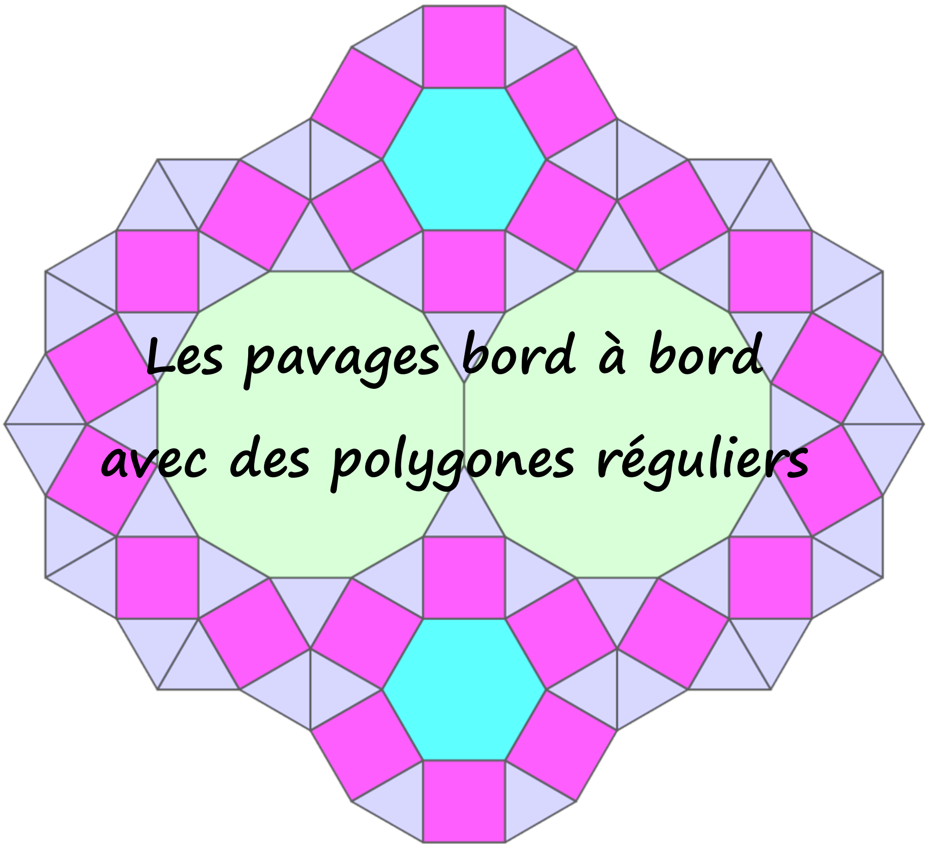
Cellule de Géométrie

Mathématiques élémentaires



Les pavages bord à bord avec des polygones réguliers

Cellule de Géométrie – Catégorie pédagogique de la HEH

DEMAL Michel
demal.michel@skynet.be

DRAMAIX Jérémy
jeremy.dramaix@gmail.com

HIGNY Samuel
higny_samuel@hotmail.com

LAFOT Cindy
lafot.cindy@hotmail.com

MALAGUARNERA Angelo
angelo.malaguarnera@gmail.com

POPELER Danielle
d.popeler@skynet.be

Avec la collaboration de

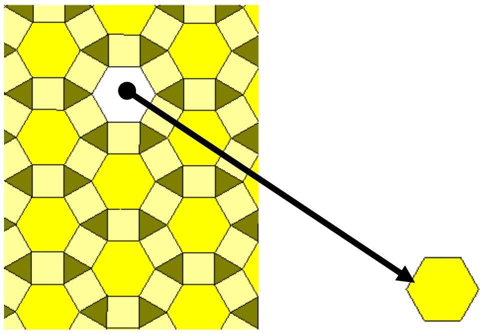
PILAETE C. - VAN CAYSEELE T.

Les pavages du plan avec des polygones réguliers

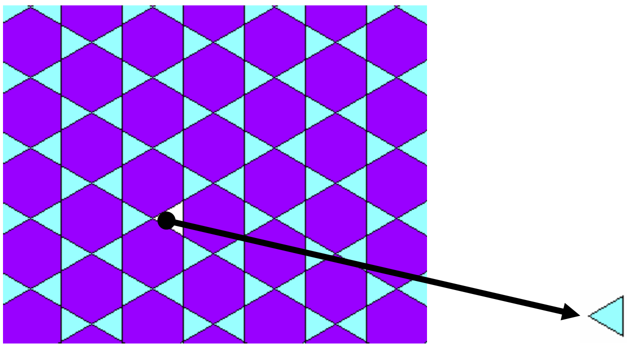
Les pavages du plan avec des polygones réguliers.

1. Pavage.

Un pavage du plan euclidien est une famille d'ensembles, appelés pavés, qui couvrent le plan sans trou ni chevauchement.



Un pavé

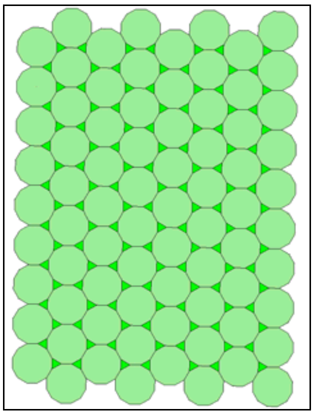


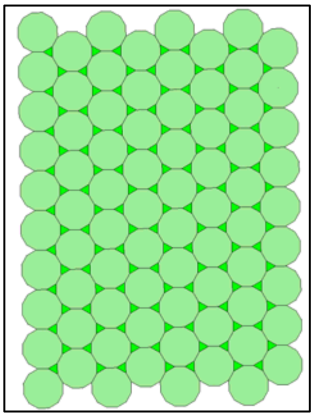
Un pavé

2. Egalité de deux pavages.

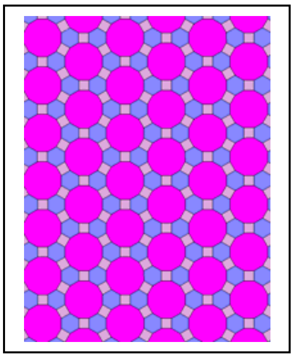
Deux pavages sont « égaux » si l'un est l'image de l'autre par une similitude.

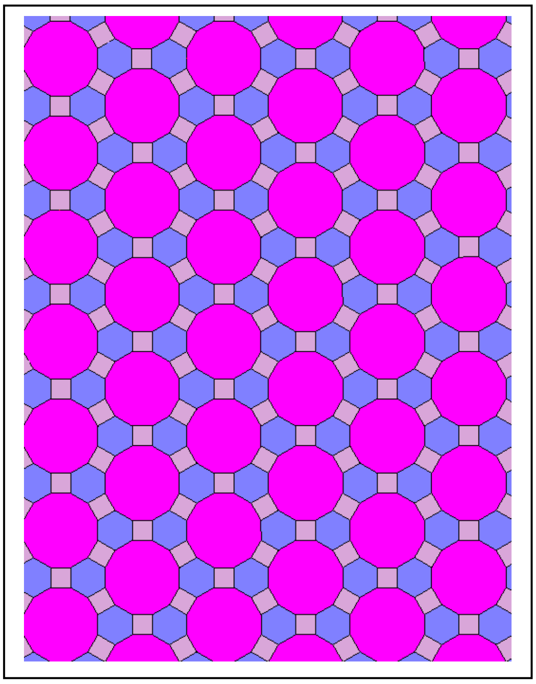
Exemple 1: Pavages égaux isométriques





Exemple 2: Pavages égaux homothétiques

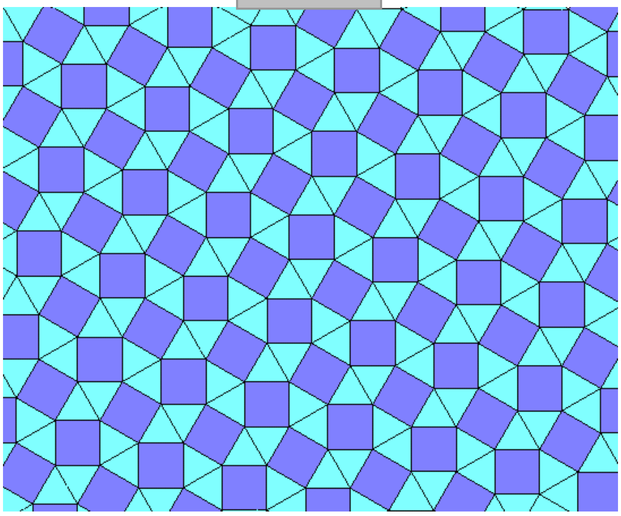




Remarque : Deux pavages constitués des mêmes types de pavés ne sont pas nécessairement égaux.

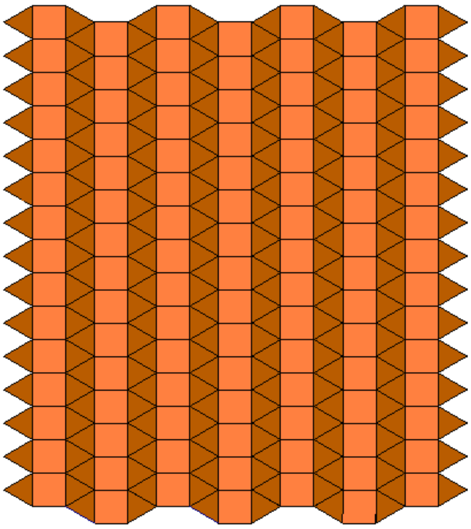
Les deux pavages ci-joint sont inégaux bien que constitués de trois triangles équilatéraux et de deux carrés en chaque sommet.

$3^2\ 4\ 3\ 4$



En chacun des sommets, il y a successivement deux triangles équilatéraux, un carré, un triangle équilatéral et un carré.

$3^3\ 4^2$

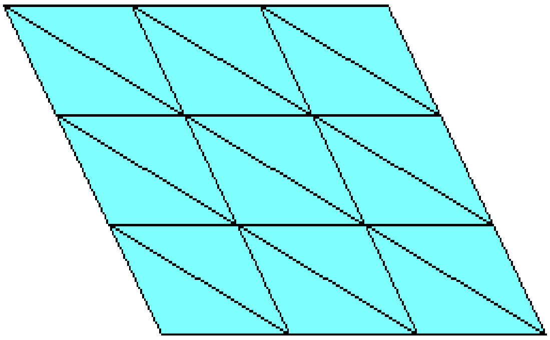


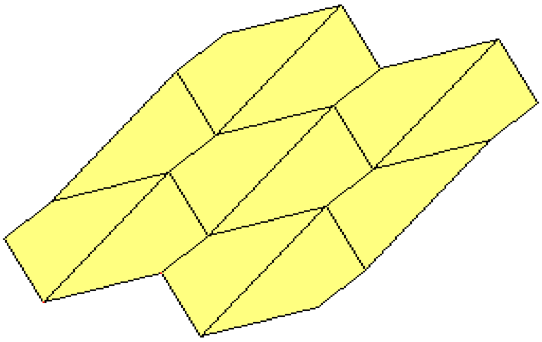
En chacun des sommets, il y a successivement trois triangles équilatéraux et deux carrés.

3. Pavages à pavés isométriques.

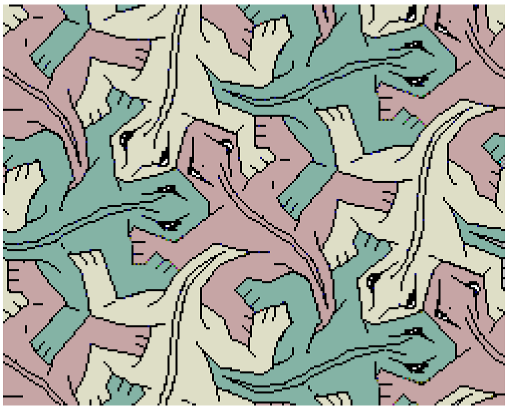
Les pavages à pavés isométriques sont des pavages réalisés uniquement à l'aide de pavés isométriques.

Exemples :





Remarque : On peut montrer qu'il est possible de réaliser des pavages à pavés isométriques avec n'importe quel type de triangles, n'importe quel type de quadrilatères convexes, avec certains pentagones et aussi avec des lezards(1), des kangourous, …



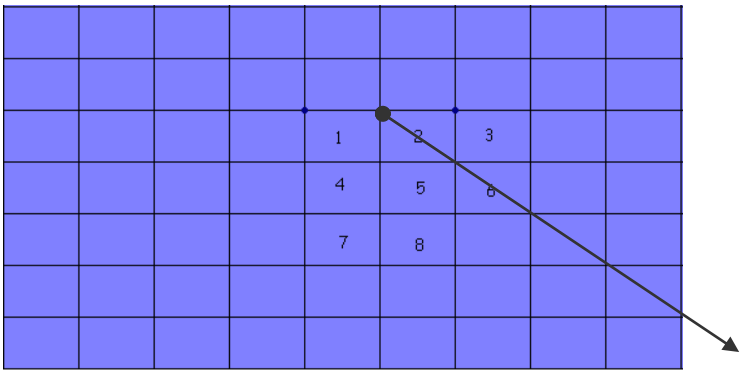
(1) voir à ce sujet certains dessins du peintre hollandais M.C. Escher.

4. Pavages bord à bord.

4. 1. Définition.

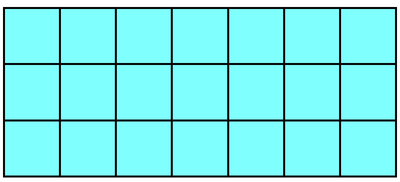
Un pavage bord à bord est un pavage pour lequel quel que soit le couple de pavés ceux-ci doivent :

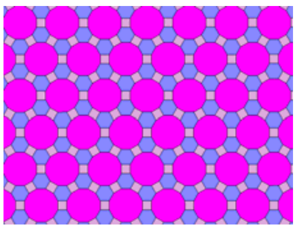
- soit être disjoints
- soit avoir exactement un point en commun
- soit avoir un côté en commun



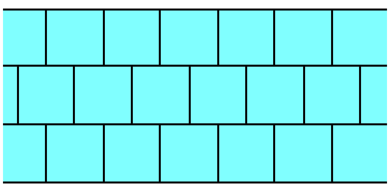
Dans l'exemple de pavages bord à bord ci-dessus, les pavés 1 et 6 sont disjoints. Les pavés 1 et 5 ont exactement un point en commun. Tandis que les pavés 1 et 2 ont un côté commun.

4. 2. Exemples.





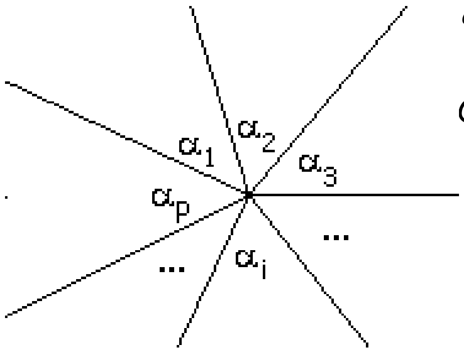
Contre exemple.



4. 3. Propriété.

Somme des angles arrivant en un sommet d'un pavage bord à bord.

En tout sommet d'un pavage bord à bord, il est nécessaire que la somme des angles arrivant en ce sommet soit égale à 360° (2Π)



$$\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 + \ldots + \hat{\alpha}_i + \ldots + \hat{\alpha}_p = 360^\circ$$

Où p représente le nombre de pavés

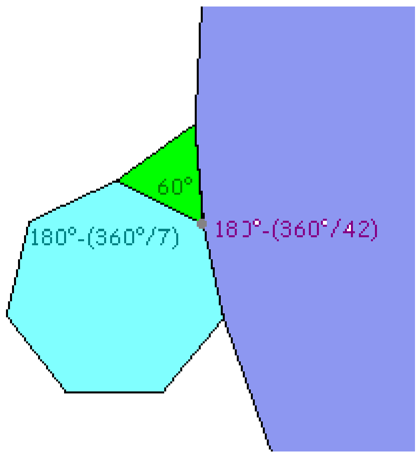
$$\Leftrightarrow$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{p} \hat{\alpha}_i = 360^\circ}$$

Remarque : Il s'agit d'une condition nécessaire mais pas suffisante.

Bien que l'on puisse regrouper en un sommet sans trou ni chevauchement un triangle équilatéral, un 7-gone et un 42-gone réguliers, nous montrerons qu'il n'est pas possible de compléter ces trois polygones pour réaliser un pavage bord à bord.

$$\left((60^\circ) + (180^\circ - \frac{360^\circ}{7}) + (180^\circ - \frac{360^\circ}{42}) = 360^\circ \right)$$

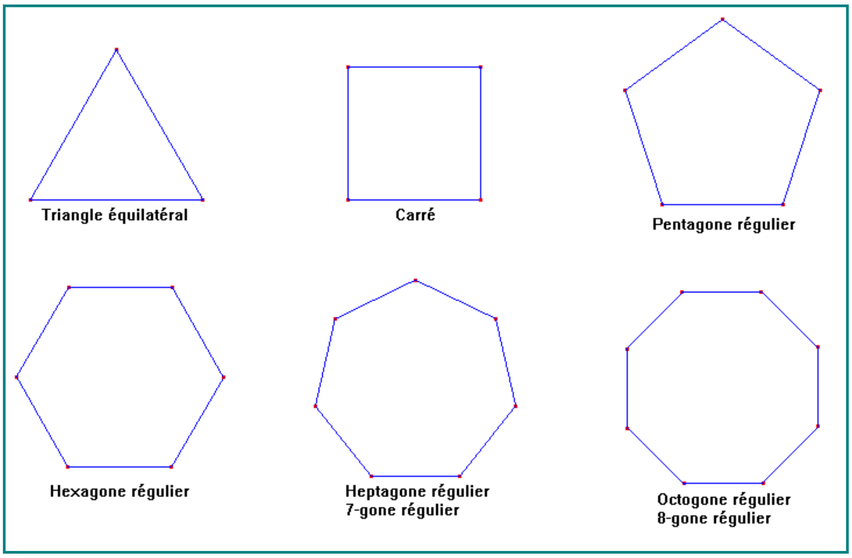


5. Les pavages bord à bord avec des polygones (convexes) réguliers.

5. 1. Rappels à propos des polygones réguliers.

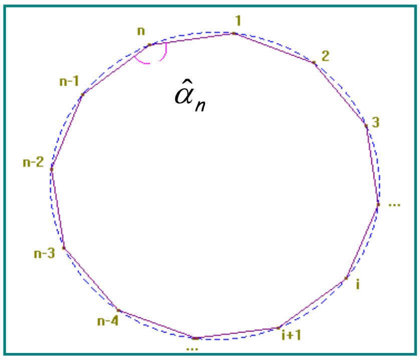
- Un polygone régulier est un polygone dont tous les côtés et tous les angles sont isométriques.
- Il existe une infinité de polygones réguliers.

Exemples de polygones réguliers.



- L'amplitude de l'angle entre deux côtés d'un polygone convexe régulier est fonction du nombre de côtés (n) du polygone et vaut :

$$\hat{a}_n = 180° - \frac{360°}{n} \quad \text{où } n \geq 3$$



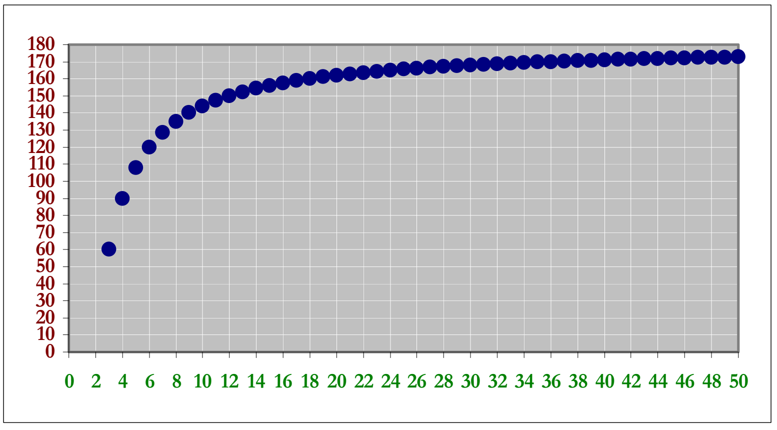
➢ La fonction amplitude « $180° - \dfrac{360°}{n}$ » est une fonction strictement croissante de n.

n	$180° - \dfrac{360°}{n}$
3	60°
4	90°
5	108°
6	120°
7	128,575714°
8	135°
9	140°
10	144°
…	…
50	172,8°
100	176,4°
…	…
360	179°
…	…
n	$180° - \dfrac{360°}{n}$
…	…
∞	180°

$$\text{Limite}_{n\to\infty} \quad 180° - \frac{360°}{n} = 180°$$

➢ $\hat{\alpha}_n$ est une fonction discrète.

