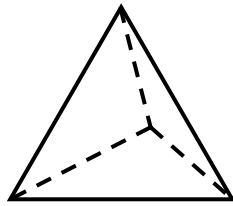
Cependant, il n'en est pas de même pour l'initiation qui peut déjà commencer dès la fin de l'école primaire, mais seulement de manière orale et collective avec recherche et vérification concrètes.

Exemple d'initiation à la démonstration par l'absurde, dès l'école primaire (à partir de 10 ans):

1. Recherche et construction de polyèdres convexes dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux: les deltaèdres.
2. Calcul de leur nombre d'arêtes.

Par assemblage de plaquettes triangulaires, les enfants découvrent des deltaèdres à 4 - 6 - 8 - 10 - 12 - 14 - 16 - 20 faces. Pour chacun des polyèdres construits, ils ont ensuite à dénombrer les arêtes par le calcul raisonné, en s'appuyant sur le nombre de faces, la forme des faces et le fait que toute arête est incidente à deux faces (appartient à deux faces).

Exemple du tétraèdre:



Le tétraèdre a 4 faces triangulaires. Chaque face triangulaire apporte 3 arêtes. Le nombre d'arêtes total devrait être: $4 \times 3 = 12$.

Attention! Chaque arête appartient à deux faces, donc a été comptée en double. Il faut dès lors diviser ce nombre par deux!

Le nombre d'arêtes du tétraèdre est " $12 : 2 = 6$ ".
Vérification sur le modèle concret.

La question suivante est de savoir si tous les deltaèdres existants ont bien été construits. Il leur est dès lors demandé de construire des deltaèdres à 5 faces, à 7 faces, à 9 faces. Après essais, il s'avère que cela est impossible. Revenant au calcul du nombre d'arêtes des deltaèdres, la question posée à la classe est la suivante:

Par le raisonnement à propos du calcul du nombre d'arêtes, comment prouver qu'un deltaèdre à 5 faces n'existe pas? Imaginons qu'il existe, quel en serait son nombre d'arêtes?

Calcul et réponse: $(5 \times 3) : 2 = 7,5$ arêtes. C'est impossible car il faut un nombre entier d'arêtes.

Un raisonnement analogue est également suivi pour les deltaèdres à 7 - 9 - 11 - 13... faces. En conclusion, on soutient qu'il est impossible qu'un deltaèdre ait un nombre impair de faces, car, chaque fois que l'on en suppose l'existence, il apparaît des demi-arêtes. Il s'en suit que les deltaèdres ont nécessairement un nombre pair de faces.

10.2.3. Les démonstrations selon le principe de la contraposée

Fort semblable à la démonstration par l'absurde, le principe de la contraposée permet de montrer également que des hypothèses entraînent une thèse.

Principe de la contraposée

On peut justifier en logique formelle que: " $p \Rightarrow q$ " est équivalent à " $\neg q \Rightarrow \neg p$ "

Exemple: Soit la proposition: " $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \neq y \Rightarrow x + z \neq y + z$ ".

Pour justifier, par le principe de la contraposée, que " $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \neq y \Rightarrow x + z \neq y + z$ " est une proposition vraie, on peut procéder comme suit:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \neq y \Rightarrow x + z \neq y + z$$

est équivalent par le principe de la contraposée à:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \neg(x + z \neq y + z) \Rightarrow \neg(x \neq y)$$

Comme la négation de "différent" est "égal", la démonstration revient donc à montrer que:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x + z = y + z \Rightarrow x = y$$

Démonstration: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x + z = y + z$

$$\Rightarrow (x + z) + \bar{z} = (y + z) + \bar{z} \quad (\text{où } \bar{z} \text{ est le symétrique de } z \text{ dans } \mathbb{R}, +)$$

$$\Rightarrow x + (z + \bar{z}) = y + (z + \bar{z})$$

$$\Rightarrow x + 0 = y + 0$$

$$\Rightarrow x = y$$

Dès lors, on peut conclure que: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \neq y \Rightarrow x + z \neq y + z$

Le principe de la contraposée a été exposé ci-dessus parce qu'il fait partie des procédés de démonstration. Toutefois, aborder ce principe dans l'enseignement obligatoire peut prêter à confusion et laisser perplexes bien des jeunes quant à la validité des démonstrations pour étayer une conjecture.

En effet, la compréhension de la démonstration théorique (table de vérité) du principe de la contraposée dépasse le niveau moyen des élèves et une approche intuitive peut semer le doute dans l'esprit des élèves si les exemples choisis ne sont pas tout à fait bien appropriés.

A ce sujet, D. LACOMBE met en garde les personnes qui affirment que, du "bon sens" et des exemples suffisent pour comprendre que la proposition " $\neg q \Rightarrow \neg p$ " est équivalente à la proposition " $p \Rightarrow q$ ". A cet effet, il cite les exemples logiquement corrects suivants, mais peu, pour ne pas dire, non porteurs de sens vis-à-vis de la règle de la contraposée.

Soient les propositions (" $p \Rightarrow q$ ") et leurs propositions équivalentes (" $\neg q \Rightarrow \neg p$ ").

"Si un homme est marié, alors il ne trompe pas sa femme."
et
"Si un homme trompe sa femme, alors il n'est pas marié."

Ainsi que:

"Si tu as faim, alors il y a de la viande dans le frigo."
et
"S'il n'y a pas de viande dans le frigo, alors tu n'as pas faim."

Ces deux exemples montrent la pertinence de la remarque de D. LACOMBE et attestent qu'il n'est pas aisé de faire admettre intuitivement la règle de la contraposée si on veut (peut) la démontrer. Il faut donc, ici aussi, rendre les élèves attentifs à ce que la logique (mathématique) a des règles internes qui ne prennent du sens que dans un contexte bien délimité.