Nuage de points de la fonction discrète $\hat{\alpha}_n$.

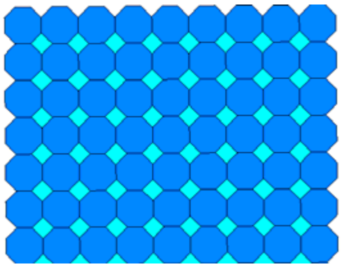
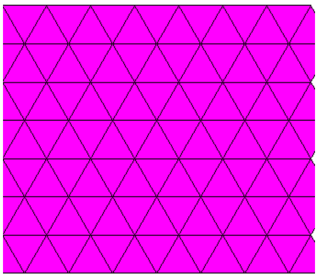
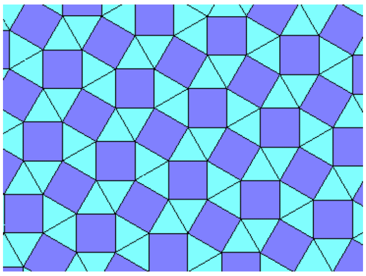


5.2 Les pavages bord à bord avec des polygones réguliers.

Introduction.

Il existe des pavages bord à bord avec des polygones réguliers isométriques ou non isométriques.

Exemples.

5.2.1. Les pavages bord à bord avec des polygones réguliers isométriques.

Détermination des différents polygones réguliers isométriques qui réalisent des pavages bord à bord.

- Approche géométrique.

a) Conditions en chaque sommet d'un pavage bord à bord avec des polygones réguliers isométriques.

- *En chaque sommet d'un pavage bord à bord, la somme des amplitudes des angles est égale à 360°* (condition nécessaire).

$$\sum_{i=1}^{p} \hat{\alpha}_{n_i} = 360^\circ \qquad \text{où } n_i \geq 3 \text{ et } p \in \mathbb{N}$$

- *En chaque sommet, il arrive au minimum trois pavés.*

Démonstration par l'absurde :

- Si on considère qu'il existe deux pavés en un sommet alors l'amplitude de chacun de ces angles serait égale à 180° ($\hat{\alpha}_{n_1} = \hat{\alpha}_{n_2} = 180^\circ$) .

Ceci est impossible car dans tout polygone convexe les angles intérieurs ont une amplitude inférieure à 180°.

◆ Si on considère qu'il existe un seul pavé en un sommet alors l'amplitude de cet angle serait égale à 360°($\hat{\alpha}_n = 360°$). Ce qui est impossible car dans tout polygone convexe les angles intérieurs ont une amplitude inférieure à 180°.

◆ En conclusion, le nombre de pavés arrivant en un sommet doit être supérieur ou égal à trois ($p \geq 3$).

- *En chaque sommet, il arrive au maximum six pavés* ($p \leq 6$).

Pour obtenir en un sommet, le plus grand nombre de pavés isométriques, on assemble les polygones réguliers dont l'amplitude est la plus petite et tel que la somme des amplitudes des angles arrivant en ce sommet soit égale à 360°.

Le triangle équilatéral a l'amplitude la plus petite (60°) et il est possible d'en assembler six en un sommet (6x60°=360°).

Dès lors le plus grand nombre de polygones réguliers en un sommet est six.

- *Des deux propositions précédentes, le nombre de pavés isométriques en un sommet varie de trois à six.*

- *En un sommet d'un pavage bord à bord avec des polygones réguliers isométriques, il ne peut arriver que des triangles équilatéraux, des carrés et des hexagones réguliers.*

Justification :

◆ Les pavés qui arrivent en un sommet sont isométriques dès lors, l'amplitude des angles des polygones réguliers doit être un diviseur entier de 360°.

◆ L'amplitude des angles des polygones réguliers est une fonction strictement croissante du nombre (n) de côtés.

- La détermination des solutions admissibles peut se faire en recherchant les polygones réguliers dont l'amplitude des angles intérieurs est un diviseur entier de 360°.

En un sommet, on peut assembler :

- six triangles équilatéraux ($\frac{360^\circ}{60^\circ} = 6$)
- quatre carrés ($\frac{360^\circ}{90^\circ} = 4$)
- trois hexagones réguliers ($\frac{360^\circ}{120^\circ} = 3$).

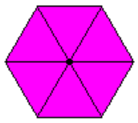
- Tous les autres polygones réguliers sont à rejeter. En effet :
  - dans le cas du pentagone régulier, comme l'amplitude de l'angle intérieur n'est pas un diviseur entier de 360° ($\frac{360^\circ}{108^\circ} = 3{,}33\ldots$), il est impossible d'en assembler un nombre entier en un sommet.
  - dans les cas des polygones réguliers à plus de six côtés, comme l'amplitude des angles intérieurs est strictement supérieure à 120°, il sera impossible d'en assembler au minimum trois isométriques en un sommet tout en respectant la contrainte « *la somme des amplitudes des angles arrivant en un sommet est égale à 360°* »

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall n > 6 \quad : \quad \hat{\alpha}_n > 120^\circ \\ 3 \times \hat{\alpha}_n > 360^\circ \end{array}}$$

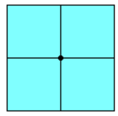
Conclusion :

En un sommet, pour recouvrir le plan sans trou ni chevauchement avec des polygones réguliers isométriques on peut assembler:

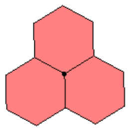
- six triangles équilatéraux



- quatre carrés

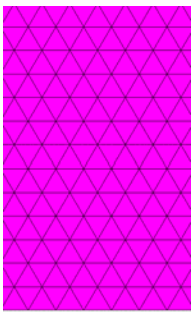


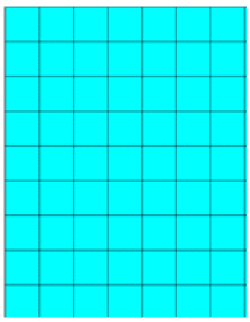
- trois hexagones réguliers

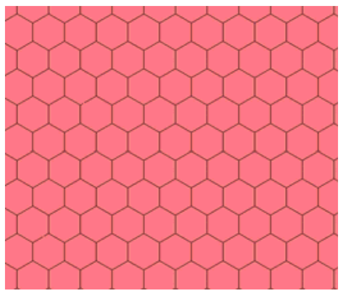


b) Types de pavages bord à bord avec des polygones réguliers isométriques.

A partir des trois solutions précédentes, on peut réaliser les trois pavages bord à bord à faces régulières isométriques suivants.







Remarque : Képler considérait ces trois pavages « réguliers » comme des polyèdres « plans » infinis dont toutes les faces sont « finies ».

Approche algébrique.

a) Conditions en chaque sommet d'un pavage bord à bord avec des polygones réguliers isométriques.

- *En chaque sommet d'un pavage bord à bord, la somme des amplitudes des angles est égale à 360°.*

$$\sum_{i=1}^{p} \hat{\alpha}_{n_i} = 360° \qquad \text{où } n_i \geq 3 \text{ et } p \in \mathbb{N} \qquad (1)$$

Comme en chaque sommet, tous les pavés sont des polygones réguliers isométriques, la condition nécessaire (1) devient :

$$\sum_{i=1}^{p} \hat{\alpha}_{n_i} = 360° \qquad \text{avec } n_i \geq 3 \text{ et } p \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{p} \left(180° - \frac{360°}{n_i}\right) = 360°$$

Car l'angle entre deux côtés d'un polygone régulier à n_i côtés vaut $180° - \frac{360°}{n_i}$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left(180° - \frac{360°}{n_1}\right) + \left(180° - \frac{360°}{n_2}\right) + \ldots + \left(180° - \frac{360°}{n_i}\right) + \ldots + \left(180° - \frac{360°}{n_p}\right) = 360°$$

On divise par 180° dans les deux membres.

$$\Leftrightarrow$$

$$\left(1 - \frac{2}{n_1}\right) + \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) + \ldots + \left(1 - \frac{2}{n_i}\right) + \ldots + \left(1 - \frac{2}{n_p}\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{p} \left(1 - \frac{2}{n_i}\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{p} \left(1 - \frac{2}{n}\right) = 2$$

Comme les polygones sont isométriques, on a $n_1 = n_2 = \ldots = n_i = \ldots = n_p = n$

$$\Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots + \left(1 - \frac{2}{n}\right)}_{p \text{ termes}} = 2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$p\left(1-\frac{2}{n}\right)=2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left(1-\frac{2}{n}\right)=\frac{2}{p} \qquad \text{avec } n_i \geq 3 \text{ et } p \in N_0 \qquad (2)$$

La recherche des polygones réguliers isométriques que l'on peut assembler en un sommet sans trou ni chevauchement se ramène donc à une équation du premier degré à deux inconnues entières en les valeurs « n » et « p » où « n » et « p » représentent respectivement le nombre de pavés arrivant en un sommet et le nombre de côtés des pavés isométriques.

- *En chaque sommet, il arrive au minimum 3 pavés* ($p \geq 3$).

Démonstration par l'absurde : Supposons que le nombre de pavés puisse être inférieur ou égal à deux.

- Si on considère qu'il arrive deux pavés en un sommet alors la condition (2) impliquerait que les pavés isométriques posséderaient « une infinité » de côtés.

En effet :

$$1-\frac{2}{n}=\frac{2}{p} \Leftrightarrow 1-\frac{2}{n}=\frac{2}{2} \Leftrightarrow 1-\frac{2}{n}=1 \Leftrightarrow 1-1=\frac{2}{n} \Leftrightarrow 0=\frac{2}{n} \Leftrightarrow 0.n=2$$

La condition (2) devient dès lors une équation impossible.

$0=\frac{2}{n}$ entraînerait que « n » vaut « l'infini » ce qui est en contradiction avec la définition des polygones euclidiens.

- Si on considère qu'il arrive un pavé en un sommet alors la condition (2) impliquerait que les pavés isométriques posséderaient « -2 » côtés.

En effet :

$$1-\frac{2}{n}=\frac{2}{p} \Leftrightarrow 1-\frac{2}{n}=\frac{2}{1} \Leftrightarrow 1-\frac{2}{n}=2 \Leftrightarrow 1-2=\frac{2}{n} \Leftrightarrow -1=\frac{2}{n} \Leftrightarrow n=-2$$

Ceci est impossible car le nombre de côtés dans un polygone euclidien est supérieur ou égal à 3.

- *En chaque sommet, il arrive au maximum 6 pavés* ($p \leq 6$).

Comme le nombre de côtés de chaque pavé doit être supérieur ou égal à trois, on a : $\frac{2}{n} \leq \frac{2}{3} \qquad \forall\ n \geq 3$

La condition (2) entraîne :

$$1-\frac{2}{n}=\frac{2}{p} \;\Rightarrow\; 1-\frac{2}{p}=\frac{2}{n}\leq\frac{2}{3} \;\Rightarrow\; 1-\frac{2}{p}\leq\frac{2}{3} \Rightarrow 1-\frac{2}{3}\leq\frac{2}{p} \Rightarrow \frac{1}{3}\leq\frac{2}{p} \Rightarrow p\leq 2.3 \Rightarrow p\leq 6$$

<u>Conclusion</u> :

Des deux conditions précédentes, la condition <u>nécessaire</u> « $\sum_{i=1}^{p} \hat{\alpha}_{n_i} = 360°$; $n_i \geq 3$ et $p \in N$ » se transforme en « $1-\frac{2}{n}=\frac{2}{p}$; $n \geq 3$ et $3 \leq p \leq 6$ »

ou encore

« $n = \frac{2p}{p-2}$; $n \geq 3$ et $3 \leq p \leq 6$ »

Les solutions de cette équation du premier degré à deux inconnues entières sont :

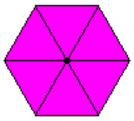
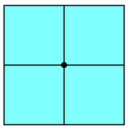
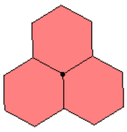
a) p = 3 et n = 6

b) p = 4 et n = 4

c) p = 5 et n = 3, 33… à rejeter car $n \notin N$

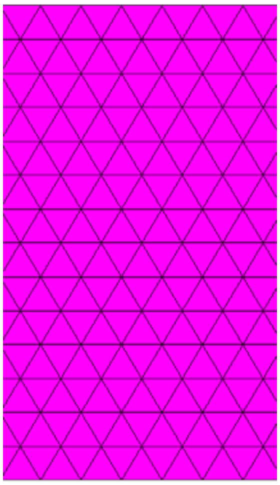
d) p = 6 et n = 3

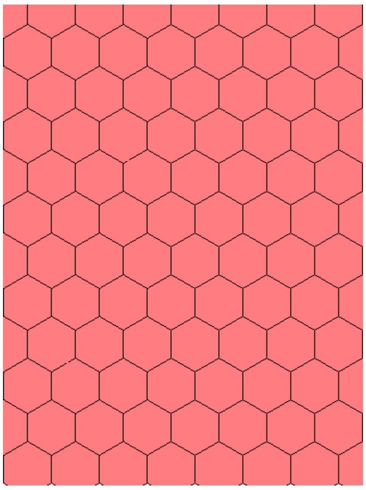
On peut donc assembler en un sommet pour commencer un pavage bord à bord avec des polygones réguliers isométriques :

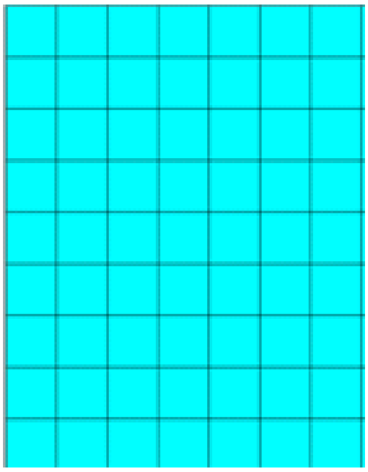
- soit six triangles équilatéraux 
- soit quatre carrés 
- soit trois hexagones réguliers 

b) Types de pavages bord à bord avec des polygones réguliers isométriques.

A partir des trois solutions précédentes, on peut réaliser les trois pavages bord à bord à faces régulières isométriques suivants.







5.2.2. Les pavages bord à bord avec des polygones réguliers.

Dans les pavages bord à bord avec des polygones réguliers, on n'impose plus l'isométrie des pavés.

a) Conditions en chaque sommet d'un pavage bord à bord avec des polygones réguliers.

- *En chaque sommet, la condition nécessaire* :

$$\sum_{i=1}^{p} \hat{\alpha}_{n_i} = 360° \qquad n_i \geq 3 \text{ et } p \geq 3$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{p} \left(180° - \frac{360°}{n_i}\right) = 360°$$

Car l'angle entre deux côtés d'un polygone régulier à n_i côtés vaut $180° - \frac{360°}{n_i}$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{p} \left(1 - \frac{2}{n_i}\right) = 2$$

On divise par 180° dans les deux membres.

$$\Leftrightarrow$$

$$\left(1 - \frac{2}{n_1}\right) + \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) + \left(1 - \frac{2}{n_3}\right) + \ldots + \left(1 - \frac{2}{n_i}\right) + \ldots + \left(1 - \frac{2}{n_p}\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{\text{P termes}} - \left(\frac{2}{n_1} + \frac{2}{n_2} + \frac{2}{n_3} + \ldots + \frac{2}{n_i} + \ldots + \frac{2}{n_p}\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$p.1 - \sum_{i=1}^{p} \frac{2}{n_i} = 2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{2}{n_i} = p - 2 \qquad p \geq 3 \text{ et } n_i \geq 3 \qquad \boxed{(A)}$$

- *En chaque sommet, il y arrive au minimum trois pavés.*

    - Si p = 2 alors la condition nécessaire (A) $\sum_{i=1}^{p} \frac{2}{n_i} = p-2$ devient $\frac{2}{n_1} + \frac{2}{n_2} = 0$

où $\frac{2}{n_1}$ et $\frac{2}{n_2}$ sont strictement positifs (n_1 et $n_2 \geq 3$).

Dès lors la condition (A) n'est pas vérifiée.

    - Si p = 1 alors la condition nécessaire (A) $\sum_{i=1}^{p} \frac{2}{n_i} = p-2$ devient $\frac{2}{n_1} = -1$

où $\frac{2}{n_1}$ est strictement positif ($n_1 \geq 3$).

Dès lors la condition (A) n'est pas vérifiée.

- *En chaque sommet, il y arrive au maximum six pavés.*

Comme le nombre de côtés de chaque pavé doit être supérieur ou égal à trois, on a : $\forall_i : \frac{2}{n_i} \leq \frac{2}{3} \qquad n_i \geq 3$

La condition (A) entraîne :

$$p-2 = \sum_{i=1}^{p} \frac{2}{n_i} = \frac{2}{n_1} + \frac{2}{n_2} + \ldots + \frac{2}{n_i} + \ldots + \frac{2}{n_p} \leq \underbrace{\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \ldots + \frac{2}{3}}_{\text{p termes}} = p.\frac{2}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$p-2 \leq p.\frac{2}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$p \leq 6$$

<u>Conclusion</u> :

Des deux conditions précédentes, la condition <u>nécessaire</u> « $\sum_{i=1}^{p} \hat{\alpha}_{n_i} = 360°$; $n_i \geq 3$ et $p \in \mathbb{N}$ » se transforme en « $\sum_{i=1}^{p} \frac{2}{n_i} = p-2$; $n_i \geq 3$ et $3 \leq p \leq 6$ » **(B)**

$$\Leftrightarrow$$

« $\frac{2}{n_1} + \frac{2}{n_2} + \ldots + \frac{2}{n_i} + \ldots + \frac{2}{n_p} = p-2$; $n_i \geq 3$ et $3 \leq p \leq 6$ »

En chaque sommet d'un pavage bord à bord avec des polygones réguliers, il arrive au maximum trois types de pavés différents.

Démonstration par l'absurde :

Supposons qu'il arrive quatre pavés différents en un sommet.

Ces quatre pavés doivent satisfaire la condition nécessaire « $\sum_{i=1}^{p} \hat{\alpha}_{n_i} = 360°$ ».

Pour mettre en un sommet le plus de pavés possibles, on choisit des polygones réguliers différents ayant des amplitudes d'angles les plus petites possibles.

Dans le meilleur des cas, on aura un triangle équilatéral ($\hat{\alpha}_1 = 60°$), un carré ($\hat{\alpha}_2 = 90°$), un pentagone régulier ($\hat{\alpha}_3 = 108°$) et un hexagone régulier ($\hat{\alpha}_4 = 120°$).

On aurait alors pour la somme des amplitudes des angles arrivant en un sommet une valeur supérieure ou égale à 378°

$$(\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_3 + \hat{\alpha}_4 = 60° + 90° + 108° + 120° = 378°).$$

Dès lors, la condition nécessaire n'est pas respectée.

b) Les différents types de sommets dans les pavages bord à bord avec des polygones réguliers (isométriques ou non isométriques).

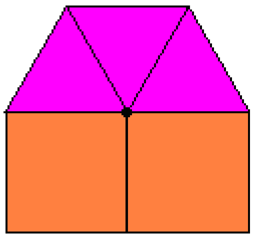
La détermination des différents types de sommets dans les pavages bord à bord avec des polygones réguliers se ramène à la recherche des solutions de la condition nécessaire (B) tout en imposant qu'il y ait au maximum trois types de pavés différents :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{p} \frac{2}{n_i} = p - 2 \qquad \text{avec} \quad 3 \le p \le 6 \quad \text{et} \quad n_i \ge 3} \qquad \boxed{(\text{ B })}$$

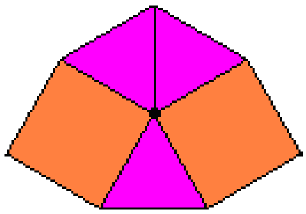
On ne restreint pas la généralité des solutions si, **dans un premier temps**, on suppose que les pavés sont rangés par ordre croissant ($n_1 \le n_2 \le \ldots \le n_i \le \ldots \le n_p$).

Par la suite, on regardera les permutations non cycliques **possibles** pour obtenir toutes les solutions de la condition nécessaire (B).

A titre d'exemple, la solution (3 – 3 – 4 – 3 – 4) est obtenue en effectuant une permutation non cyclique des pavés de la solution (3 – 3 – 3 – 4 – 4).



(3-3-3-4-4)
En chaque sommet, il arrive trois triangles équilatéraux et deux carrés.



(3-3-4-3-4)
En chaque sommet , il arrive deux triangles équilatéraux, un carré, un triangle équilatéral et un carré.