Pour ce qui concerne la règle de la contraposée, nous croyons qu'il est souhaitable d'en retarder le plus possible l'approche et de ne l'aborder qu'avec des élèves susceptibles d'en faire la démonstration ou prêts à l'accepter sans preuve.

10.2.4. Les démonstrations par récurrence

La démonstration par récurrence est souvent utilisée pour démontrer qu'une proposition $p(n)$ dépendant d'une variable n ($n \in \mathbb{N}$) est vraie pour tout n supérieur ou égal à une valeur n_0 fixée.

Pour réaliser une démonstration par récurrence, on vérifie d'abord la véracité pour $p(n_0)$; ensuite, on montre que, pour tout entier " n ", l'implication " $p(n) \Rightarrow p(n + 1)$ " est vraie. On en conclut alors que la proposition est vraie pour tout entier supérieur ou égal à n_0 .

Remarques:

- montrer l'implication " $p(n) \Rightarrow p(n + 1)$ " revient, en supposant que la proposition $p(n)$ est vraie, à montrer que la proposition est vraie pour le successeur immédiat, c'est-à-dire que $p(n + 1)$ est vraie;
- on peut montrer que " $p(n) \Rightarrow p(n + 1)$ " et " $p(n - 1) \Rightarrow p(n)$ " sont des propositions équivalentes.

Exemple:

Pour montrer, par le procédé de récurrence, que la proposition $\forall n \in \mathbb{N}_0$:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

est une proposition vraie, on peut procéder comme suit: on vérifie que la proposition est vraie pour $n_0 = 1$ et que $p(n)$ vraie entraîne $p(n+1)$ vraie.

- ₁ La proposition est vraie pour $n_0 = 1$.

En effet, on a:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

$$1 = 1$$

- ₂ $p(n)$ vraie entraîne $p(n+1)$ vraie.

En effet, par hypothèse de récurrence, on a:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dès lors,

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow (1 + 2 + 3 + \dots + n) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$\Rightarrow 1 + 2 + 3 + \dots + n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$

$$\Rightarrow 1 + 2 + 3 + \dots + n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow 1 + 2 + 3 + \dots + n + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow 1 + 2 + 3 + \dots + n + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

D'où, $p(n)$ vraie entraîne $p(n+1)$ vraie.

- ₃ De •₁ et •₂, on en conclut que la proposition est vraie pour tout n appartenant à \mathbb{N}_0 .

10.2.5. Les démonstrations par "dessins" et "superpositions"

Bien que ne faisant pas partie des "outils" de la logique, les démonstrations par "dessins" et "superpositions" sont également utilisées avec des enfants pour justifier des propositions.

Exemple: Pour montrer par "dessins" que pour des réels positifs "a" et "b", la proposition " $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ " est une proposition vraie, les techniques du dessin, du puzzle et de la superposition peuvent être exploitées.

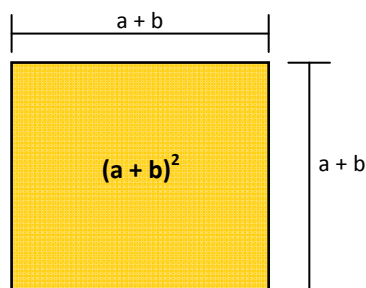


Figure 1

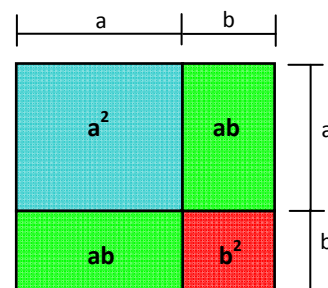


Figure 2

On part de deux carrés dont les mesures des longueurs des côtés valent "a + b" (figure 1 et figure 2).

Le deuxième carré (figure 2) est décomposé:

- d'une part, en deux carrés dont les mesures des longueurs valent respectivement "a" pour le premier et "b" pour le second,
- et d'autre part, en deux rectangles dont les mesures des longueurs des côtés valent "a" et "b".

Le recouvrement exact de la figure 1 avec les deux carrés et les deux rectangles obtenus par le découpage de la figure 2, montre que l'aire du carré de la figure 1 $((a + b)^2)$ est égale à la somme des aires des carrés (a^2 et b^2) et des aires des deux rectangles ($a \cdot b$).

$$\begin{aligned} \text{Dès lors, } (a + b)^2 &= a^2 + b^2 + ab + ab \\ &= a^2 + b^2 + 2ab \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

10.3. Démonstrations formelles et informelles

Si les premiers éléments et les premières règles de logique formelle provoquent des incompréhensions chez beaucoup d'élèves du secondaire, la notion de démonstration **formelle écrite** leur semble insurmontable dans l'approche actuelle.

En effet, deux difficultés apparaissent en même temps:

- celle d'**imaginer la succession des implications (des idées)** qui réalisent la démonstration;
- et celle de **mettre par écrit, cette succession d'idées dans les termes universels et rationnels**.

Pour atténuer ces obstacles, il semble donc opportun de scinder ces deux difficultés et de les étaler sur toute la formation obligatoire en ayant une conception plus génétique de la démonstration; en habituant les enfants du primaire à l'**argumentation** (adaptée à l'âge des apprenants); c'est-à-dire à la notion de démonstration **orale, informelle et collective**, par la manipulation de matériel concret.

11. Définition et propriétés

11.1. Définition et propriétés

Le mot définition vient du latin "definire" ainsi que les mots "fins", "finis", "limites", "frontières". Comme le rappelle F. BUEKENHOUT, *"Lorsqu'on définit quelque chose, on pose des 'frontières autour', on délimite ce que l'on veut signifier. Une bonne définition sert à expliquer ce que signifie un terme et met fin à toute confusion concernant sa signification"*

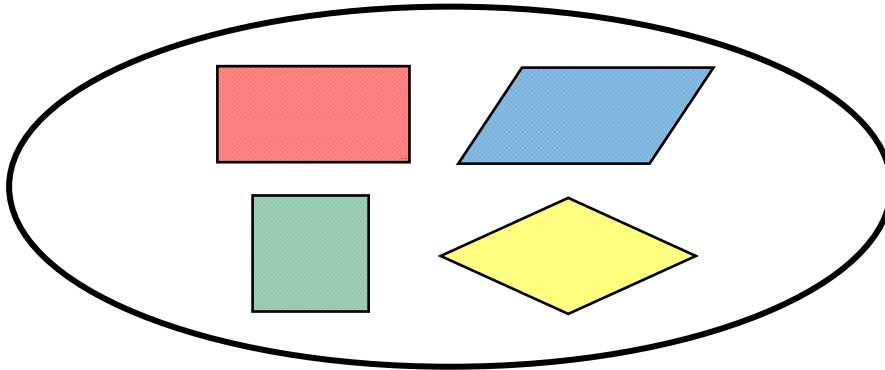
En mathématique, le mot "définition" ne se restreint pas au sens familier. En effet, si le sens usuel de "définition" correspond assez souvent à une description exhaustive des caractéristiques du concept, de l'objet ou de la famille d'objets³, en mathématique, une définition est composée de caractéristiques essentielles supposées connues. Ces caractéristiques déterminent univoquement le concept, l'objet ou la famille d'objets et sont

³ Pour une famille d'objets, les caractéristiques sont les qualités communes à tous les membres de la famille.

"la source" dont découlent (se déduisent) les autres caractéristiques (propriétés) du concept, de l'objet ou de la famille d'objets.

Ces caractéristiques essentielles sont choisies dans un souci **d'efficacité et d'économie**; c'est-à-dire que l'on essaie d'en choisir un nombre minimum⁴, bien que cela ne soit pas toujours indispensable. Les propriétés sont alors les caractéristiques qui se déduisent de la définition choisie.

Exemple: La famille des parallélogrammes.



Définition 1: Les parallélogrammes sont des quadrilatères ayant **deux paires de côtés parallèles**.

Des propriétés communes se déduisant de cette définition sont:

- P₁: Les parallélogrammes sont superposables à eux-mêmes par une rotation de 180°;
- P₂: Les angles opposés sont de même amplitude;
- P₃: Les diagonales se coupent en leur milieu;
- P₄: Les côtés opposés sont de même longueur;
- P₅: Les médianes se coupent en leur milieu.

Il peut exister des définitions alternatives d'un concept. Ainsi, par exemple, on pourrait choisir:

Définition 2: Les parallélogrammes sont des quadrilatères convexes dont **les diagonales se coupent en leur milieu**.

Des propriétés communes se déduisant de cette définition sont:

- P₁: Les parallélogrammes sont superposables à eux-mêmes par une rotation de 180°.
- P₂: Les côtés opposés sont de même longueur.
- P₃: Les angles opposés sont de même amplitude.
- P₄: Les parallélogrammes ont deux paires de côtés parallèles.
- P₅: Les médianes se coupent en leur milieu

On aurait également pu choisir:

Définition 3: Quadrilatères convexes superposables à eux-mêmes par une rotation de 180°.

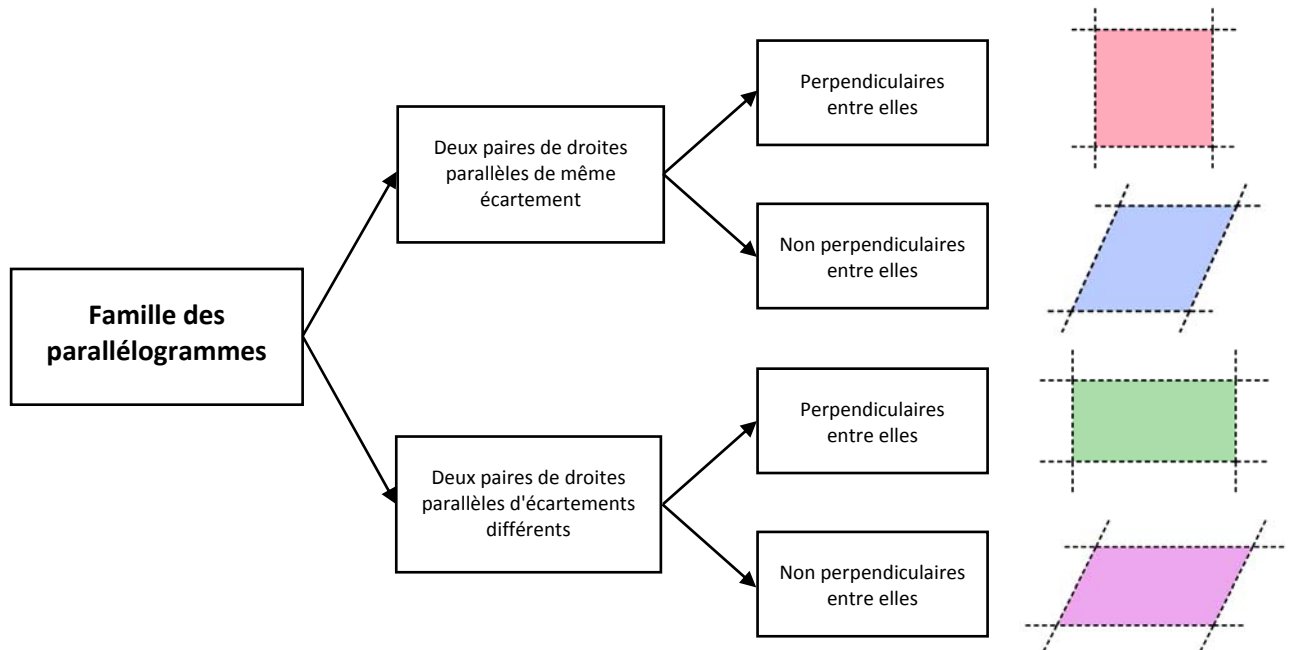
⁴ En d'autres termes, on essaie de rechercher les conditions minimales nécessaires et suffisantes qui déterminent l'objet ou la famille d'objets.