Solutions de la condition nécessaire avec les pavés rangés par ordre « croissant ».

Les solutions sont obtenues en imposant successivement à « p » les valeurs 6, 5, 4, 3 dans l'équation (C).

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{2}{n_i} = p-2 \qquad \text{avec} \quad 3 \le p \le 6 \quad \text{et} \quad n_i \ge 3 \quad \text{et} \quad n_1 \le n_2 \le \ldots \le n_i \le \ldots \le n_p \qquad (C)$$

Premier cas : *six* pavés en un sommet ($p = 6$).

La condition nécessaire (C) devient $\sum_{i=1}^{6} \frac{2}{n_i} = 4$ avec $n_i \ge 3$ et $n_1 \le n_2 \le \ldots \le n_6$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{n_1} + \frac{2}{n_2} + \frac{2}{n_3} + \frac{2}{n_4} + \frac{2}{n_5} + \frac{2}{n_6} = 4 \text{ avec } n_i \ge 3 \text{ et } n_1 \le n_2 \le \ldots \le n_6$$

La seule solution est six triangles équilatéraux en un sommet :

$$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = n_6 = 3$$

Justification :

Du point de vue géométrique : Si six triangles équilatéraux arrivent en un sommet, la somme des amplitudes des angles vaut 360°. ($6 \times 60° = 360°$)

Du point de vue algébrique : Si on remplace les n_i par $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = n_6 = 3$ dans l'expression $\sum_{i=1}^{p} \frac{2}{n_i}$ on obtient :

$\sum_{i=1}^{6} \frac{2}{3} = 6 \times \frac{2}{3} = 4$. La condition nécessaire (C) est donc vérifiée.

Il n'existe pas d'autre solution avec six pavés.

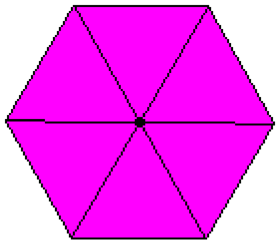
Preuve par l'absurde :

S'il n'y a pas six triangles équilatéraux en un sommet alors dans le meilleur des cas, il y a au minimum un carré et cinq triangles équilatéraux.

Dès lors, la somme des angles arrivant en ce sommet ($\sum_{i=1}^{6} \hat{\alpha}_{n_i}$) serait supérieure ou égale à 390° ($5 \times 60° + 1 \times 90° = 390°$). Ceci est en contradiction avec la contrainte « *la somme des amplitudes des angles arrivant en un sommet est égale à 360°* ».

En conclusion, si six pavés arrivent en un sommet alors ce sont six triangles équilatéraux.

On note cette solution : (3 , 3, 3 , 3 , 3 , 3) ou 3^6



- Deuxième cas : *cinq* pavés en un sommet ($p = 5$)

La condition nécessaire (C) devient $\sum_{i=1}^{5} \frac{2}{n_i} = 3$ avec $n_i \geq 3$ et $n_1 \leq n_2 \leq ... \leq n_5$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{n_1} + \frac{2}{n_2} + \frac{2}{n_3} + \frac{2}{n_4} + \frac{2}{n_5} = 3 \text{ avec } n_i \geq 3 \text{ et } n_1 \leq n_2 \leq ... \leq n_5$$

LEMME :

Si cinq pavés arrivent en un sommet, alors il faut au minimum trois triangles équilatéraux parmi ceux-ci.

Démonstration par l'absurde :

Supposons qu'il y ait soit zéro, soit un, soit deux triangles équilatéraux parmi les cinq pavés.

- S'il n'y a pas de triangle équilatéral alors, dans le meilleur des cas il y a cinq carrés.

Dans ce cas, la somme des amplitudes des cinq angles arrivant en un sommet ($\sum_{i=1}^{5} \hat{\alpha}_{n_i}$) serait supérieure ou égale à 450° ($5 \times 90° = 450°$). Ce qui est en contradiction avec la contrainte « *la somme des amplitudes des angles arrivant en un sommet est égale à 360°* ».

- S'il y a un triangle équilatéral alors, dans le meilleur des cas il y en plus quatre carrés.

Dans ce cas, la somme des amplitudes des cinq angles arrivant en ce sommet ($\sum_{i=1}^{5} \hat{\alpha}_{n_i}$) serait supérieure ou égale à 420° ($4 \times 90° + 1 \times 60° = 420°$). Ce qui est en contradiction avec la contrainte « *la somme des amplitudes des angles arrivant en un sommet est égale à 360°* ».

- S'il y a deux triangles équilatéraux alors, dans le meilleur des cas il y a en plus trois carrés.

Dans ce cas, la somme des amplitudes des cinq angles arrivant en ce sommet

($\sum_{i=1}^{5}\hat{\alpha}_{n_i}$) serait supérieure ou égale à 390° ($3\times 90^\circ + 2\times 60^\circ = 390^\circ$). Ce qui est en contradiction avec la contrainte *« la somme des amplitudes des angles arrivant en un sommet est égale à 360° »*

En conclusion, s'il arrive en un sommet cinq polygones réguliers classés par ordre croissant, les trois premiers sont nécessairement des triangles équilatéraux.
Les solutions de la condition nécessaire (*C*) sont dès lors du type
(3 – 3 – 3 – n_4 – n_5).

La condition nécessaire $\sum_{i=1}^{5}\frac{2}{n_i} = 3$ avec $n_i \geq 3$ et $n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_5$ avec la contrainte du lemme devient :

$$3\times\frac{2}{3}+\frac{2}{n_4}+\frac{2}{n_5}=3 \qquad \text{avec } 3 \leq n_4 \leq n_5$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{n_4}+\frac{2}{n_5}=1 \qquad \left(\Leftrightarrow \frac{2}{n_5}=1-\frac{2}{n_4} \Leftrightarrow \frac{2}{n_5}=\frac{n_4-2}{n_4} \Leftrightarrow 2n_4 = n_5(n_4-2)\right)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$n_5=\frac{2n_4}{n_4-2} \qquad \text{avec } 3 \leq n_4 \leq n_5$$

Remarque : On peut montrer que la fonction « $f(n_4)=\frac{2n_4}{n_4-2}=n_5$ » est une fonction strictement décroissante.

En effet la fonction dérivable correspondante $f(x)=\frac{2x}{x-2}$ est strictement décroissante (elle admet une dérivée première strictement « négative »

$f'(x)=\frac{-4}{(x-2)^2} < 0 \quad \forall \quad x \geq 3$)

La fonction $f(n_4)=\dfrac{2n_4}{n_4-2}$ étant une restriction de f(x) , elle est donc aussi strictement décroissante.

Les solutions de la condition nécessaire $\sum_{i=1}^{5}\dfrac{2}{n_i}=3$ *où* $n_i \geq 3$ *et* $n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_5$ avec la contrainte du lemme sont :

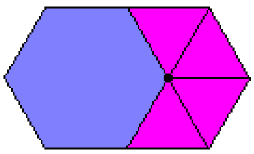
n_4	$n_5=\dfrac{2n_4}{n_4-2}$	Solutions du type (3 - 3 - 3 - n_4 - n_5)
3	6	(3 - 3 - 3 - 3 - 6) $\cong 3^4.6$
4	4	(3 - 3 - 3 - 4 - 4) $\cong 3^3.4^2$
5	$\dfrac{10}{3} \notin \mathbb{N}$	Comme f(n_4) est une fonction strictement décroissante, il n'y a pas d'autre solution qui respecte la contrainte $n_4 \leq n_5$.

En résumé, si cinq pavés arrivent en un sommet, il y a exactement deux solutions :

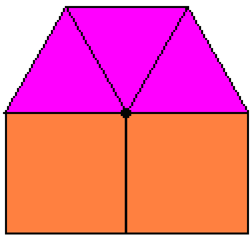
- quatre triangles équilatéraux et un hexagone ;
- trois triangles équilatéraux et deux carrés.

Ces solutions se notent :

(3^4 - 6)



(3^3 - 4^2)



- <u>Troisième cas</u> : *quatre* pavés en un sommet ($p = 4$)

La condition nécessaire (C) devient $\sum_{i=1}^{4} \frac{2}{n_i} = 2$ avec $n_i \geq 3$ et $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$.

<u>Les solutions sont données en deux étapes</u> :

1. <u>S'il n'y a pas de triangle équilatéral parmi les quatre pavés qui arrivent en un sommet, alors la seule solution est quatre carrés.</u>

<u>Preuve</u> :

a. <u>Quatre carrés est solution.</u>

Dans ce cas, $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 4$ et la somme des amplitudes des quatre angles arrivant en un sommet ($\sum_{i=1}^{4} \hat{\alpha}_{n_i}$) est bien égale à 360° (4X90°=360°). Ceci vérifie la condition nécessaire $\sum_{i=1}^{4} \frac{2}{n_i} = 2$ avec $n_i \geq 3$ et $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$.

b. <u>Quatre carrés est la seule solution.</u>

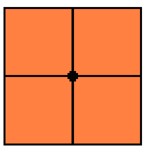
Supposons qu'il existe une autre solution que quatre carrés sans triangle équilatéral. On aurait dans le meilleur des cas trois carrés et un pentagone régulier ($n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$).

Dans ce cas, la somme des amplitudes des quatre angles arrivant en un sommet ($\sum_{i=1}^{4} \hat{\alpha}_{n_i}$) serait supérieure ou égale à 378° ($3 \times 90° + 1 \times 108° = 378°$).

Ceci est en contradiction avec la contrainte « *la somme des amplitudes des angles arrivant en un sommet est égale à 360°* »

En conclusion, s'il n'y a pas de triangle parmi les quatre pavés qui arrivent en un sommet, la seule solution est quatre carrés.

Cette solution se note (4 - 4 - 4 - 4) ou 4^4.



2. <u>S'il y a au moins un triangle équilatéral parmi les quatre pavés, alors le deuxième pavé est soit un triangle équilatéral soit un carré</u> $(3 \leq n_2 \leq 4)$

Preuve géométrique par l'absurde :

Supposons que le deuxième pavé soit un polygone régulier possédant cinq côtés ou plus ($n_2 \geq 5$).

Dans ce cas, l'amplitude de l'angle intérieur de ce polygone est supérieure ou égale à 108° ($\hat{\alpha}_{n_2} \geq 108°$).

Comme les pavés sont rangés par ordre croissant ($n_2 \leq n_3 \leq n_4$), les angles intérieurs des trois autres polygones ont une amplitude supérieure ou égale à 108° ($\hat{\alpha}_{n_2}, \hat{\alpha}_{n_3}, \hat{\alpha}_{n_4} \geq 108°$) et la somme des amplitudes des quatre angles arrivant en ce sommet ($\sum_{i=1}^{4} \hat{\alpha}_{n_i}$) est supérieure ou égale à 384° ($1 \times 60° + 3 \times 108° = 384°$).

Ceci est en contradiction avec la contrainte « *la somme des amplitudes des angles arrivant en un sommet est égale à 360°* »

En conclusion, s'il arrive en un sommet quatre polygones réguliers classés par ordre croissant, les deux premiers sont soit deux triangles équilatéraux, soit un triangle équilatéral et un carré.

Les solutions de la condition nécessaire (C) sont dès lors du type :

(3 – 3 – n_3 – n_4) avec $3 \leq n_3 \leq n_4$ et (3 – 4 – n_3 – n_4) avec $4 \leq n_3 \leq n_4$

Solutions du type (3 – 3 – n_3 – n_4).

Dans ce cas, la condition nécessaire $\sum_{i=1}^{4} \frac{2}{n_i} = 2$ avec $n_i \geq 3$ et $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$ devient :

$$2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{n_3} + \frac{2}{n_4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{n_4} = 2 - \frac{4}{3} - \frac{2}{n_3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{n_4} = \frac{2n_3 - 6}{3n_3} \Leftrightarrow n_4 = \frac{3n_3}{n_3 - 3}$$

avec $3 \leq n_3 \leq n_4$

Remarque : On peut montrer que la fonction « $n_4 = f(n_3) = \dfrac{3n_3}{n_3 - 3}$ » est une fonction strictement décroissante.

Les solutions de la condition nécessaire $\sum_{i=1}^{4} \dfrac{2}{n_i} = 2$ avec $n_1 = n_2 = 3$ et $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$ sont :

n_3	$n_4 = \dfrac{3n_3}{n_3-3}$	Solutions du type (3 - 3 - n_3 - n_4)
3	$\nexists$	L'angle du quatrième polygone devrait valoir 180° ce qui est impossible pour un polygone régulier.
4	12	(3 - 3 - 4 - 12) $\cong 3^2.4.\ 12$
5	$\dfrac{15}{2} \notin \mathbb{N}$	-
6	6	(3 - 3 - 6 - 6) $\cong 3^2.\ 6^2$
		Comme $f(n_3)$ est une fonction strictement décroissante, il n'y a pas d'autre solution qui respecte la contrainte $n_3 \leq n_4$.

Solutions du type (3 - 4 - n3 - n4)

Dans ce cas, la condition nécessaire $\sum_{i=1}^{4} \dfrac{2}{n_i} = 2$ avec $n_i \geq 3$ et $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$ devient :

$$2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \frac{2}{n_3} + \frac{2}{n_4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{n_4} = 2 - \frac{2}{3} - \frac{2}{4} - \frac{2}{n_3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{n_4} = \frac{10n_3 - 24}{12n_3}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$n_4 = \frac{12n_3}{5n_3 - 12}$$

avec $4 \leq n_3 \leq n_4$

Remarque : On peut montrer que la fonction « $n_4 = f(n_3) = \dfrac{12n_3}{5n_3 - 12}$ » est une fonction strictement décroissante.

La solution de la condition nécessaire $\sum_{i=1}^{4} \frac{2}{n_i} = 2$ avec $n_1 = 3$, $n_2 = 4$ et $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$ est:

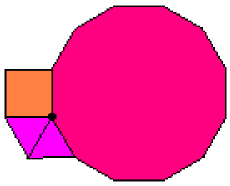
n_3	$n_4 = \frac{12n_3}{5n_3 - 12}$	Solutions du type (3 – 4 – n_3 – n_4)
4	6	(3 - 4 - 4 - 6)
5	$\frac{60}{13} \notin \mathbb{N}$	-
		Comme f(n_3) est une fonction strictement décroissante, il n'y a pas d'autre solution qui respecte la contrainte $n_3 \leq n_4$.

En conclusion, s'il y a au moins un triangle équilatéral parmi les quatre pavés qui arrivent en un sommet, les seules solutions sont :

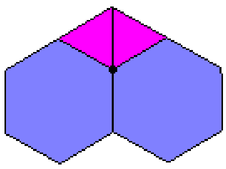
- deux triangles équilatéraux, un carré et un douze-gone régulier ;
- deux triangles équilatéraux et deux hexagones réguliers ;
- un triangle équilatéral, deux carrés et un hexagone régulier.

Ces solutions se notent :

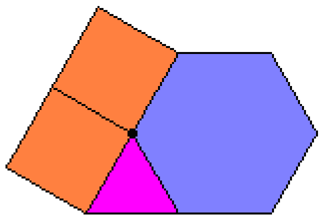
(3 – 3 – 4 – 12)



(3 – 3 – 6 – 6)

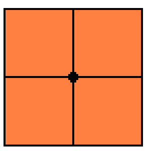


(3 – 4 – 4 – 6)

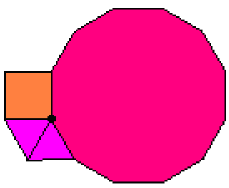


En résumé, lorsque quatre pavés arrivent en un sommet les quatre solutions sont :

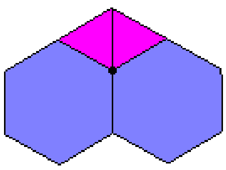
(4 – 4 – 4 – 4)



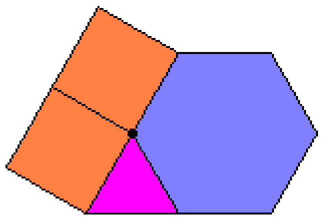
(3 – 3 – 4 – 12)



(3 – 3 – 6 – 6)



(3 – 4 – 4 – 6)



▶ Quatrième cas : *trois* pavés en un sommet ($p=3$)

La condition nécessaire (C) devient $\sum_{i=1}^{3}\frac{2}{n_i}=\frac{2}{n_1}+\frac{2}{n_2}+\frac{2}{n_3}=1$ avec $n_i \geq 3$ et $n_1 \leq n_2 \leq n_3$

- LEMME :

Lorsqu'il y a trois pavés mis par ordre croissant qui arrivent en un sommet, le premier pavé possède au maximum six côtés ($n_1 \leq 6$)

Preuve par l'absurde :

Si le premier pavé possède plus de six côtés ($n_1 > 6$) alors l'amplitude de l'angle intérieur de ce polygone régulier est supérieure à 120° ($\hat{\alpha}_{n_1} > 120°$).

Comme par hypothèse les pavés sont rangés par ordre croissant ($n_1 \leq n_2 \leq n_3$), les amplitudes des angles des trois polygones réguliers sont supérieures à 120° ($\hat{\alpha}_{n_1}, \hat{\alpha}_{n_2}, \hat{\alpha}_{n_3} > 120°$).

Dans ce cas, la somme des amplitudes des trois angles arrivant en un sommet ($\sum_{i=1}^{3}\hat{\alpha}_{n_i}$) serait supérieure ou égale à 360° ($\hat{\alpha}_{n_1}+\hat{\alpha}_{n_2}+\hat{\alpha}_{n_3} > 360°$).

Ceci est en contradiction avec la contrainte « *la somme des amplitudes des angles arrivant en un sommet est égale à 360°* »

- En conclusion, si les trois pavés qui arrivent en un sommet sont rangés par ordre croissant, alors le premier pavé est soit un triangle équilatéral, soit un carré, soit un pentagone régulier, soit un hexagone régulier.

- La recherche des solutions de l'équation « $1=\sum_{i=1}^{3}\frac{2}{n_i}$ *avec* $n_i \geq 3$ et $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ » se fait en prenant successivement pour « n_1 » les valeurs 3, 4, 5 et 6.

Les solutions de la condition nécessaire (C) sont dès lors du type :

(3 – n_2 – n_3) , (4 – n_2 – n_3) , (5 – n_2 – n_3) et (6 – n_2 – n_3).

Solutions du type (3 - n2 - n3)

La condition nécessaire « $1=\sum_{i=1}^{3}\frac{2}{n_i}$ avec $3\le n_2\le n_3$ » devient :

$$1=\frac{2}{3}+\frac{2}{n_2}+\frac{2}{n_3} \Leftrightarrow \frac{2}{n_3}=1-\frac{2}{3}-\frac{2}{n_2} \Leftrightarrow \frac{2}{n_3}=\frac{1}{3}-\frac{2}{n_2} \Leftrightarrow \frac{2}{n_3}=\frac{n_2-6}{3n_2}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$n_3=\frac{6n_2}{n_2-6} \qquad \text{avec } 3\le n_2\le n_3$$

Remarque : On peut montrer que la fonction « $n_3=f(n_2)=\frac{6n_2}{n_2-6}$ » est une fonction strictement décroissante.

Les solutions de la condition nécessaire $\sum_{i=1}^{3}\frac{2}{n_i}=1$ avec $n_1=3$ et $n_1\le n_2\le n_3$ sont :

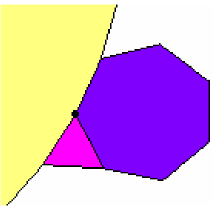
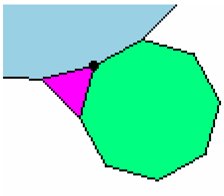
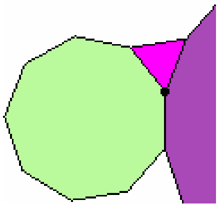
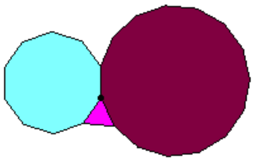
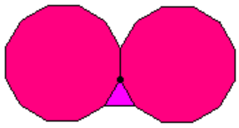
n_2	$n_3=\frac{6n_2}{n_2-6}$	Solutions du type (3 - n_2 - n_3)
3	$\nexists$	$60°+60°+?=360°$
4	$\nexists$	$60°+90°+?=360°$
5	$\nexists$	$60°+108°+?=360°$
6	$\nexists$	$60°+120°+?=360°$
7	42	(3 - 7 - 42)
8	24	(3 - 8 - 24)
9	18	(3 - 9 - 18)
10	15	(3 - 10 - 15)
11	$\frac{66}{5}\notin\mathbb{N}$	-
12	12	(3 - 12 - 12)
		Comme f(n_2) est une fonction strictement décroissante, il n'y a pas d'autre solution qui respecte la contrainte $n_2\le n_3$.