Définition 4: Quadrilatères dont les côtés opposés sont de même longueur.

Lors du choix d'une définition pour une famille de figures, il faut s'assurer que les conditions nécessaires et suffisantes sont satisfaites et qu'elles déterminent bien tous les types d'objets de la famille et rien que ceux-ci.

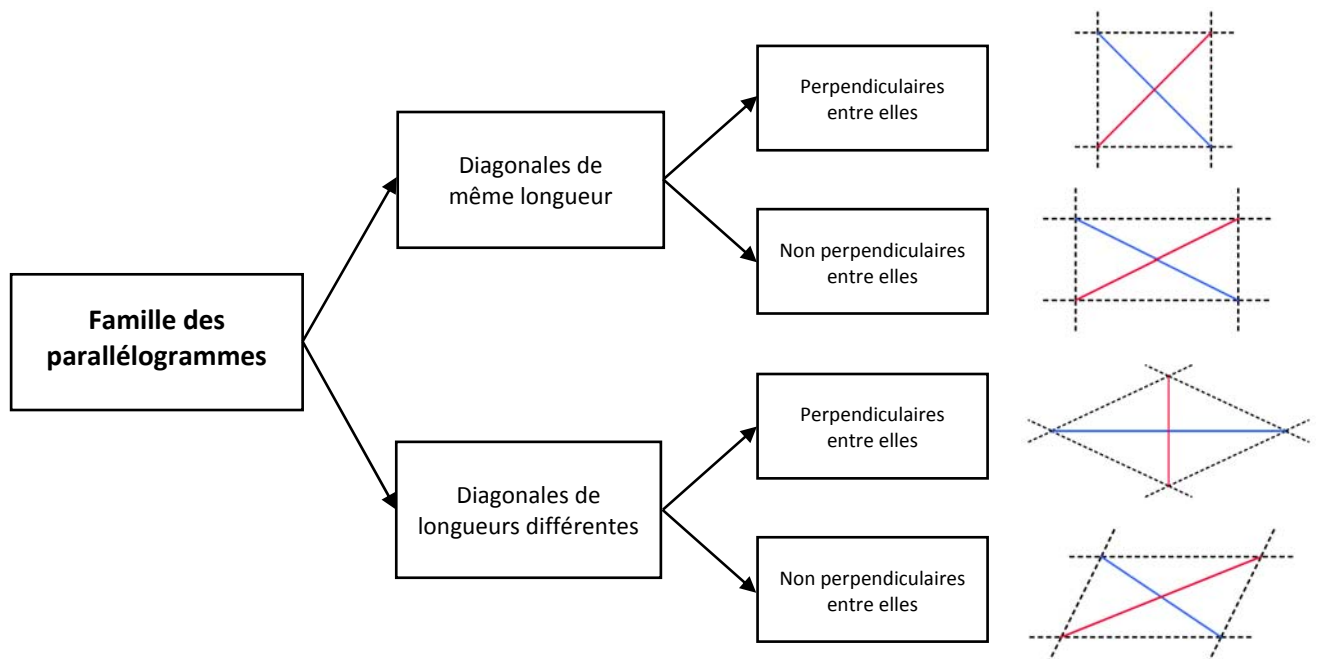
Ainsi, à partir de la définition: "**Quadrilatères ayant deux paires de côtés parallèles**", on obtient uniquement les 4 types de parallélogrammes suivants: les carrés, les rectangles quelconques, les losanges quelconques et les parallélogrammes quelconques.

En effet:



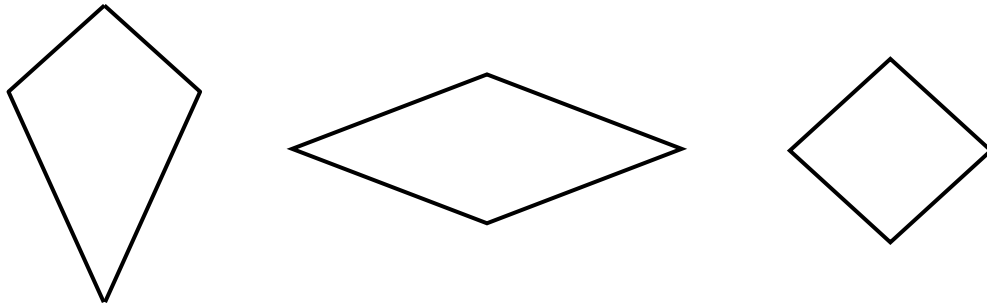
De même, à partir de la définition: "**Quadrilatères dont les diagonales se coupent en leur milieu**". On obtient aussi exclusivement les quatre types de parallélogrammes.

En effet:



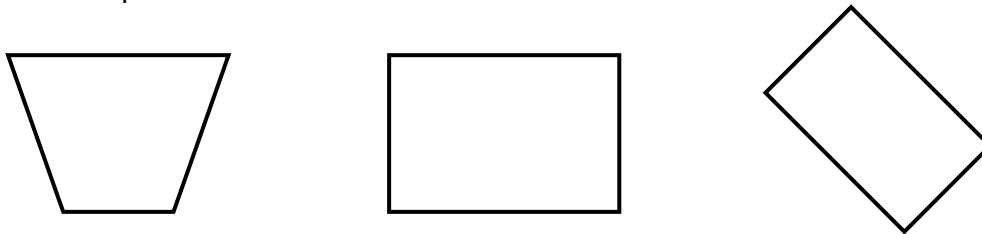
Exercices:

1. Soit la famille, ci-dessous, des quadrilatères convexes dont les différents représentants sont donnés à une similitude près.