En conclusion, s'il y a un triangle équilatéral parmi les trois pavés qui arrivent en un sommet, les cinq solutions sont :

- un triangle équilatéral, un heptagone régulier et un 42-gone régulier ;
- un triangle équilatéral, un octogone régulier et un 24-gone régulier ;
- un triangle équilatéral, un 9-gone régulier et un 18-gone régulier ;
- un triangle équilatéral, un 10-gone régulier et un 15-gone régulier ;
- un triangle équilatéral et deux 12-gones réguliers.

Ces solutions se notent :

(3 – 7 - 42)   (3 – 8 – 24)   (3 – 9 – 18)   (3 – 10 – 15)   (3 – 12 – 12)

Solutions du type (4 – n2 – n3)

La condition nécessaire « $1=\sum_{i=1}^{3}\frac{2}{n_i}$ avec $4\le n_2\le n_3$ » devient :

$$1=\frac{2}{4}+\frac{2}{n_2}+\frac{2}{n_3} \Leftrightarrow \frac{2}{n_3}=1-\frac{2}{4}-\frac{2}{n_2} \Leftrightarrow \frac{2}{n_3}=\frac{1}{2}-\frac{2}{n_2} \Leftrightarrow \frac{2}{n_3}=\frac{n_2-2}{2n_2}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$n_3=\frac{4n_2}{n_2-4}$$

avec $4\le n_2\le n_3$

Les solutions dans le cas où $n_1 = 4$ sont :

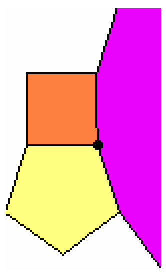
n_2	$n_3 = \dfrac{4n_2}{n_2 - 4}$	Solutions du type (4– n_2 – n_3)
4	–	$90° + 90° + ? = 360°$
5	20	(4 - 5 - 20)
6	12	(4 - 6 - 12)
7	$\dfrac{28}{3} \notin \mathbb{N}$	-
8	8	(4 - 8 - 8)
		Comme f(n_2) est une fonction strictement décroissante, il n'y a pas d'autre solution qui respecte la contrainte $n_2 \leq n_3$

En conclusion, s'il y a un carré parmi les trois pavés arrivant en un sommet, les trois solutions sont :

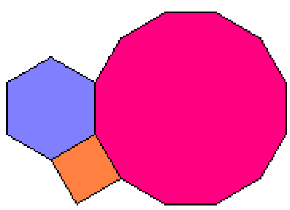
- un carré, un pentagone régulier et un vingt-gone régulier ;
- un carré, un hexagone régulier et un douze-gone régulier ;
- un carré et deux octogones réguliers.

Ces solutions se notent :

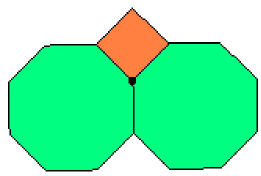
(4 - 5 - 20)



(4 - 6 - 12)



(4 - 8 - 8)



Troisième cas : (5 - n2 - n3)

La condition nécessaire « $1=\sum_{i=1}^{3}\frac{2}{n_i}$ avec $5\le n_2\le n_3$ » devient :

$$1=\frac{2}{5}+\frac{2}{n_2}+\frac{2}{n_3} \Leftrightarrow \frac{2}{n_3}=1-\frac{2}{5}-\frac{2}{n_2} \Leftrightarrow \frac{2}{n_3}=\frac{3}{5}-\frac{2}{n_2} \Leftrightarrow \frac{2}{n_3}=\frac{10n_2}{3n_{2-10}}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$n_3=\frac{10n_2}{3n_2-10}$$

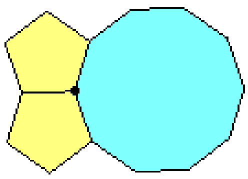
avec $5\le n_2\le n_3$

La solution dans le cas où $n_1=5$ est :

n_2	$n_3=\frac{10n_2}{3n_2-10}$	Solutions du type (5- n_2 - n_3)
5	10	(5 - 5 - 10)
6	$\frac{15}{2}\notin\mathbb{N}$	-
7	$\frac{70}{11}\notin\mathbb{N}$ *et* <7	-
		Comme $f(n_2)$ est une fonction strictement décroissante, il n'y a pas d'autre solution qui respecte la contrainte $n_2\le n_3$

En conclusion, s'il y a un pentagone régulier parmi les trois pavés arrivant en un sommet, la seule solution est deux pentagones réguliers et un décagone régulier.

La solution se note : (5 - 5 - 10)



Quatrième cas : (6 - n2 - n3)

La condition nécessaire « $1=\sum_{i=1}^{3}\frac{2}{n_i}$ avec $6 \le n_2 \le n_3$ » devient :

$$1=\frac{2}{6}+\frac{2}{n_2}+\frac{2}{n_3} \Leftrightarrow \frac{2}{n_3}=1-\frac{2}{6}-\frac{2}{n_2} \Leftrightarrow \frac{2}{n_3}=\frac{4}{6}-\frac{2}{n_2} \Leftrightarrow \frac{2}{n_3}=\frac{4n_2-12}{6n_2} \Leftrightarrow \frac{2}{n_3}=\frac{2n_2-6}{3n_2}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$n_3=\frac{6n_2}{2n_2-6}$$

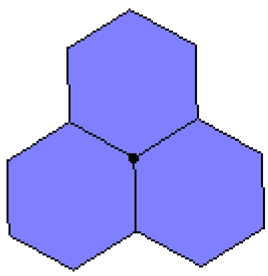
avec $6 \le n_2 \le n_3$

La solution dans le cas où $n_1=6$ est :

n2	$n_3=\frac{6n_2}{2n_2-6}$	Solutions du type (6- n2 - n3)
6	6	(6 - 6 - 6)
		Comme f(n2) est une fonction strictement décroissante, il n'y a pas d'autre solution qui respecte la condition $n_2 \le n_3$

En conclusion, s'il y a un hexagone régulier parmi les trois pavés arrivant en un sommet, la seule solution est trois hexagones réguliers.

La solution se note : (6 - 6 - 6)

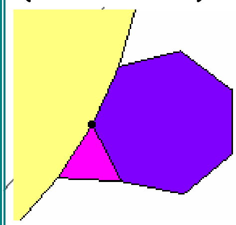


Conclusion :

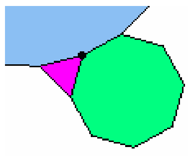
Si on souhaite assembler trois polygones réguliers par ordre croissant en un sommet, alors on peut le faire avec :

1.

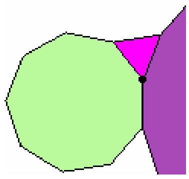
(3 - 7 - 42)



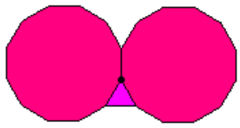
(3 - 8 - 24)



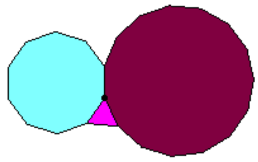
(3 - 9 - 18)



(3 - 12 - 12)

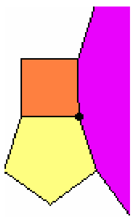


(3 - 10 - 15)

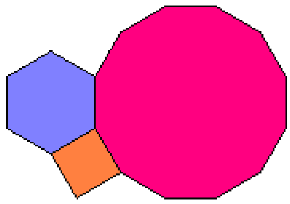


2.

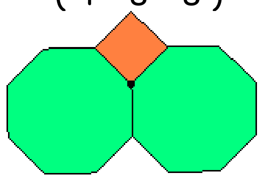
(4 - 5 - 20)



(4 - 6 - 12)

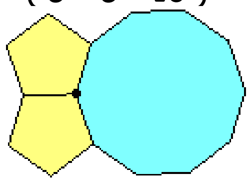


(4 - 8 - 8)



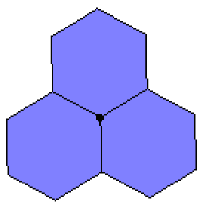
3.

(5 - 5 - 10)



4.

(6 - 6 - 6)

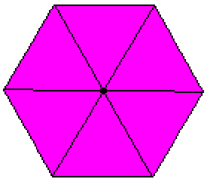


c) Les 17 types de sommets potentiels pour les pavages bord à bord avec des polygones réguliers lorsque les pavés sont rangés par « ordre croissant »

Nous venons de montrer qu'il y a exactement dix-sept ensembles de polygones réguliers rangés par ordre croissant et disposés bord à bord autour d'un sommet.

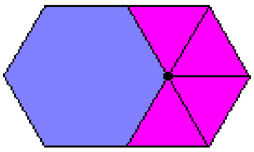
A savoir :

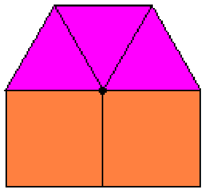
- L'ensemble des six pavés (3 – 3 – 3 – 3 – 3 – 3)



- Les deux ensembles de cinq pavés

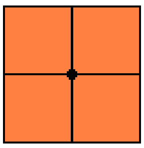
(3 – 3 – 3 – 3 - 6) et (3 – 3 – 3 – 4 – 4)

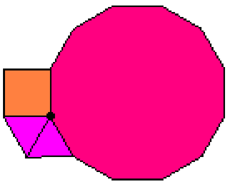


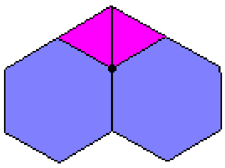


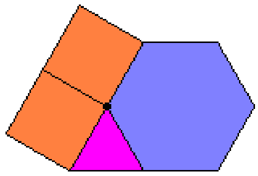
- Les quatre ensembles de quatre pavés

(4 - 4 - 4 - 4) ; (3 - 3 - 4 - 12) ; (3 - 3 - 6 - 6) ; (3 - 4 - 4 - 6)



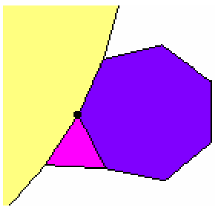


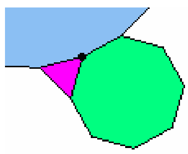


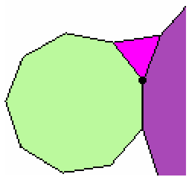


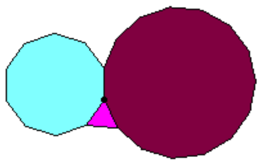
- Les dix ensembles de trois pavés

(3 – 7 – 42) ; (3 – 8 – 24) ; (3 – 9 – 18) ; (3 – 10 – 15)

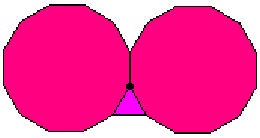


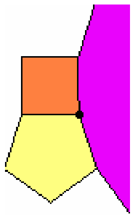


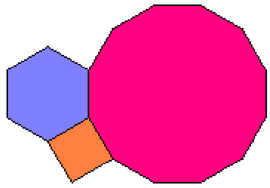


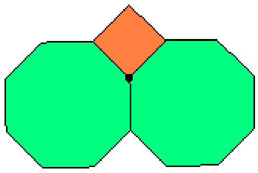


(3 - 12 -12) ; (4 - 5 - 20) ; (4 - 6 - 12) ; (4 - 8 - 8)

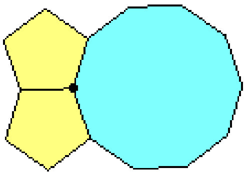


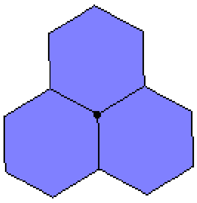






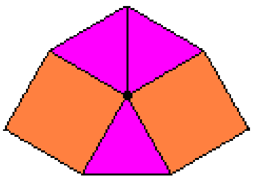
(5 - 5 - 10) et (6 - 6 - 6)



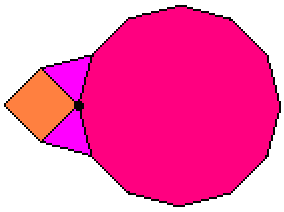


Si on ne tient plus compte de leur rangement par ordre croissant, on peut ajouter les quatre cas suivants :

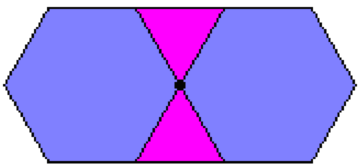
(3 - 3 - 4 - 3 - 4)



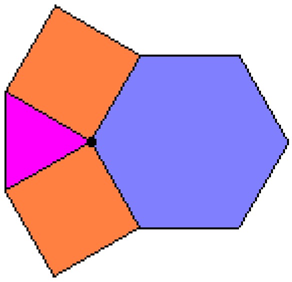
(3 - 4 - 3 - 12)



(3 - 6 - 3 - 6)



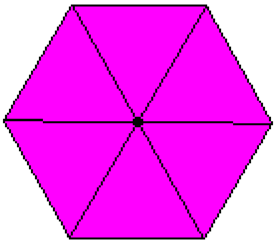
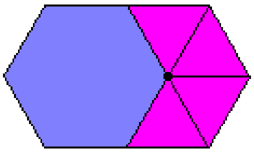
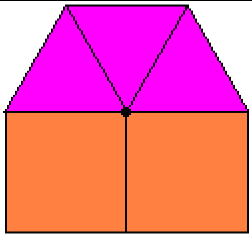
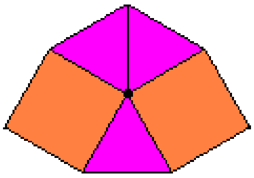
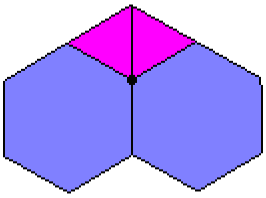
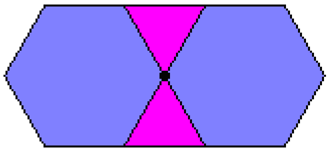
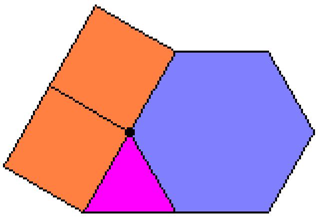
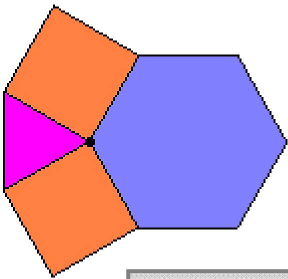
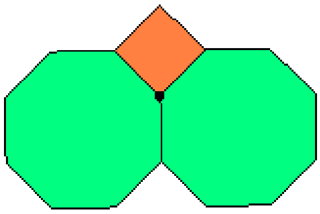
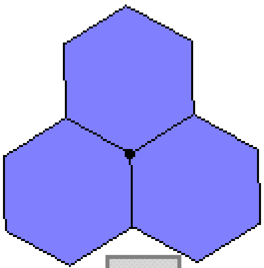
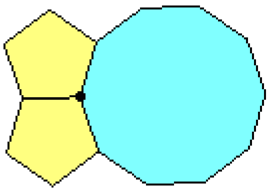
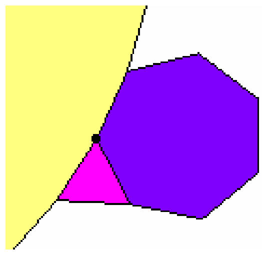
(3 - 4 - 6 - 4)

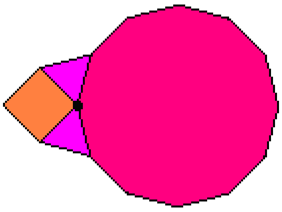
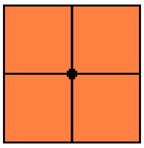
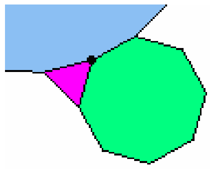
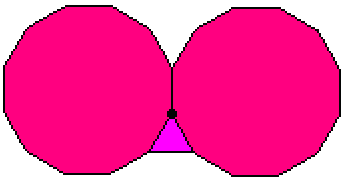
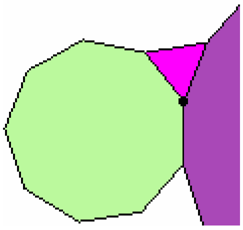
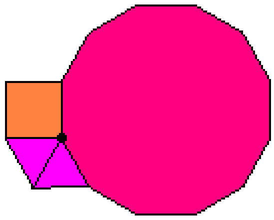
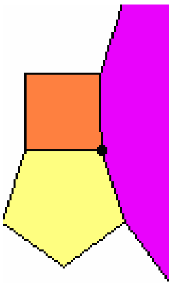
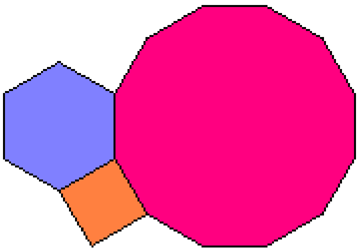
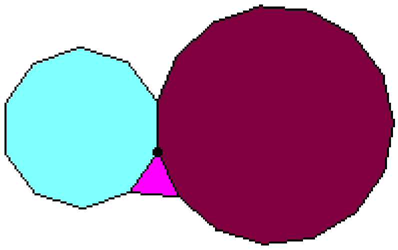


Il y a donc vingt et un types de sommets constitués de polygones réguliers convexes mis bord à bord autour d'un point, sommet de chacun d'eux.

d) Les 21 types de sommets potentiels pour les pavages bord à bord avec des polygones réguliers lorsque les pavés sont indifféremment rangés.

Les vingt et un types de sommets en polygones réguliers convexes.

 3^6	 $3^4 . 6$	 $3^3 . 4^2$
 $3^2 . 4 . 3 . 4$	 $3^2 . 6^2$	 $3 . 6 . 3 . 6$
 $3 . 4^2 . 6$	 $3 . 4 . 6 . 4$	 $4 . 8^2$
 6^3	 $5^2 . 10$	 $3 . 7 . 42$

 3 . 4 . 3 . 12	 4^4	 3 . 8 . 24
 $3 . 12^2$	 3 . 9 . 18	 $3^2 . 4 . 12$
 4 . 5 . 20	 4 . 6 . 12	 3 . 10 . 15

e) Les 15 types de sommets utiles pour les pavages bord à bord avec des polygones réguliers.

Parmi les 21 types potentiels de sommets pour les pavages bord à bord lorsque les pavés sont indifféremment rangés seuls 15 types de sommets peuvent apparaître dans un pavage bord à bord du plan.

Théorème :

Parmi les vingt et un types de sommets, les six types de sommets (3-7-42) , (3-8-24) , (3-9-18) , (3-10-15) , (4-5-20) et (5-5-10) n'apparaissent pas dans un pavage bord à bord avec des polygones réguliers convexes.

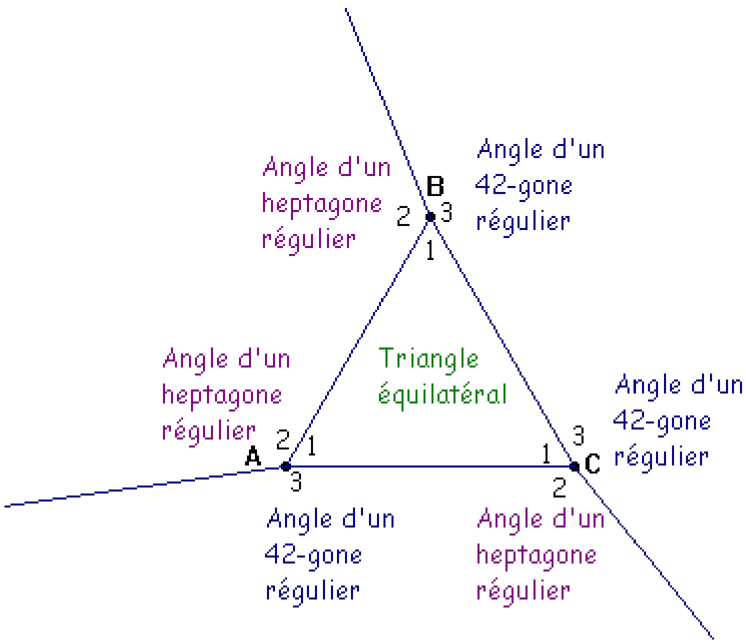
Démonstration :

Nous allons montrer que, partant de chacun de ces types de sommets, il est impossible de le prolonger en pavage bord à bord avec des polygones réguliers convexes.

1°) Sommet de type (3-7-42)

Essayons de construire un pavage bord à bord avec des polygones réguliers en partant d'un sommet de type (3-7-42)

- Commençons le pavage à partir du sommet A.



▶ *Le sommet « A » est de type (3-7-42)*

L'angle $\hat{A}_1$ est l'angle intérieur d'un triangle équilatéral, son amplitude vaut 60°

$(180° - \frac{360°}{3})$

L'angle $\hat{A}_2$ est l'angle intérieur d'un heptagone régulier, son amplitude vaut

$180° - \frac{360°}{7}$.

L'angle $\hat{A}_3$ est l'angle intérieur d'un 42-gone régulier, son amplitude vaut

$180° - \frac{360°}{42}$.

▶ *Le sommet « B » sera également de type (3-7-42)*

En effet, en B, il arrive déjà un triangle équilatéral et un heptagone régulier. Dès lors, on ne peut qu'associer un 42-gone pour réaliser un **début** de pavage.

L'angle $\widehat{B}_1$ est l'angle intérieur d'un triangle équilatéral, son amplitude vaut 60°

$180° - \frac{360°}{3}$.

L'angle $\widehat{B}_2$ est l'angle intérieur d'un heptagone régulier, son amplitude vaut

$180° - \frac{360°}{7}$.

L'angle $\widehat{B}_3$ doit être obligatoirement un angle d'un 42-gone régulier et son amplitude vaut $180° - \frac{360°}{42}$ car le seul type de sommet comprenant un heptagone régulier et un triangle équilatéral est le sommet de type (3-7-42).

▶ *Le sommet « C » est aussi de type (3-7-42)*

L'angle $\widehat{C}_1$ est l'angle intérieur d'un triangle équilatéral, son amplitude vaut 60°

$180° - \frac{360°}{3}$.

L'angle $\widehat{C}_3$ est l'angle intérieur d'un 42-gone régulier, son amplitude vaut

$180° - \frac{360°}{42}$.

L'angle $\widehat{C_2}$ sera donc un angle intérieur d'un heptagone régulier, son amplitude vaut $180° - \frac{360°}{7}$ car ici aussi, le seul type de sommet comprenant un triangle équilatéral et un 42-gone régulier est un sommet de type (3-7-42).

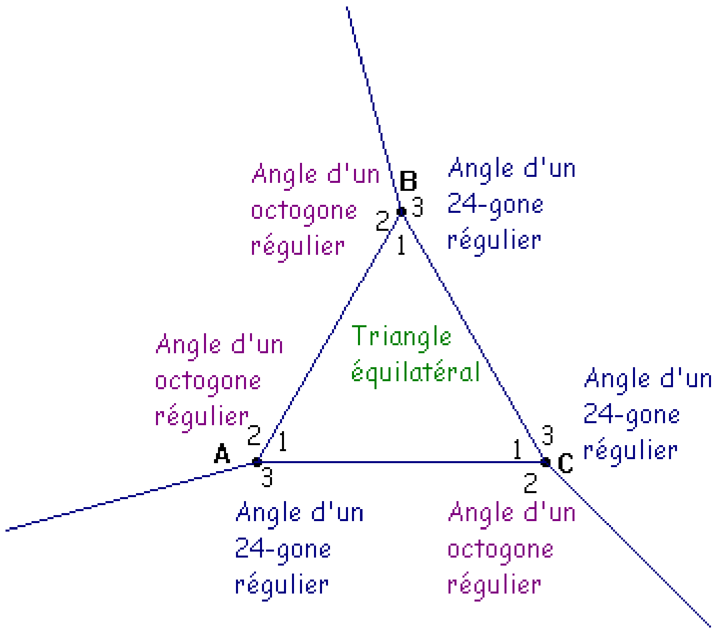
- Il résulte de l'analyse des sommets A, B, C ci-dessus que le côté [AC] est le côté d'un polygone régulier dont l'angle en A est un angle d'un 42-gone régulier et en C, un angle d'un 7-gone régulier. Le segment [AC] serait donc un côté d'un polygone régulier qui ne possède pas tous ses angles de même amplitude. Ceci est bien évidemment impossible car on étudie ici le pavage du plan avec des polygones réguliers c'est-à-dire avec des polygones dont tous les angles et tous les côtés sont isométriques.

Il en résulte donc qu'à partir d'un sommet du type (3-7-42) il est impossible de continuer à paver le plan uniquement avec des polygones réguliers.

2°) Sommet de type (3-8-24)

Essayons de construire un pavage bord à bord avec des polygones réguliers en partant d'un sommet de type (3-8-24)

- Commençons le pavage à partir du sommet A.



Le sommet « A » est de type (3-8-24)

L'angle $\hat{A}_1$ est l'angle intérieur d'un triangle équilatéral, son amplitude vaut 60°

$(180° - \frac{360°}{3})$

L'angle $\hat{A}_2$ est l'angle intérieur d'un octogone régulier, son amplitude vaut

$180° - \frac{360°}{8}$.

L'angle $\hat{A}_3$ est l'angle intérieur d'un 24-gone régulier, son amplitude vaut

$180° - \frac{360°}{24}$.

- *Le sommet « B » sera également de type (3-8-24)*

En effet, en B, il arrive déjà un triangle équilatéral et un octogone régulier. Dès lors, on ne peut qu'associer un 24-gone pour réaliser un **début** de pavage.

L'angle $\widehat{B_1}$ est l'angle intérieur d'un triangle équilatéral, son amplitude vaut 60°

$180° - \frac{360°}{3}$.

L'angle $\widehat{B_2}$ est l'angle intérieur d'un octogone régulier, son amplitude vaut

$180° - \frac{360°}{8}$.

L'angle $\widehat{B_3}$ doit être obligatoirement un angle d'un 24-gone régulier et son amplitude vaut $180° - \frac{360°}{24}$ car le seul type de sommet comprenant un octogone régulier et un triangle équilatéral est le sommet de type (3-8-24).

- *Le sommet « C » est aussi de type (3-8-24)*

L'angle $\widehat{C_1}$ est l'angle intérieur d'un triangle équilatéral, son amplitude vaut 60°

$180° - \frac{360°}{3}$.

L'angle $\widehat{C_3}$ est l'angle intérieur d'un 24-gone régulier, son amplitude vaut

$180° - \frac{360°}{24}$.

L'angle $\widehat{C_2}$ sera donc un angle intérieur d'un octogone régulier, son amplitude vaut $180° - \frac{360°}{8}$ car ici aussi, le seul type de sommet comprenant un triangle équilatéral et un 24-gone régulier est un sommet de type (3-8-24).

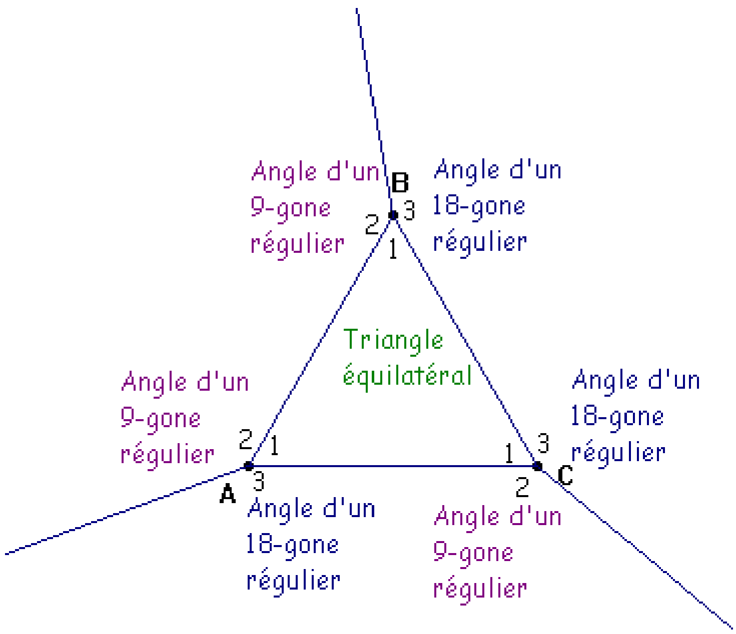
- Il résulte de l'analyse des sommets A, B, C ci-dessus que le côté [AC] est le côté d'un polygone régulier dont l'angle en A est un angle d'un 24-gone régulier et en C, un angle d'un octogone régulier. Le segment [AC] serait donc un côté d'un polygone régulier qui ne possède pas tous ses angles de même amplitude. Ceci est bien évidemment impossible car on étudie ici le pavage du plan avec des polygones réguliers c'est-à-dire avec des polygones dont tous les angles et tous les côtés sont isométriques.

Il en résulte donc qu'à partir d'un sommet du type (3-8-24) il est impossible de continuer à paver le plan uniquement avec des polygones réguliers.

3°) Sommet de type (3-9-18)

Essayons de construire un pavage bord à bord avec des polygones réguliers en partant d'un sommet de type (3-9-18)

- Commençons le pavage à partir du sommet A.



- *Le sommet « A » est de type (3-9-18)*

L'angle $\hat{A}_1$ est l'angle intérieur d'un triangle équilatéral, son amplitude vaut 60°

$(180° - \frac{360°}{3})$

L'angle $\hat{A}_2$ est l'angle intérieur d'un 9-gone régulier, son amplitude vaut $180° - \frac{360°}{9}$.

L'angle $\hat{A}_3$ est l'angle intérieur d'un 18-gone régulier, son amplitude vaut

$180° - \frac{360°}{18}$.

- *Le sommet « B » sera également de type (3-9-18)*

En effet, en B, il arrive déjà un triangle équilatéral et un 9-gone régulier. Dès lors, on ne peut qu'associer un 18-gone pour réaliser un **début** de pavage.

L'angle $\widehat{B}_1$ est l'angle intérieur d'un triangle équilatéral, son amplitude vaut 60°

$(180° - \frac{360°}{3})$

L'angle $\widehat{B}_2$ est l'angle intérieur d'un 9-gone régulier, son amplitude vaut $180° - \frac{360°}{9}$.

L'angle $\widehat{B}_3$ doit être obligatoirement un angle d'un 18-gone régulier et son amplitude vaut $180° - \frac{360°}{18}$ car le seul type de sommet comprenant un 9-gone régulier et un triangle équilatéral est le sommet de type (3-9-18).

- *Le sommet « C » est aussi de type (3-9-18)*

L'angle $\widehat{C}_1$ est l'angle intérieur d'un triangle équilatéral, son amplitude vaut 60°

$(180° - \frac{360°}{3})$

L'angle $\widehat{C}_3$ est l'angle intérieur d'un 18-gone régulier, son amplitude vaut

$180° - \frac{360°}{18}$.

L'angle $\widehat{C_2}$ sera donc un angle intérieur d'un 9-gone régulier, son amplitude vaut $180° - \frac{360°}{9}$ car ici aussi, le seul type de sommet comprenant un triangle équilatéral et un 18-gone régulier est un sommet de type (3-9-18).

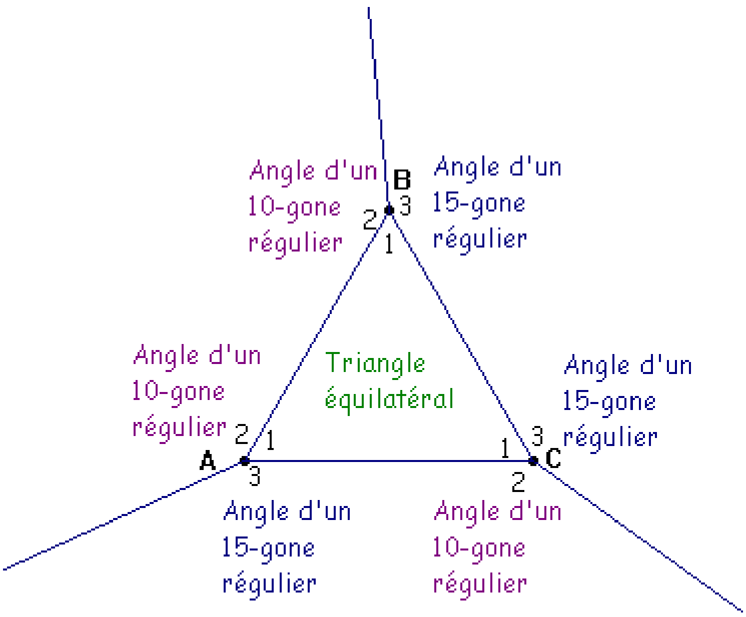
- Il résulte de l'analyse des sommets A, B, C ci-dessus que le côté [AC] est le côté d'un polygone régulier dont l'angle en A est un angle d'un 18-gone régulier et en C, un angle d'un 9-gone régulier. Le segment [AC] serait donc un côté d'un polygone régulier qui ne possède pas tous ses angles de même amplitude. Ceci est bien évidemment impossible car on étudie ici le pavage du plan avec des polygones réguliers c'est-à-dire avec des polygones dont tous les angles et tous les côtés sont isométriques.

Il en résulte donc qu'à partir d'un sommet du type (3-9-18) il est impossible de continuer à paver le plan uniquement avec des polygones réguliers.

4°) Sommet de type (3-10-15)

Essayons de construire un pavage bord à bord avec des polygones réguliers en partant d'un sommet de type (3-10-15)

- Commençons le pavage à partir du sommet A.



► *Le sommet « A » est de type (3-10-15)*

L'angle $\hat{A}_1$ est l'angle intérieur d'un triangle équilatéral, son amplitude vaut 60° $(180° - \frac{360°}{3})$

L'angle $\hat{A}_2$ est l'angle intérieur d'un 10-gone régulier, son amplitude vaut $180° - \frac{360°}{10}$.

L'angle $\hat{A}_3$ est l'angle intérieur d'un 15-gone régulier, son amplitude vaut $180° - \frac{360°}{15}$.

► *Le sommet « B » sera également de type (3-10-15)*

En effet, en B, il arrive déjà un triangle équilatéral et un 10-gone régulier. Dès lors, on ne peut qu'associer un 15-gone pour réaliser un **début** de pavage.

L'angle $\widehat{B_1}$ est l'angle intérieur d'un triangle équilatéral, son amplitude vaut 60° $180° - \frac{360°}{3}$.

L'angle $\widehat{B_2}$ est l'angle intérieur d'un 10-gone régulier, son amplitude vaut $180° - \frac{360°}{10}$.

L'angle $\widehat{B_3}$ doit être obligatoirement un angle d'un 15-gone régulier et son amplitude vaut $180° - \frac{360°}{15}$ car le seul type de sommet comprenant un 10-gone régulier et un triangle équilatéral est le sommet (3-10-15).

► *Le sommet « C » est aussi de type (3-10-15)*

L'angle $\widehat{C_1}$ est l'angle intérieur d'un triangle équilatéral, son amplitude vaut 60° $180° - \frac{360°}{3}$.

L'angle $\widehat{C_3}$ est l'angle intérieur d'un 15-gone régulier, son amplitude vaut $180° - \frac{360°}{15}$.

L'angle $\widehat{C_2}$ sera donc un angle intérieur d'un 10-gone régulier, son amplitude vaut $180° - \dfrac{360°}{10}$ car ici aussi, le seul type de sommet comprenant un triangle équilatéral et un 15-gone régulier est un sommet (3-10-15).

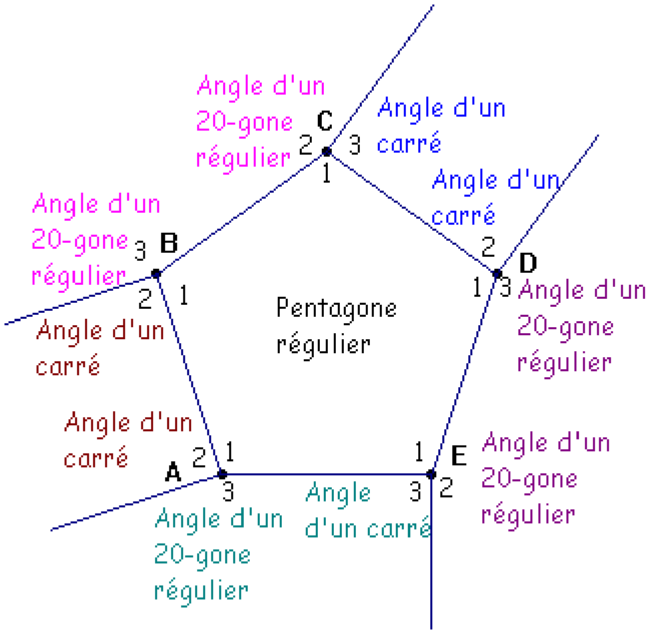
- Il résulte de l'analyse des sommets A, B, C ci-dessus que le côté [AC] est le côté d'un polygone régulier dont l'angle en A est un angle d'un 15-gone régulier et en C, un angle d'un 10-gone régulier. Le segment [AC] serait donc un côté d'un polygone régulier qui ne possède pas tous ses angles de même amplitude. Ceci est bien évidemment impossible car on étudie ici le pavage du plan avec des polygones réguliers c'est-à-dire avec des polygones dont tous les angles et tous les côtés sont isométriques.

Il en résulte donc qu'à partir d'un sommet du type (3-10-15) il est impossible de continuer à paver le plan uniquement avec des polygones réguliers.

5°) Sommet de type (4-5-20)

Essayons de construire un pavage bord à bord avec des polygones réguliers en partant d'un sommet de type (4-5-20)

- Commençons le pavage à partir du sommet A.



Le sommet « A » est de type (4-5-20)

L'angle $\hat{A}_1$ est l'angle intérieur d'un pentagone régulier, son amplitude vaut

$180^\circ - \frac{360^\circ}{5}$

L'angle $\hat{A}_2$ est l'angle intérieur d'un carré, son amplitude vaut 90° ($180^\circ - \frac{360^\circ}{4}$).

L'angle $\hat{A}_3$ est l'angle intérieur d'un 20-gone régulier, son amplitude vaut

$180^\circ - \frac{360^\circ}{20}$.

Le sommet « B » sera également de type (4-5-20)

En effet, en B, il arrive déjà un pentagone régulier et un carré. Dès lors, on ne peut qu'associer un 20-gone pour réaliser un **début** de pavage.

L'angle $\widehat{B}_1$ est l'angle intérieur d'un pentagone régulier, son amplitude vaut

$180^\circ - \frac{360^\circ}{5}$.

L'angle $\widehat{B}_2$ est l'angle intérieur d'un carré, son amplitude vaut 90° ($180^\circ - \frac{360^\circ}{10}$).

L'angle $\widehat{B}_3$ doit être obligatoirement un angle d'un 20-gone régulier et son amplitude vaut $180^\circ - \frac{360^\circ}{20}$ car le seul type de sommet comprenant un pentagone régulier et un carré est le sommet de type (4-5-20).

Le sommet « C » est aussi de type (4-5-20)

L'angle $\widehat{C}_1$ est l'angle intérieur d'un pentagone régulier, son amplitude vaut

$180^\circ - \frac{360^\circ}{5}$.

L'angle $\widehat{C}_2$ est l'angle intérieur d'un 20-gone régulier, son amplitude vaut

$180^\circ - \frac{360^\circ}{20}$.

L'angle $\widehat{C}_3$ doit être un angle intérieur d'un carré, son amplitude vaut 90°

($180^\circ - \frac{360^\circ}{4}$) car ici aussi, le seul type de sommet comprenant un pentagone régulier et un 20-gone régulier est un sommet de type (4-5-20).

- *Le sommet « D » est aussi de type (4-5-20)*

L'angle $\hat{D}_1$ est l'angle intérieur d'un pentagone régulier, son amplitude vaut

$180° - \frac{360°}{5}$.

L'angle $\hat{D}_2$ est l'angle intérieur d'un carré, son amplitude vaut $180° - \frac{360°}{4}$.

L'angle $\hat{D}_3$ doit être un angle intérieur d'un 20-gone régulier, son amplitude vaut

$180° - \frac{360°}{20}$ car ici aussi, le seul type de sommet comprenant un pentagone régulier

et un carré est un sommet de type (4-5-20).

- *Le sommet « E » est aussi de type (4-5-20)*

L'angle $\hat{E}_1$ est l'angle intérieur d'un pentagone régulier, son amplitude vaut

$180° - \frac{360°}{5}$.

L'angle $\hat{E}_2$ est l'angle intérieur d'un 20-gone régulier, son amplitude vaut

$180° - \frac{360°}{20}$.

L'angle $\hat{E}_3$ doit être un angle intérieur d'un carré, son amplitude vaut 90°

($180° - \frac{360°}{4}$) car ici aussi, le seul type de sommet comprenant un pentagone

régulier et un 20-gone régulier est un sommet de type (4-5-20).