- a) Donner trois définitions de cette famille.
b) Pour chacune d'elles, citer et démontrer les propriétés associées.

2. Même exercice pour la famille suivante:



11.2. Définition, propriétés et déduction

Le lien entre définition, propriétés et déduction semble rarement perçu par les élèves. Dès lors, ils ne peuvent accéder aux concepts de "théorie scientifique" et de "démarche scientifique" s'ils ne comprennent pas l'intérêt de réaliser des démonstrations, ni d'apprendre à les réaliser.

Si on veut préparer les élèves à ces notions-là, il semble dès lors fondamental, de leur faire comprendre que: "définir", en mathématique, ce n'est pas simplement décrire un objet ou une famille d'objets.

Définir, c'est:

- un "moyen" dans l'organisation déductive d'une matière;
- une façon indirecte (implicite) de connaître toutes les propriétés (d'un objet ou d'une famille d'objets) à partir de quelques caractéristiques essentielles données dans une définition.

Il semble donc important d'apprendre:

- à définir;
- à percevoir ce qu'est une définition.

Pour ce faire, lorsque l'on s'adresse à des débutants, les définitions ne doivent pas être imposées a priori mais découvertes au cours d'"analyses" de l'objet ou de la famille d'objets. Comme le précise d'ailleurs H. FREUDENTHAL: "*Comment pourrait-on définir un objet ou une famille d'objets avant de le ou les connaître?*"

11.3. Les différents types de définitions en mathématique

Deux types de définitions sont régulièrement rencontrés en mathématique:

- les **définitions descriptives** construites sur base de l'observation, de l'analyse d'un objet ou d'une famille d'objets;
- les **définitions créatives** qui permettent, sur base de caractéristiques données à priori, de construire, d'élaborer un objet ou une famille d'objets.

Les **définitions descriptives** apparaissent lorsqu'on analyse un objet ou une famille d'objets donnés et que l'on recherche des caractéristiques essentielles (C.N.S.) qui:

- déterminent univoquement l'objet ou la famille d'objets;
- permettent de déduire toutes les autres caractéristiques de la figure ou de la famille d'objets.

Ainsi, nous référant aux exercices de la page 24, une définition descriptive pourrait être donnée pour chacune des deux familles de figures:

Pour la première famille: "Quadrilatères convexes qui admettent au moins une diagonale comme axe de symétrie".

Pour la deuxième famille: "Quadrilatères convexes qui admettent au moins une médiane comme axe de symétrie."

Les **définitions créatives** apparaissent lorsqu'on impose à priori, des caractéristiques et que l'on recherche tous les objets possédant ces caractéristiques.

Exemple: Lorsque l'on recherche "*tous les quadrilatères ayant 4 angles droits*", on travaille à partir d'une définition créative.

11.4. Quelle définition, à quel âge?

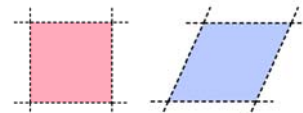
L'initiation consciente aux définitions descriptives et créatives commence vers 12 ans (fin de sixième année primaire début du secondaire):

- pour les définitions descriptives, sous la forme d'un jeu ("Le jeu du téléphone"⁵).
- pour les définitions créatives, repérage dans un capital de figures.

A cet âge, les définitions ainsi construites sont basées sur une analyse **visuelle** des objets ou familles d'objets.

⁵ Jeu où il faut, pour reconstituer et reconnaître une famille d'objets déterminés, transmettre oralement un minimum de caractéristiques essentielles. Dans ce jeu, le nombre de caractéristiques minimum se justifie par le coût élevé des communications téléphoniques! De plus, la règle du jeu: "*ce qui n'est pas imposé peut varier*", permet d'obtenir tous les types de figures.

A titre d'exemple, pour découvrir une définition de la famille des losanges:



On remarque que la caractéristique "*Quadrilatères ayant 4 côtés de même longueur*" et la règle "*ce qui n'est pas imposé et fixé peut varier*" permet d'obtenir les losanges quelconques et les carrés (et seulement ceux-là). En effet, si aucune contrainte n'apparaît à propos des angles, c'est que ceux-ci peuvent prendre toutes les valeurs possibles, y compris 90°. Le jeu se termine en faisant observer que les autres caractéristiques (parallélisme des côtés opposés, angles opposés de même amplitude, diagonales perpendiculaires...) sont reçues (se déduisent) "gratuitement" à partir de la caractéristique essentielle de départ, c'est-à-dire: "*quatre côtés de même longueur*". Oralement, on fait encore observer qu'il faudrait en faire la preuve, mais que cela est du ressort de l'enseignement secondaire.

A titre d'exemples: **Pour les définitions descriptives:**

- les parallélogrammes deviennent des quadrilatères dont les côtés opposés sont parallèles;
- les losanges sont les quadrilatères dont les côtés opposés sont de même longueur;

Pour les définitions créatives:

- la recherche des quadrilatères ayant quatre côtés de même longueur donne les losanges.

Dans l'enseignement secondaire apparaissent deux évolutions importantes:

- la recherche des définitions descriptives tend à disparaître de l'activité mathématique;
- les définitions créatives sont souvent choisies dans le but de faciliter soit le "jeu déductif" (les définitions emboîtées), soit les démonstrations des propriétés associées aux objets ou familles d'objets.

Ainsi les parallélogrammes deviennent, pour certains enseignants, des quadrilatères convexes qui possèdent un centre de symétrie; et les losanges sont des parallélogrammes qui possèdent deux côtés adjacents de même longueur.

Si le choix de ces définitions théoriques est facilement compris par des adultes (mathématiciens), il n'en est pas de même pour les élèves du début du secondaire (s'il n'y a pas eu d'initiations préalables)!