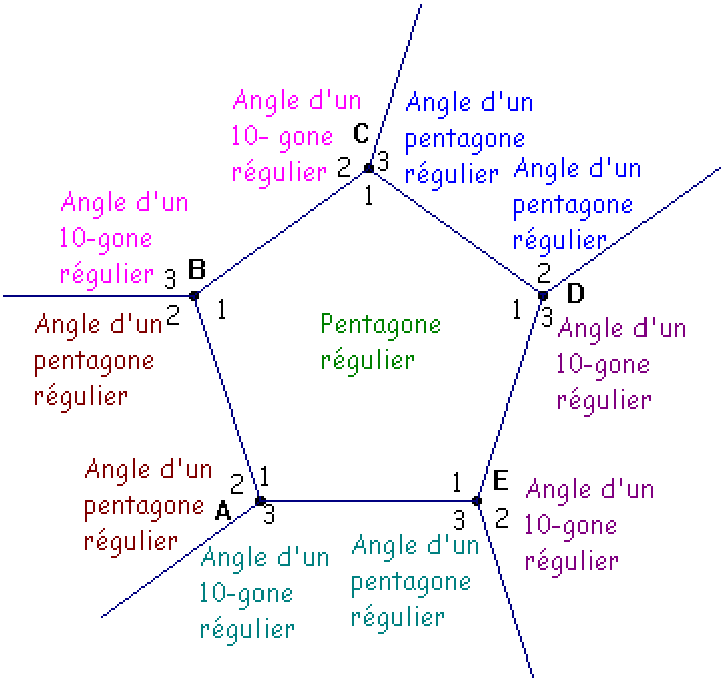
- Il résulte de l'analyse des sommets A, B, C,D,E ci-dessus que le côté [AE] est le côté d'un polygone régulier dont l'angle en A est un angle d'un 20-gone régulier et en E, un angle d'un carré. Le segment [AE] serait donc un côté d'un polygone régulier qui ne possède pas tous ses angles de même amplitude. Ceci est bien évidemment impossible car on étudie ici le pavage du plan avec des polygones réguliers c'est-à-dire avec des polygones dont tous les angles et tous les côtés sont isométriques.

Il en résulte donc qu'à partir d'un sommet du type (4-5-20) il est impossible de continuer à paver le plan uniquement avec des polygones réguliers.

6°) Sommet de type (5-5-10)

Essayons de construire un pavage bord à bord avec des polygones réguliers en partant d'un sommet de type (5-5-10)

- Commençons le pavage à partir du sommet A.



- *Le sommet « A » est de type (5-5-10)*

L'angle $\hat{A}_1$ est l'angle intérieur d'un pentagone régulier, son amplitude vaut

$$180° - \frac{360°}{5}.$$

L'angle $\hat{A}_2$ est l'angle intérieur d'un pentagone régulier, son amplitude vaut

$$180° - \frac{360°}{5}.$$

L'angle $\hat{A}_3$ est l'angle intérieur d'un 10-gone régulier, son amplitude vaut

$$180° - \frac{360°}{10}.$$

- *Le sommet « B » sera également de type (5-5-10)*

En effet, en B, il arrive déjà deux pentagones réguliers. Dès lors, on ne peut qu'associer un 10-gone pour réaliser un **début** de pavage.

L'angle $\widehat{B}_1$ est l'angle intérieur d'un pentagone régulier, son amplitude vaut

$180° - \dfrac{360°}{5}$.

L'angle $\widehat{B}_2$ est l'angle intérieur d'un pentagone régulier, son amplitude vaut

$180° - \dfrac{360°}{5}$.

L'angle $\widehat{B}_3$ doit être obligatoirement un angle d'un 10-gone régulier et son amplitude vaut $180° - \dfrac{360°}{10}$ car le seul type de sommet comprenant deux pentagones réguliers est le sommet de type (5-5-10).

- *Le sommet « C » est aussi de type (5-5-10)*

L'angle $\widehat{C}_1$ est l'angle intérieur d'un pentagone régulier, son amplitude vaut

$180° - \dfrac{360°}{5}$.

L'angle $\widehat{C}_2$ est l'angle intérieur d'un 10-gone régulier, son amplitude vaut

$180° - \dfrac{360°}{10}$.

L'angle $\widehat{C}_3$ doit être un angle intérieur d'un pentagone régulier, son amplitude vaut $180° - \dfrac{360°}{5}$ car ici aussi, le seul type de sommet comprenant un pentagone régulier et un 10-gone régulier est un sommet de type (5-5-10).

- *Le sommet « D » est aussi de type (5-5-10)*

L'angle $\hat{D}_1$ est l'angle intérieur d'un pentagone régulier, son amplitude vaut

$180° - \dfrac{360°}{5}$.

L'angle $\hat{D}_2$ est l'angle intérieur d'un pentagone régulier, son amplitude vaut

$180° - \dfrac{360°}{5}$.

L'angle $\hat{D}_3$ doit être un angle intérieur d'un 10-gone régulier, son amplitude vaut

$180° - \dfrac{360°}{10}$ car ici aussi, le seul type de sommet comprenant deux pentagones

réguliers est un sommet de type (5-5-10).

- *Le sommet « E » est aussi de type (5-5-10)*

L'angle $\hat{E}_1$ est l'angle intérieur d'un pentagone régulier, son amplitude vaut

$180° - \dfrac{360°}{5}$.

L'angle $\hat{E}_2$ est l'angle intérieur d'un 10-gone régulier, son amplitude vaut

$180° - \dfrac{360°}{10}$.

L'angle $\hat{E}_3$ doit être un angle intérieur d'un pentagone régulier, son amplitude vaut

$180° - \dfrac{360°}{5}$ car ici aussi, le seul type de sommet comprenant un pentagone régulier

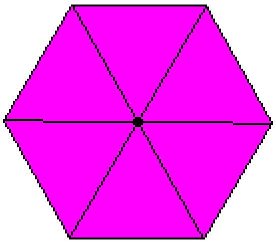
et un 10-gone régulier est un sommet de type (5-5-10).

- Il résulte de l'analyse des sommets A, B, C,D,E ci-dessus que le côté [AE] est le côté d'un polygone régulier dont l'angle en A est un angle d'un 10-gone régulier et en E, un angle d'un pentagone régulier. Le segment [AE] serait donc un côté d'un polygone régulier qui ne possède pas tous ses angles de même amplitude. Ceci est bien évidemment impossible car on étudie ici le pavage du plan avec des polygones réguliers c'est-à-dire avec des polygones dont tous les angles et tous les côtés sont isométriques.

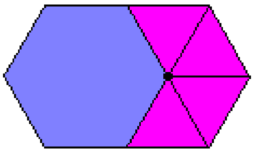
Il en résulte donc qu'à partir d'un sommet du type (5-5-10) il est impossible de continuer à paver le plan uniquement avec des polygones réguliers.

En conclusion, il existe exactement 15 types de sommets pour paver le plan bord à bord avec des polygones réguliers. Ces 15 types sont représentés ci-après.

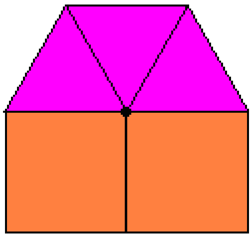
Les quinze types de sommets en polygones réguliers convexes.



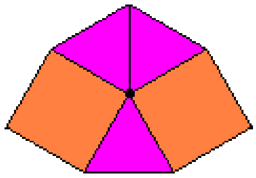
3^6



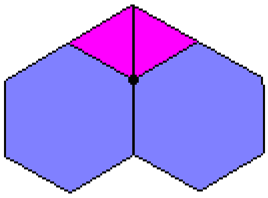
$3^4 . 6$



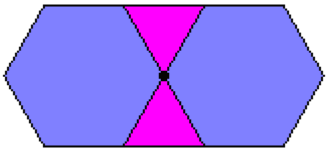
$3^3 . 4^2$



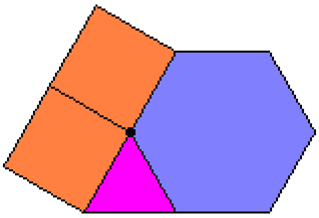
$3^2 . 4 . 3 . 4$



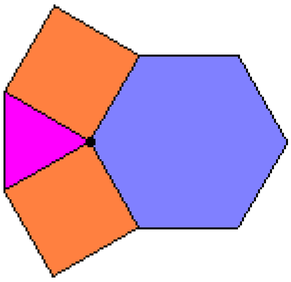
$3^2 . 6^2$



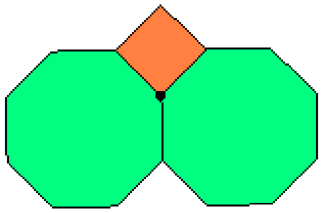
$3 . 6 . 3 . 6$



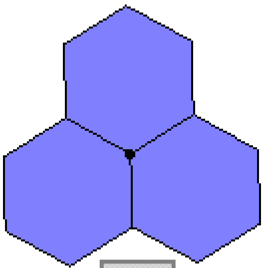
$3 . 4^2 . 6$



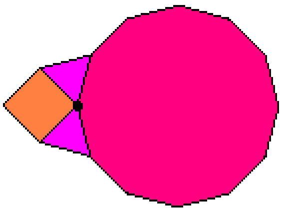
$3 . 4 . 6 . 4$



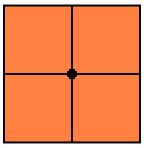
$4 . 8^2$



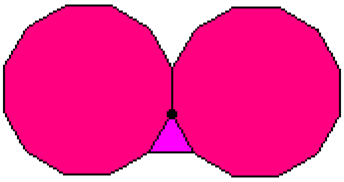
6^3



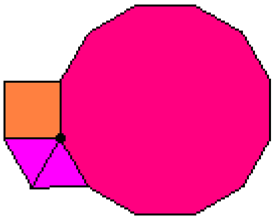
$3 . 4 . 3 . 12$



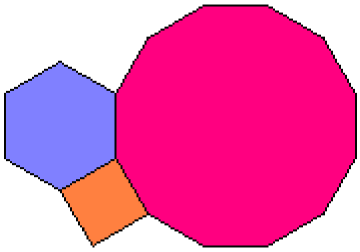
4^4



$3 . 12^2$



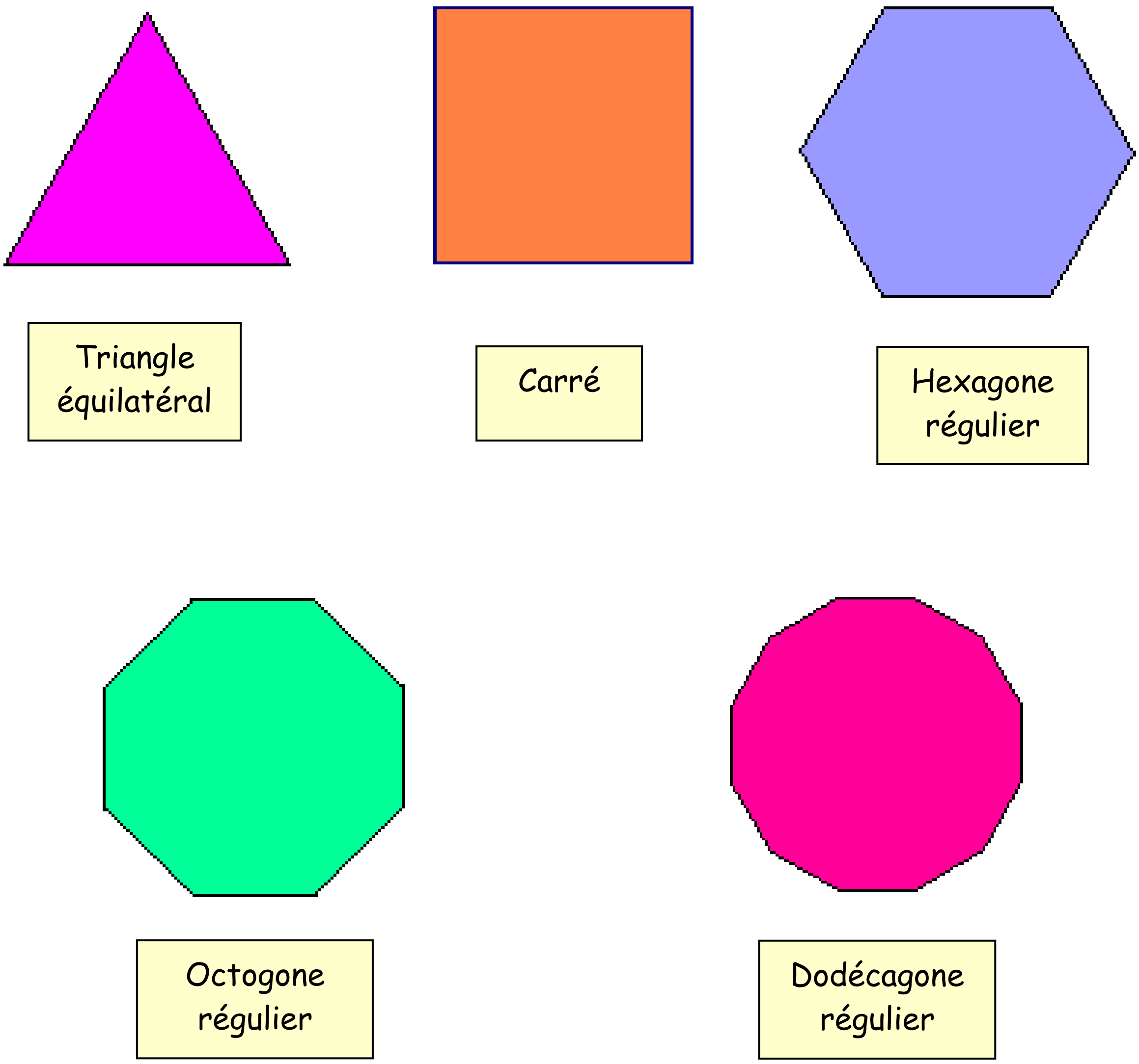
$3^2 . 4 . 12$



$4 . 6 . 12$

f) Types de polygones apparaissant dans les pavages bord à bord avec des polygones réguliers.

De l'analyse des quinze types de sommets utiles, il résulte que tout polygone d'un pavage bord à bord avec des polygones réguliers est un triangle équilatéral, un carré, un hexagone régulier, un octogone régulier ou un dodécagone régulier (12-gone régulier)

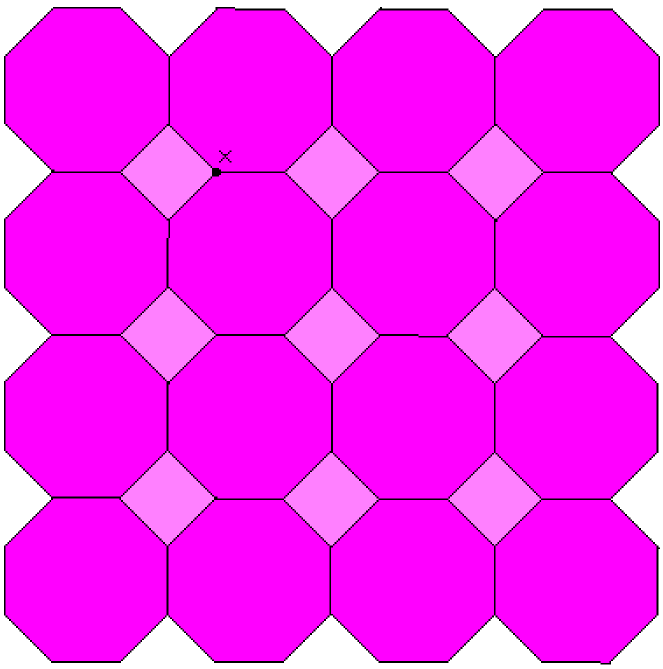


g) Octogone régulier et pavage bord à bord avec des polygones réguliers.

Parmi les 15 types de sommets utiles pour construire un pavage bord à bord avec des polygones réguliers, il en existe un seul où apparaît un octogone régulier.

Si un sommet est de type (4-8-8), en complétant les sommets de proche en proche, pour recouvrir le plan sans trou ni chevauchement, on ne peut utiliser que des sommets du type (4-8-8).
Il s'ensuit dès lors que si un pavage bord à bord avec des polygones réguliers contient un octogone régulier tous les sommets sont nécessairement du type (4-8-8).

On obtient le pavage ci-dessous noté (4-8-8).

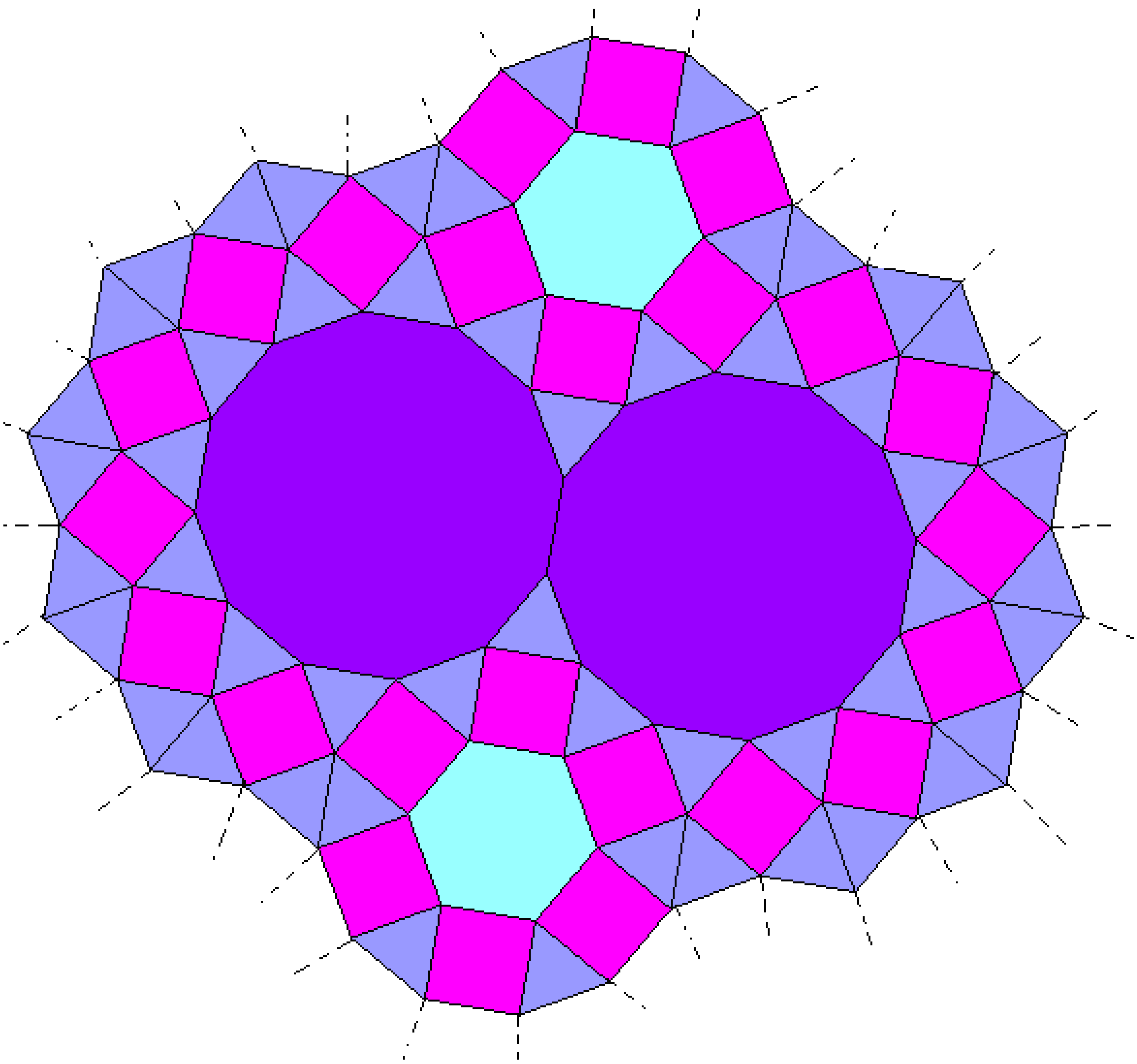


h) Pavages bord à bord avec des polygones réguliers contenant différents types de sommets.