En effet, pour s'approprier ces définitions théoriques, les élèves doivent, sur base de leurs acquis antérieurs:

- a) comprendre le sens et le rôle des définitions en mathématique;
- b) accepter qu'il peut exister plusieurs définitions différentes pour un objet ou une famille d'objets;
- c) posséder le concept de conséquence (inférence) sous-jacent à la compréhension de ce type de définition⁶.

Vu le niveau de maturité exigé dès le début du secondaire pour comprendre ces changements de définitions, les trois contraintes paraissent quasi insurmontables à beaucoup d'adolescents.

C'est pourquoi, pour éviter de créer la discontinuité dans les choix des définitions entre le primaire et le secondaire, il est souhaitable de choisir, à ces deux niveaux, des définitions visuelles.

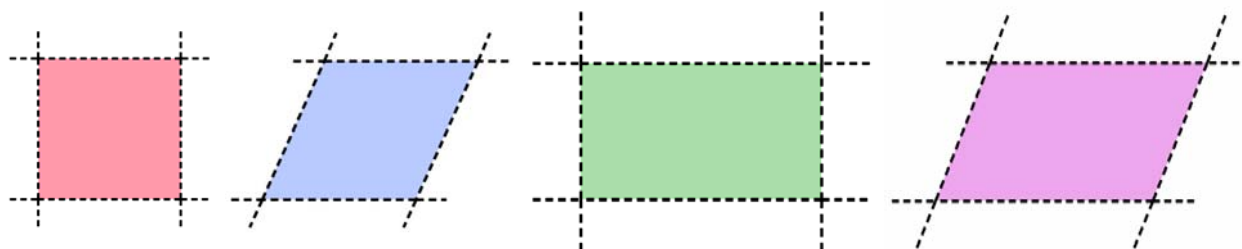
Exemples de proposition d'étude des familles de figures, dans l'enseignement secondaire:

1. Rechercher une définition "visuelle", c'est-à-dire une définition tirée d'observations des constituants "premiers" des figures (longueur des côtés, amplitude des angles, parallélisme des côtés opposés);

⁶ Pour les parallélogrammes, le fait de posséder, par définition, un centre de symétrie a comme conséquence que les quadrilatères convexes considérés sont superposables à eux-mêmes par une symétrie centrale (une rotation de 180°). Comme les symétries centrales appliquent une droite sur une droite parallèle, ces quadrilatères convexes ont donc les côtés opposés parallèles. Ce petit raisonnement implicite montre ce que les élèves doivent connaître pour passer des définitions descriptives visuelles à la définition créative théorique de l'enseignement secondaire et tous les obstacles à surmonter.

2. Ensuite, découvrir (via des transparents et comme première propriété) les isométries qui superposent les figures à elles mêmes (les automorphismes). En fonction du niveau des élèves, cette première propriété est soit démontrée, soit acceptée.
3. Rechercher et démontrer, en utilisant les invariants associés aux transformations qui superposent les figures à elles-mêmes, les autres propriétés de la famille des figures étudiées.

A titre d'exemple pour la famille des parallélogrammes:



1. On définit⁷ les parallélogrammes comme étant des quadrilatères qui possèdent les côtés opposés parallèles;
2. On découvre, comme première propriété, que tous les parallélogrammes sont superposables à eux-mêmes par une rotation de 180° et par l'identité;
3. On démontre les propriétés classiques des parallélogrammes à partir des propriétés (invariants) des rotations de 180° ;
4. La recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour obtenir la famille des quadrilatères qui possèdent deux paires de côtés parallèles termine cette approche et permet, en particulier, de montrer que les quadrilatères convexes qui admettent un centre de symétrie sont les parallélogrammes de départ.

12. Théorie mathématique - Théorie déductive

Toute théorie mathématique se construit grâce à la méthode déductive s'appuyant sur des éléments premiers et des axiomes.

Les éléments premiers sont des termes qui paraissent immédiatement compréhensibles et qui sont acceptés sans définition.

Les axiomes, en mathématique classique, sont des propositions non démontrées et supposées acceptables pour tous parce que considérées comme évidentes.

La méthode déductive consiste, à partir d'objets définis par les éléments premiers et certaines propositions appelées axiomes et supposées vraies, à déduire d'autres propositions par un enchaînement rigoureux, c'est-à-dire gouverné selon les règles de la logique formelle.

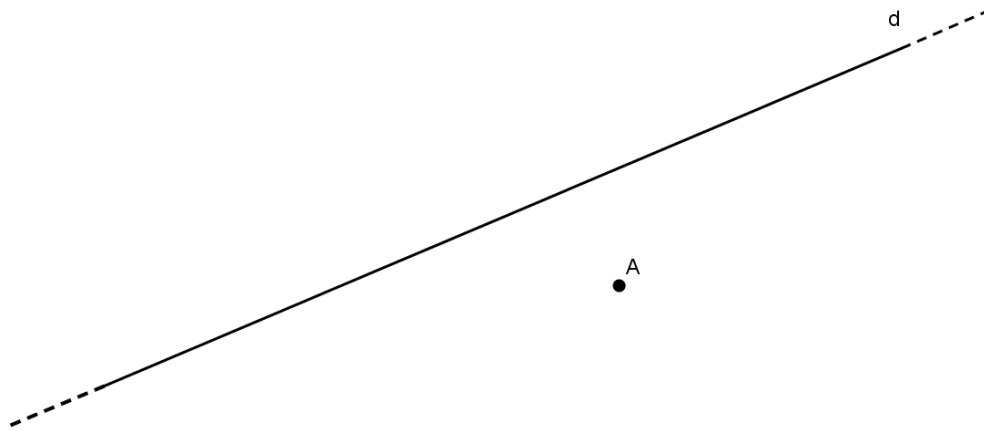
Exemple en géométrie plane: **Éléments premiers:** Les points du plan.

⁷ On choisit soit une définition créative, soit une définition descriptive selon le type d'approche que l'on veut privilégier, au départ.

Axiomes:

A₁: Le plan est un ensemble infini de points.

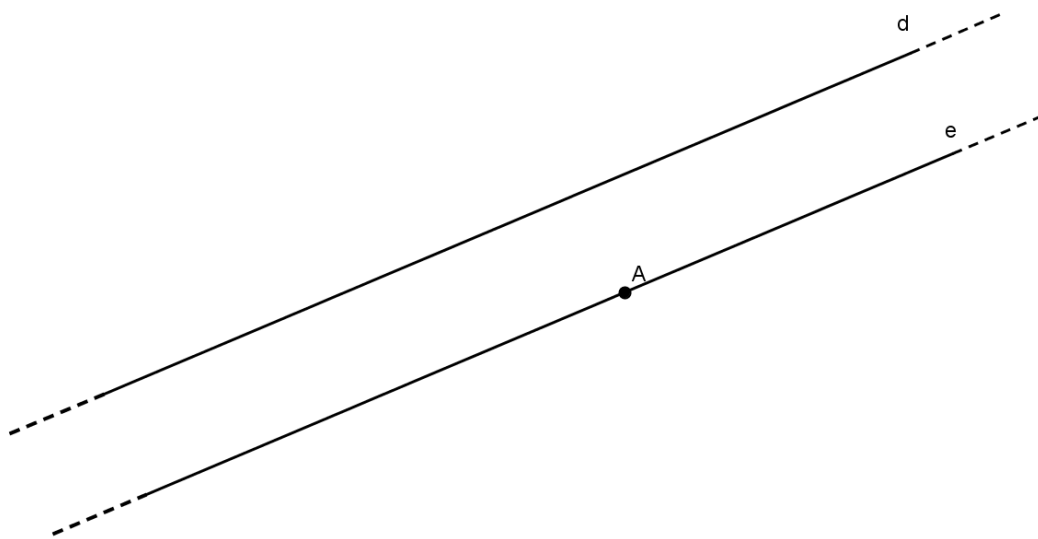
A₂: Toute droite est une partie propre⁸ et infinie du plan



A₃: Toute paire de points est incluse à une et une seule droite.



A₄: Par tout point, il passe une et une seule droite (e) parallèle à la droite donnée (d).



Exemple de proposition déduite de ces axiomes: "*Dans tout plan, il y a une infinité de droites*".

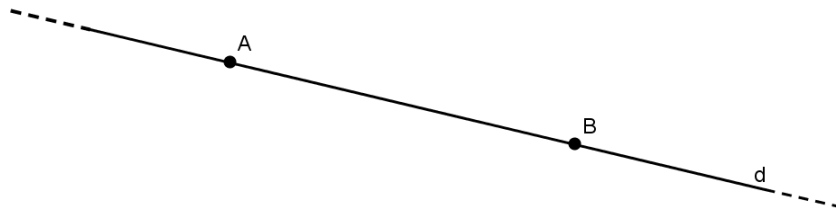
Démonstration:

A₁ \Rightarrow Dans tout plan, il existe au moins deux points distincts.

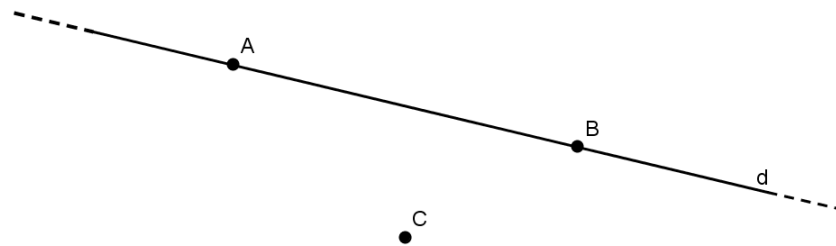


⁸ Propre: signifie qu'il existe un point "a" du plan qui n'appartient pas à "A"

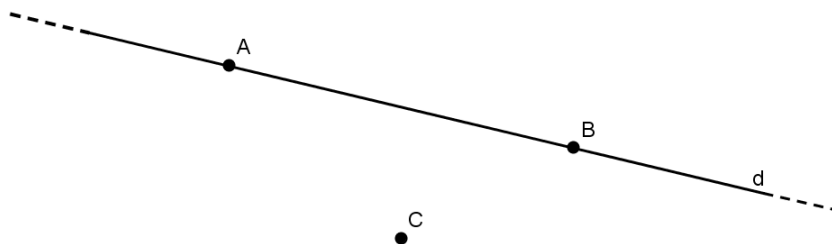
$A_3 \Rightarrow \exists$ une droite qui passe par les points A et B.



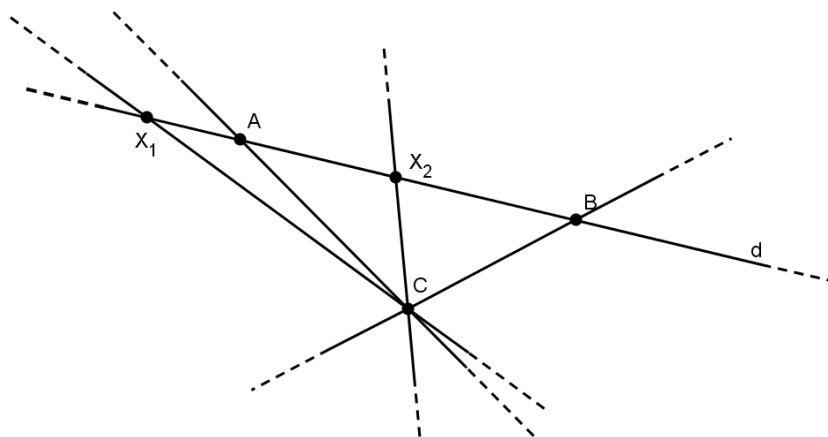
$A_2 \Rightarrow$ Il existe un point "C" du plan qui n'appartient pas à la droite d.