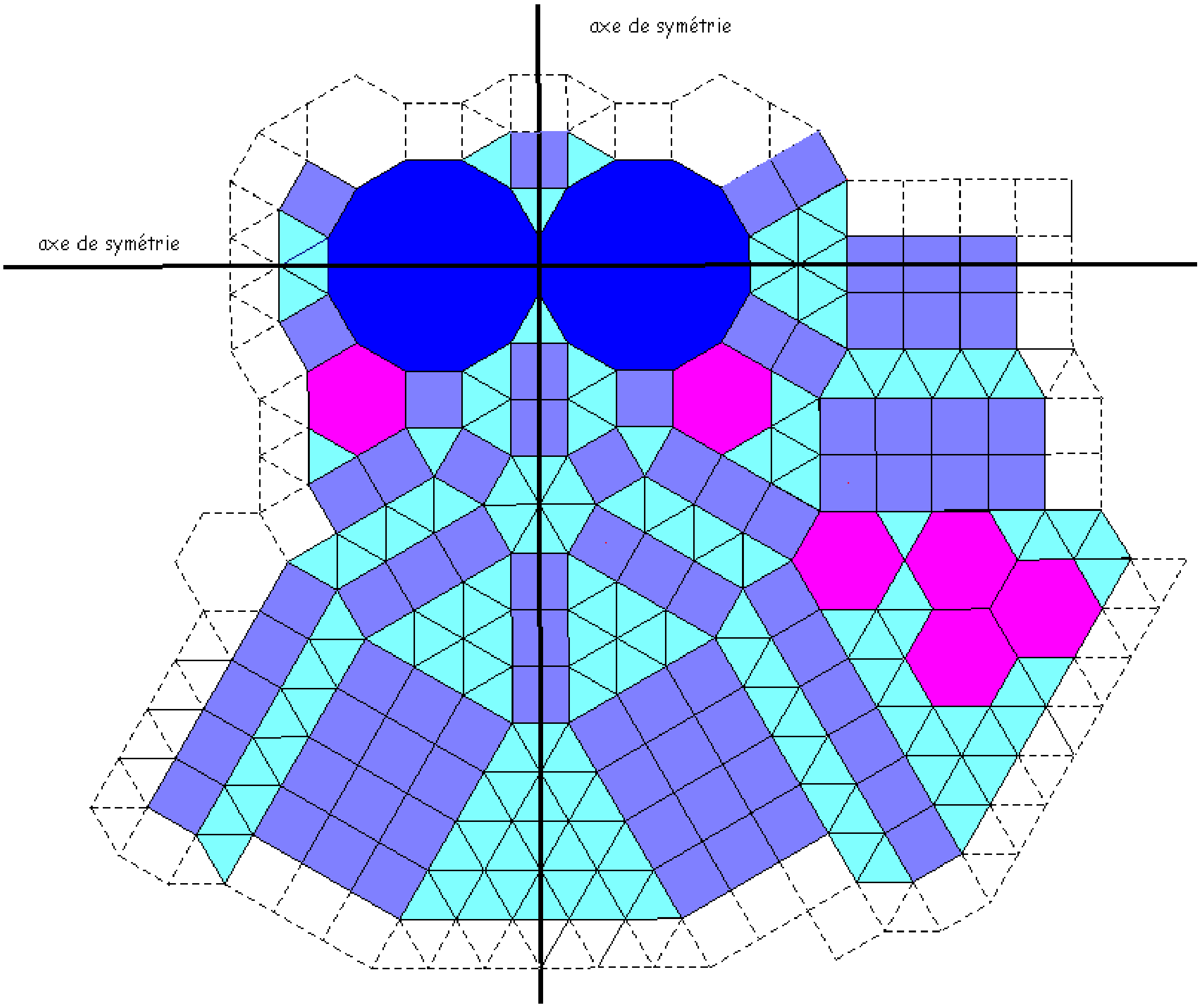
On peut construire une infinité de pavages bord à bord avec des polygones réguliers contenant différents types de sommets.

- Exemple de pavage bord à bord avec des polygones réguliers construit avec des sommets de types :

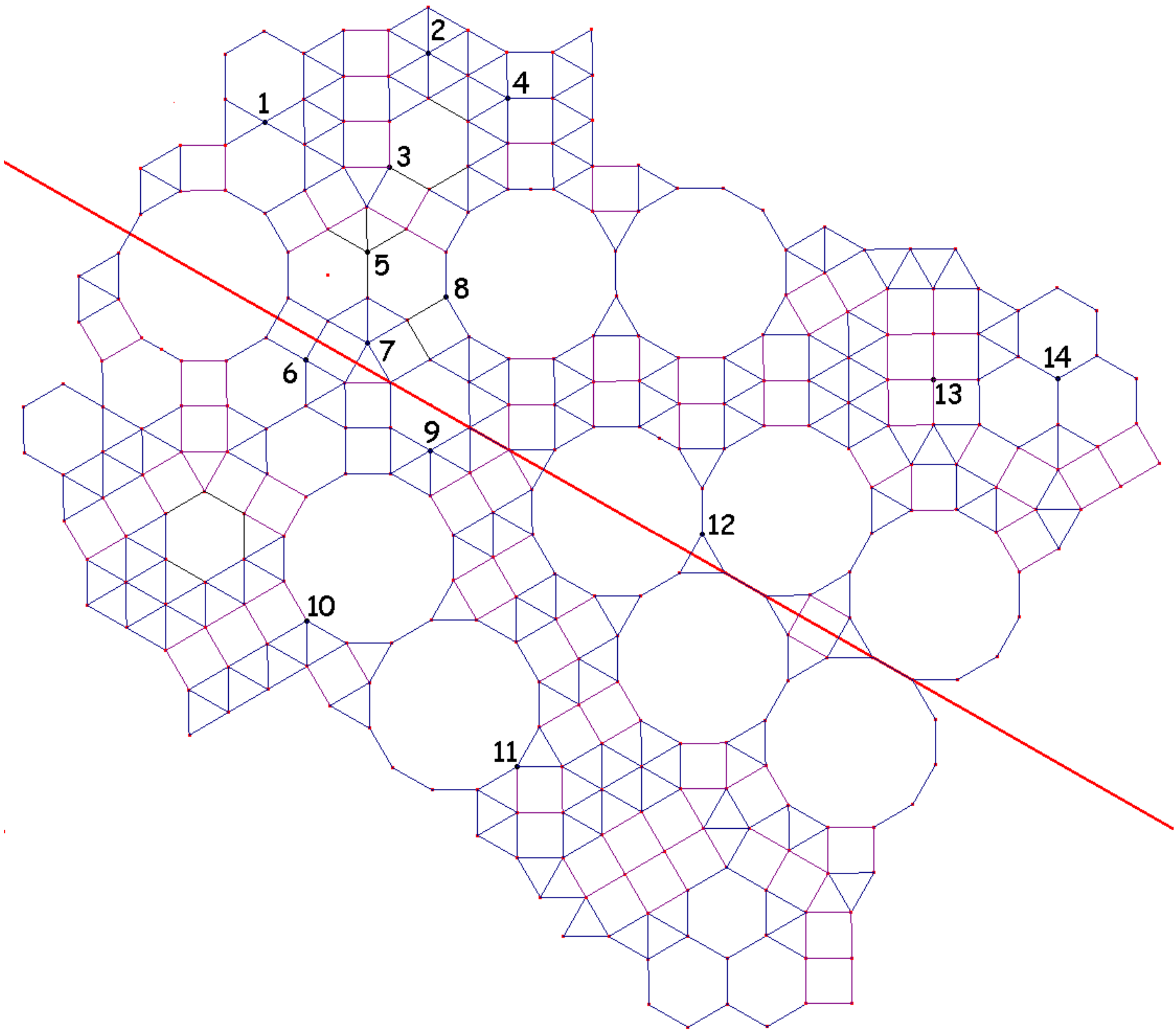
  (3-12-12) – (3-4-6-4) – (3-3-4-3-4) – (3-4-3-12)



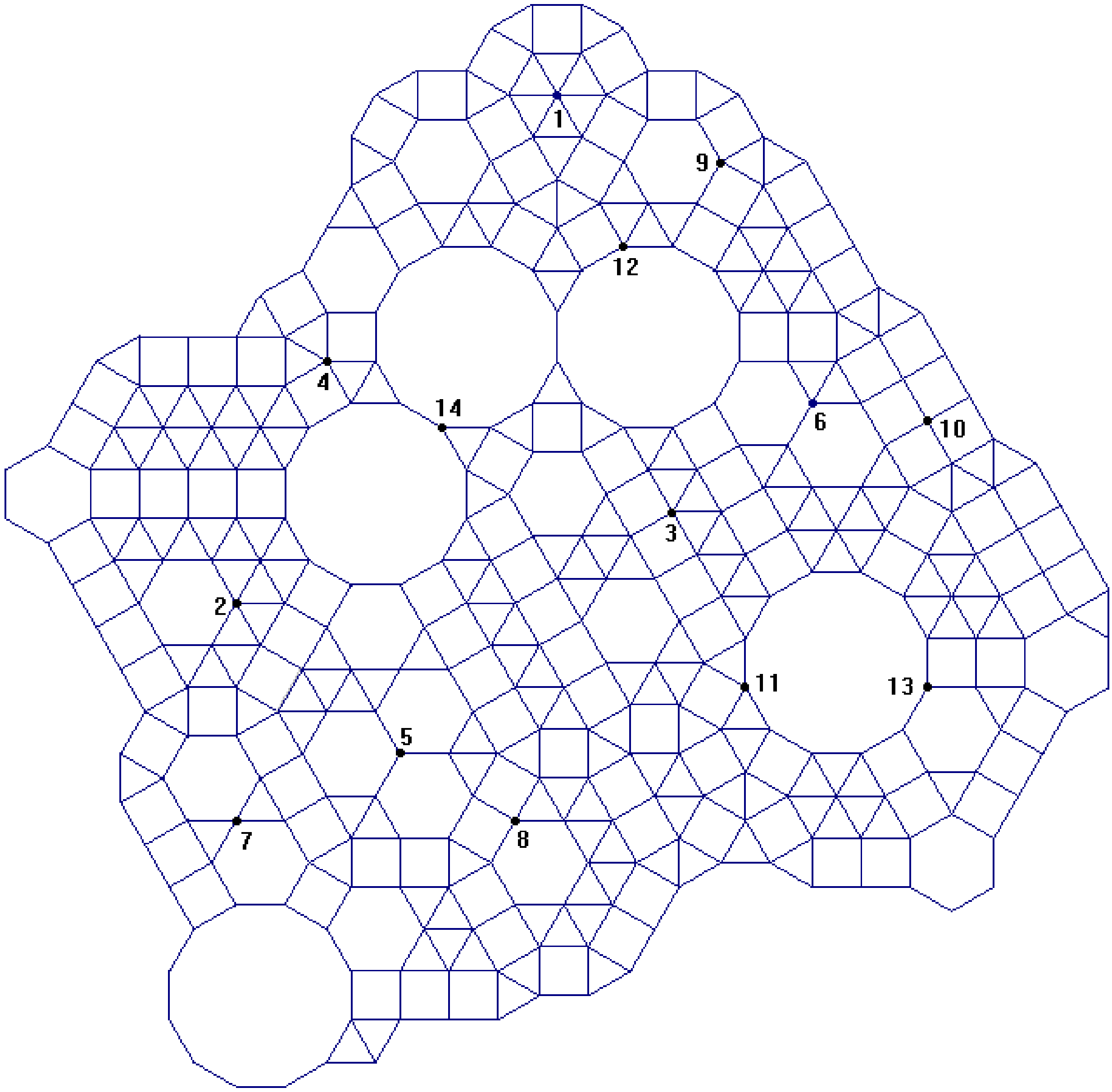
- Exemple de pavage bord à bord avec des polygones réguliers construit avec les 14 types de sommets à l'exception du pavage (4-8-8) :



Extrait de " Pavages en polygones réguliers " – mémoire en géométrie – U.L.B. – 1978 -1979 – Françoise LANDUYT



Pavage réalisé par Caroline BAUGNIES



Pavage réalisé par Angelo MALAGUARNERA

i. Pavages bord à bord particuliers avec des polygones réguliers.

Parmi les pavages bord à bord avec des polygones réguliers, certains sont dits réguliers et d'autres sont dits semi-réguliers.

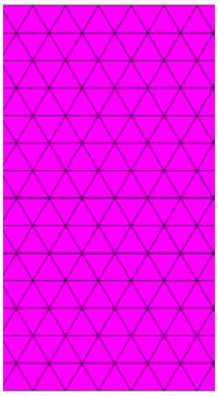
Pavages réguliers.

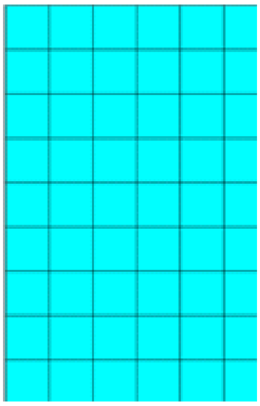
Un pavage est régulier **si et seulement si** il est transitif (1) en ses faces et en ses sommets.

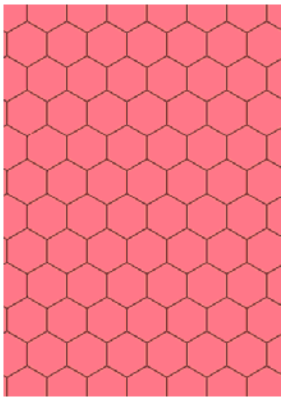
Il existe trois types de pavages bord à bord avec des polygones réguliers isométriques.

Ce sont les pavages :

(3 – 3 – 3 – 3 – 3 – 3) ; (4 – 4 – 4 – 4) et (6 – 6 – 6).







(1) Un pavage est transitif en ses sommets si et seulement si tout sommet du pavage peut être appliqué sur tout autre sommet par un automorphisme du pavage. (Intuitivement il y a la même répartition de polygones en chaque sommet)

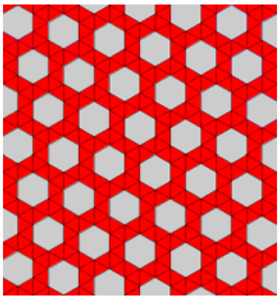
(1) Un pavage est transitif en ses faces si et seulement si toute face du pavage peut être appliquée sur toute autre face par un automorphisme du pavage. (Intuitivement tous les polygones réguliers sont isométriques)

Pavages semi-réguliers.

Un pavage est semi-régulier **si et seulement si** il est transitif en ses sommets tout en n'étant pas transitif en ses faces (c'est-à-dire constitué de polygones réguliers non tous isométriques entre-eux).

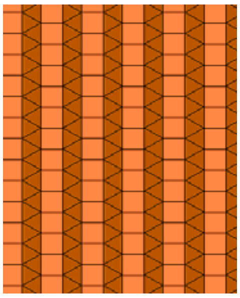
Il existe huit pavages semi-réguliers.

Parmi ceux-ci un seul, le (3 – 3 – 3 – 3 – 6) est non symétrique.

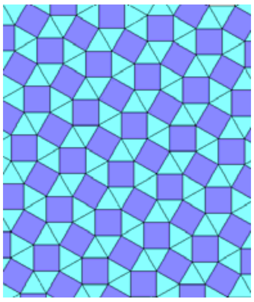


Les sept semi-réguliers symétriques sont :

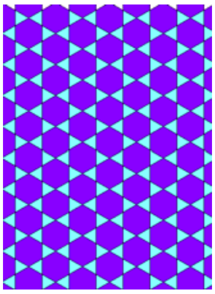
(3 - 3 - 3 - 4 - 4)



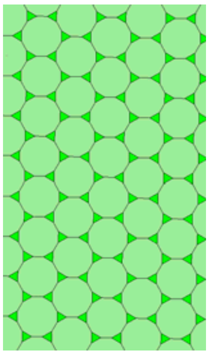
(3 - 3 - 4 - 3 - 4)



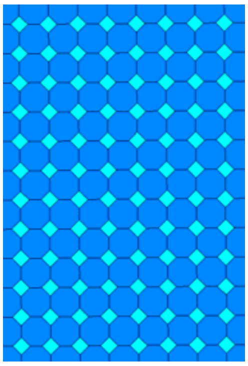
(3 - 6 - 3 - 6)



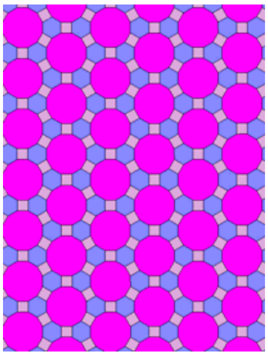
(3 – 12 – 12)



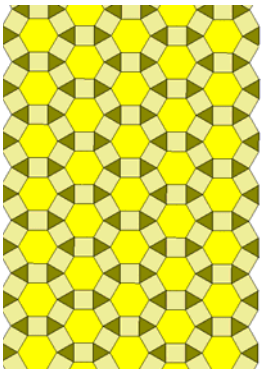
(4 , 8 , 8)



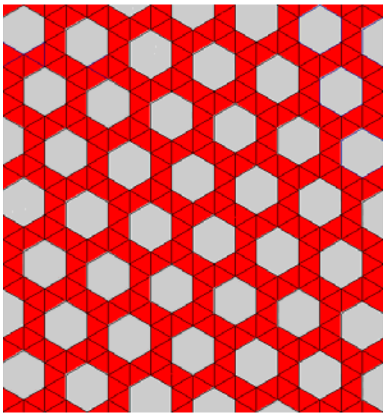
(4 - 6 - 12) ;

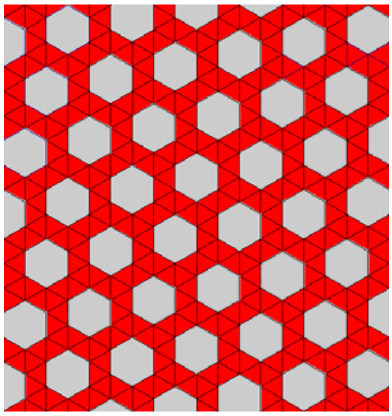


(3 – 4 – 6 – 4).



<u>Remarque</u> : Le semi-régulier (3 – 3 – 3 – 3 - 6) non symétrique apparaît sous deux formes dont chacune est l'image de l'autre par un retournement du plan. Ces deux visions sont dites énantiomorphes l'une de l'autre.