$A_2 \Rightarrow$ La droite d contient une infinité de points.



$A_3 \Rightarrow$ Tout point "X" de d et le point "C" déterminent une droite "CX".



Comme la droite A contient une infinité de points "X", on pourra tracer une infinité de droites "CX" dans le plan.

Remarque: Bien que le concept de théorie axiomatique rigoureuse soit **non accessible** aux élèves de l'école primaire et aux élèves des premières années du secondaire, il est cependant souhaitable d'ordonner les matières (adaptées à leur âge) qui leur sont

présentées, de telle manière que les propositions s'enchaînent et s'appuient sur celles rencontrées précédemment, et de mettre en évidence, ne fût-ce ce qu'oralement, les liens de dépendance entre les concepts développés.

13. L'activité mathématique

Décrire l'activité mathématique en quelques lignes semble fort hasardeux pour ne pas dire utopique; l'idéal serait sans doute de développer un nombre important d'exemples plus ou moins simples pour saisir le sens du travail en mathématique.

B. GOLDFARB et J. THEPOT précisent que le travail mathématique se décompose en deux phases distinctes, complémentaires qui se succèdent continuellement: une phase inductive et une phase déductive.

Au cours de la phase déductive, le mathématicien donne libre cours à son imagination, observe, manipule, compare, construit, dessine afin d'émettre une ou des proposition(s) pour mettre ensuite en doute celle(s)-ci. Dans la phase déductive, il justifie la véracité éventuelle des propositions émises et les enchaîne d'une manière rigoureuse à partir de prémisses soigneusement formulées.

Comme le précise J. DIEUDONNE: *"Le terrain que l'intuition a conquis ainsi d'un seul bond, il reste ensuite à l'organiser, à bâtir maillon par maillon, la chaîne de propositions qui aboutit au résultat recherché."*

Francis BUEKENHOUT propose, sur base d'un article de Guy HIRSCH, une autre définition de l'activité mathématique: *"La mathématique consiste en un traitement, par le cerveau, d'informations qui peuvent provenir de l'extérieur, c'est-à-dire faire progresser les questions posées en apportant une solution ou en les remplaçant par d'autres questions jugées plus satisfaisantes; ce traitement se fait sans apport extérieur d'informations, c'est-à-dire, avec les seules ressources du cerveau: imagination, raisonnement, mémoire, observation, sens critique...; ce traitement est abstrait et général en ce sens qu'il cherche à dégager des structures et des méthodes susceptibles de s'appliquer à des problèmes quelque peu différents de celui qui a été à l'origine du travail accompli."*

Ces différentes citations mettent en évidence la richesse de l'activité mathématique qui exige à la fois le recours au raisonnement logique, mais également à l'imagination. Comme le souligne G. POLYA, la première exigence, celle de rigueur et de capacités logiques, s'exerce principalement dans la phase déductive. Mais il met aussi en évidence l'importance du raisonnement plausible comme moteur de la découverte de propositions. C'est ici que s'exerce principalement toute la puissance des facultés de création et d'imagination. Dans son livre: *"Les mathématiques et le raisonnement plausible"*, il écrit: *"Nous assurons la validité de nos connaissances mathématiques par un raisonnement démonstratif, tandis que nous justifions nos hypothèses par des raisonnements plausibles. Une preuve mathématique est un exemple de raisonnement démonstratif, mais la preuve inductive du physicien, la preuve de l'homme de loi, la preuve de l'historien appartiennent au raisonnement plausible."*

Le raisonnement démonstratif est sûr, à l'abri des controverses et définitif.

Le raisonnement plausible est hasardeux, provisoire et peut être controversé.

Le raisonnement démonstratif a des règles rigides, codifiées et clarifiées: la logique formelle ou démonstrative qui est la théorie du raisonnement démonstratif. Les règles du raisonnement plausible sont mouvantes et il n'existe aucune théorie qu'on puisse accaparer.

On considère la mathématique comme une science démonstrative, mais ce n'est là qu'un de ses aspects.

Les mathématiques achevées, présentées sous forme définitive, paraissent purement démonstratives et ne comportent que des preuves. Mais les mathématiques en gestation ressemblent à toute autre connaissance humaine au même stade de développement. Le résultat du travail créateur du mathématicien est un raisonnement démonstratif, une preuve; mais la preuve est découverte par le raisonnement plausible, elle est d'abord devinée. Il faut certainement apprendre à démontrer, mais aussi apprendre à deviner. Je ne pense pas qu'il existe une méthode pour apprendre à deviner. L'utilisation efficace du raisonnement plausible est affaire de pratique, on l'apprend par imitation et par habitude.

L'étudiant moyen doit aussi goûter au raisonnement démonstratif; sans doute n'aura-t-il que rarement l'occasion de s'en servir directement, mais il doit acquérir un élément de comparaison qui puisse lui permettre de juger les prétendues preuves de toutes sortes qui lui sont offertes dans le monde où nous vivons actuellement. Par contre, dans tout ce qu'il entreprendra, il aura besoin du raisonnement plausible.

Bien entendu, enseigner la démonstration aux élèves des classes de mathématiques est, sans aucun doute, une chose désirable. Mais ne leur apprendre que des démonstrations pourrait être moins désirable. Si l'on cache systématiquement aux élèves que les théorèmes démontrés aujourd'hui furent devinés autrefois et si on leur cache aussi les raisons inductives ou analogiques qui peuvent provoquer la découverte, on ne leur rend pas le meilleur service, on ne les éclaire pas suffisamment.

p	q	p et q	p ou q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg(p \text{ et } q)$	$\neg p \text{ ou } \neg q$	$\neg(p \text{ ou } q)$	$\neg p \text{ et } \neg q$

$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \text{ et } (q \Rightarrow p)$	$\neg p \Rightarrow \neg q$	$\neg(p \Rightarrow q)$	$p \text{ et } \neg q$