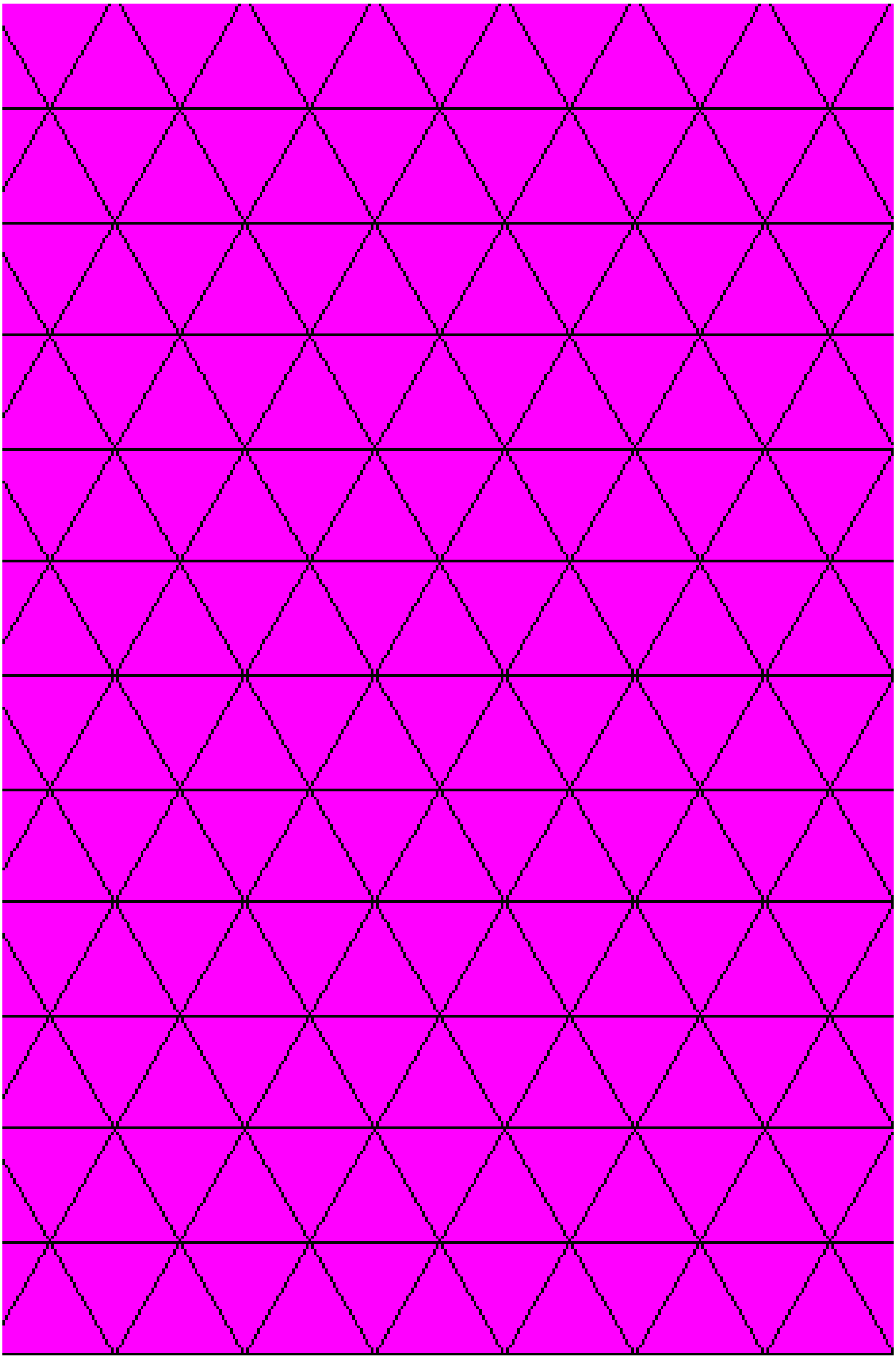




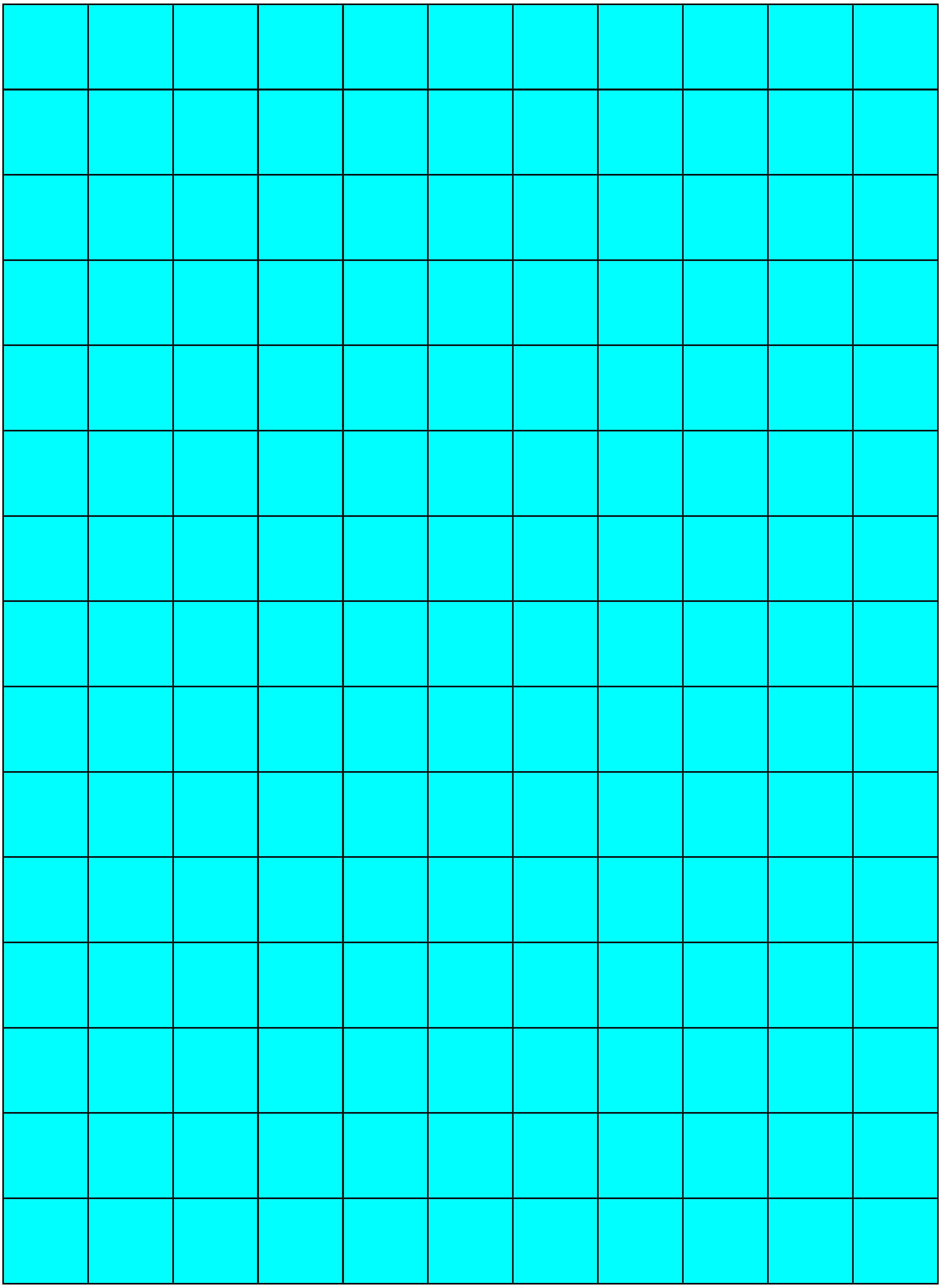
Les modèles des trois pavages réguliers et des huit semi-réguliers sont illustrés ci-après.

LES TROIS PAVAGES REGULIERS.

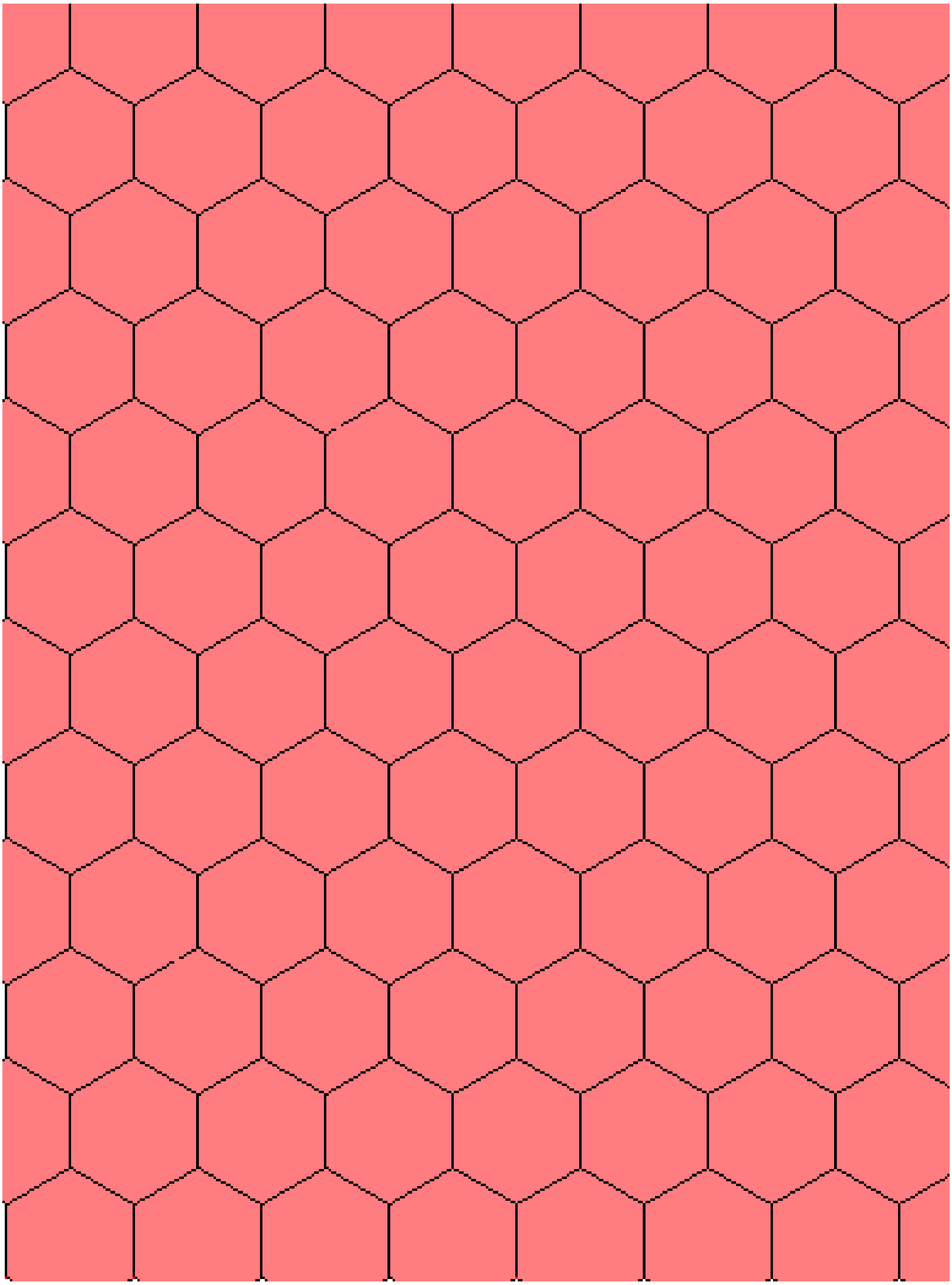
(3 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3)



(4 - 4 - 4 - 4)

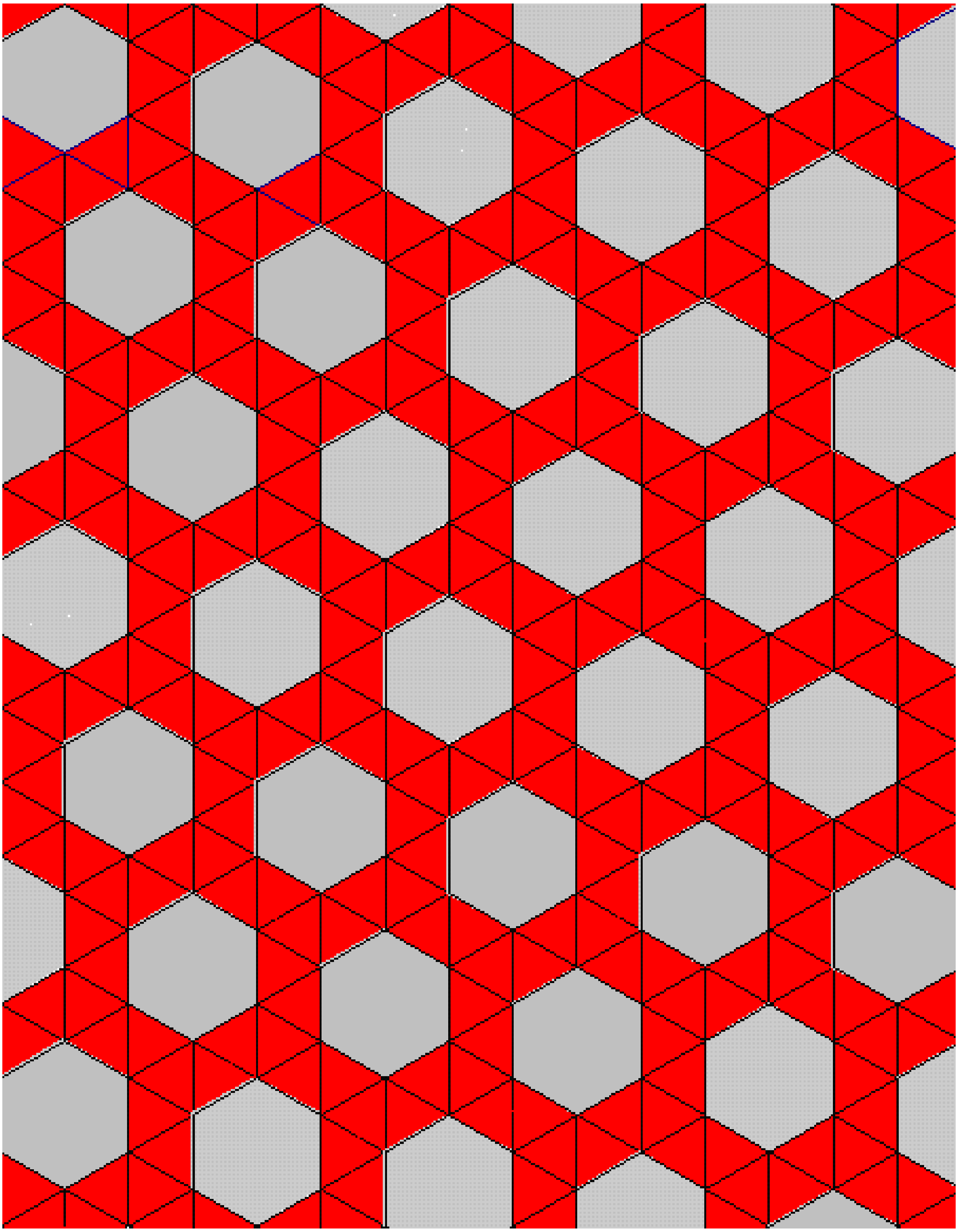


(6 - 6 - 6)

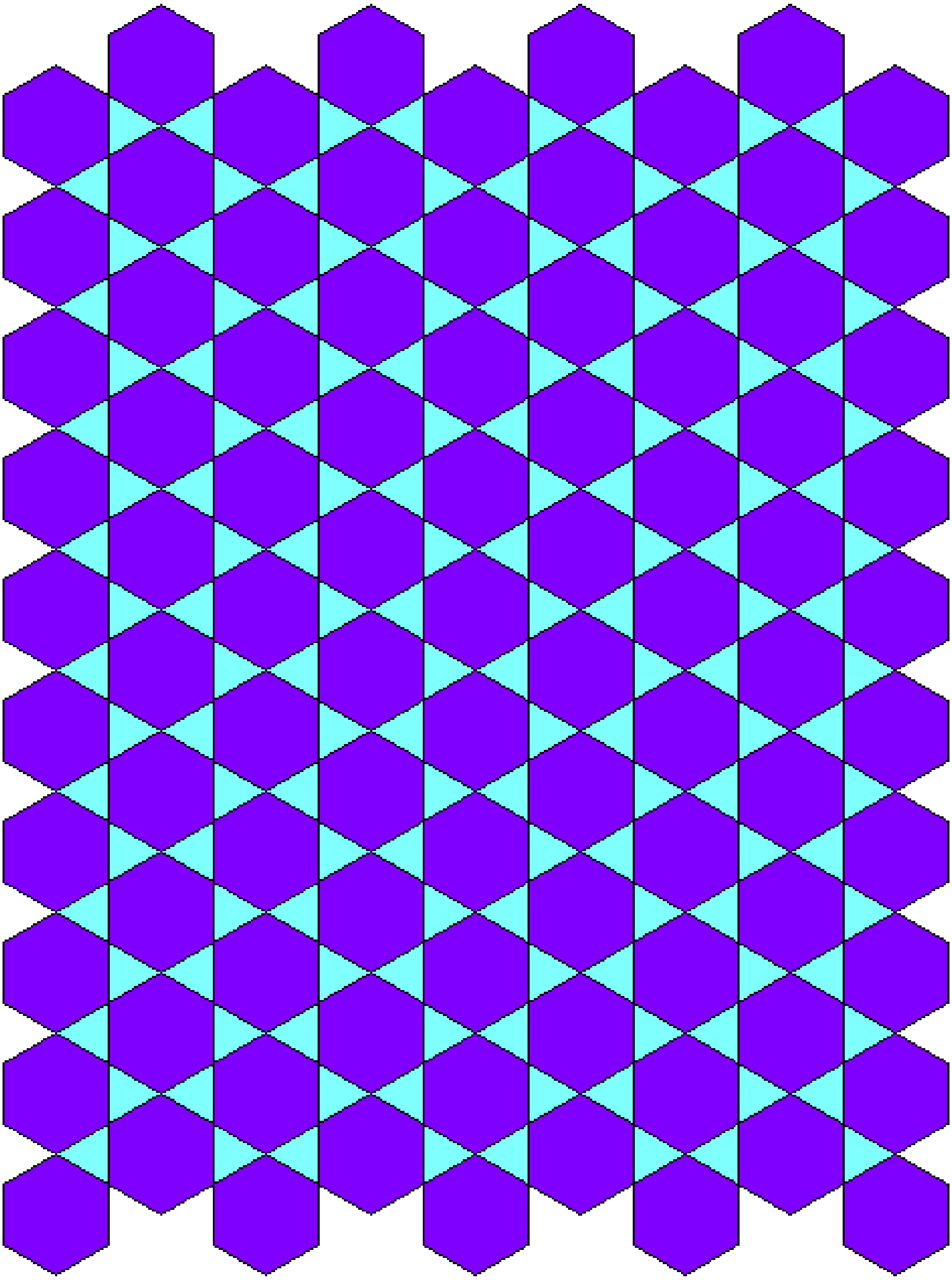


LES HUIT PAVAGES SEMI-REGULIERS.

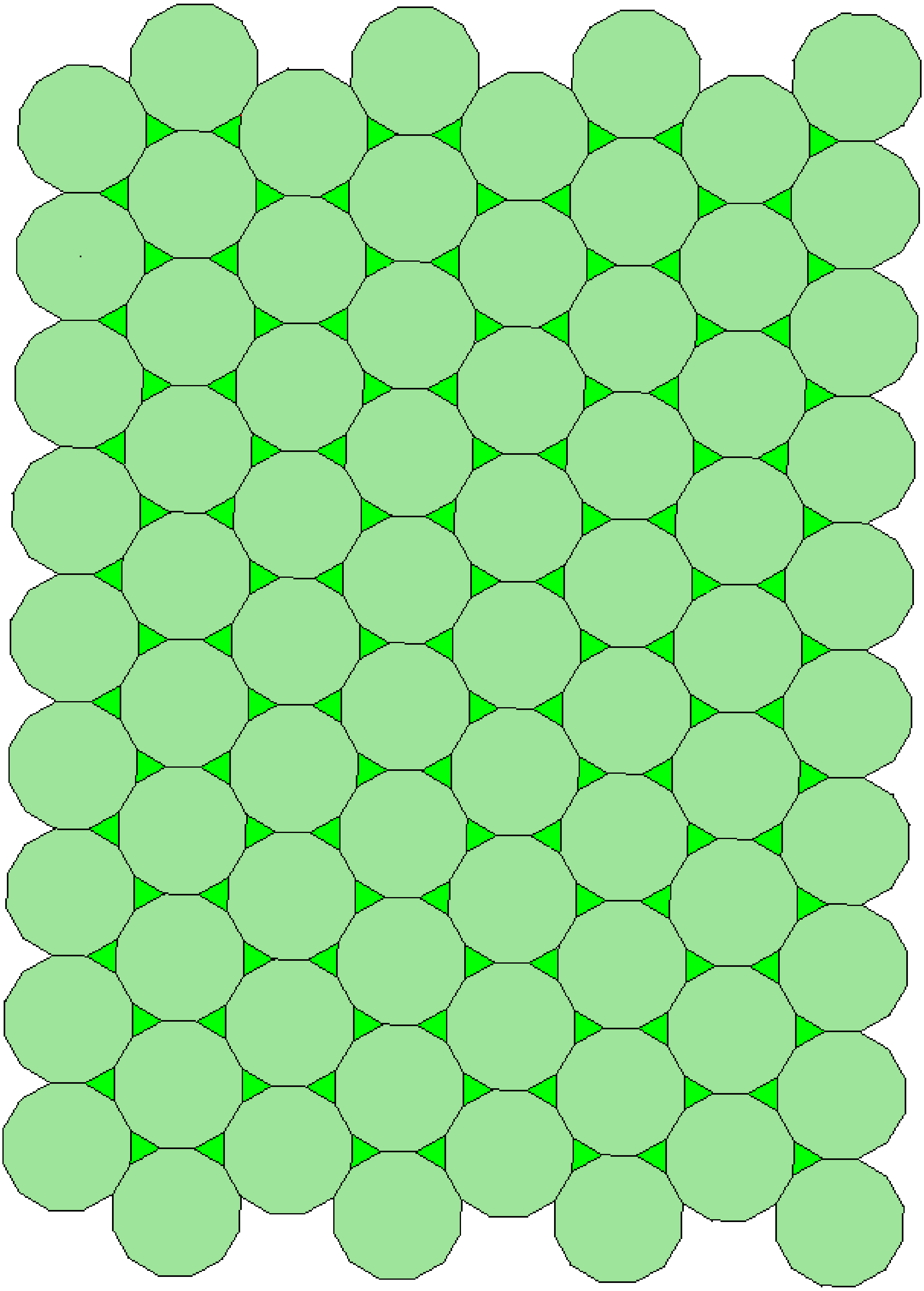
(3 - 3 - 3 - 3 - 6)



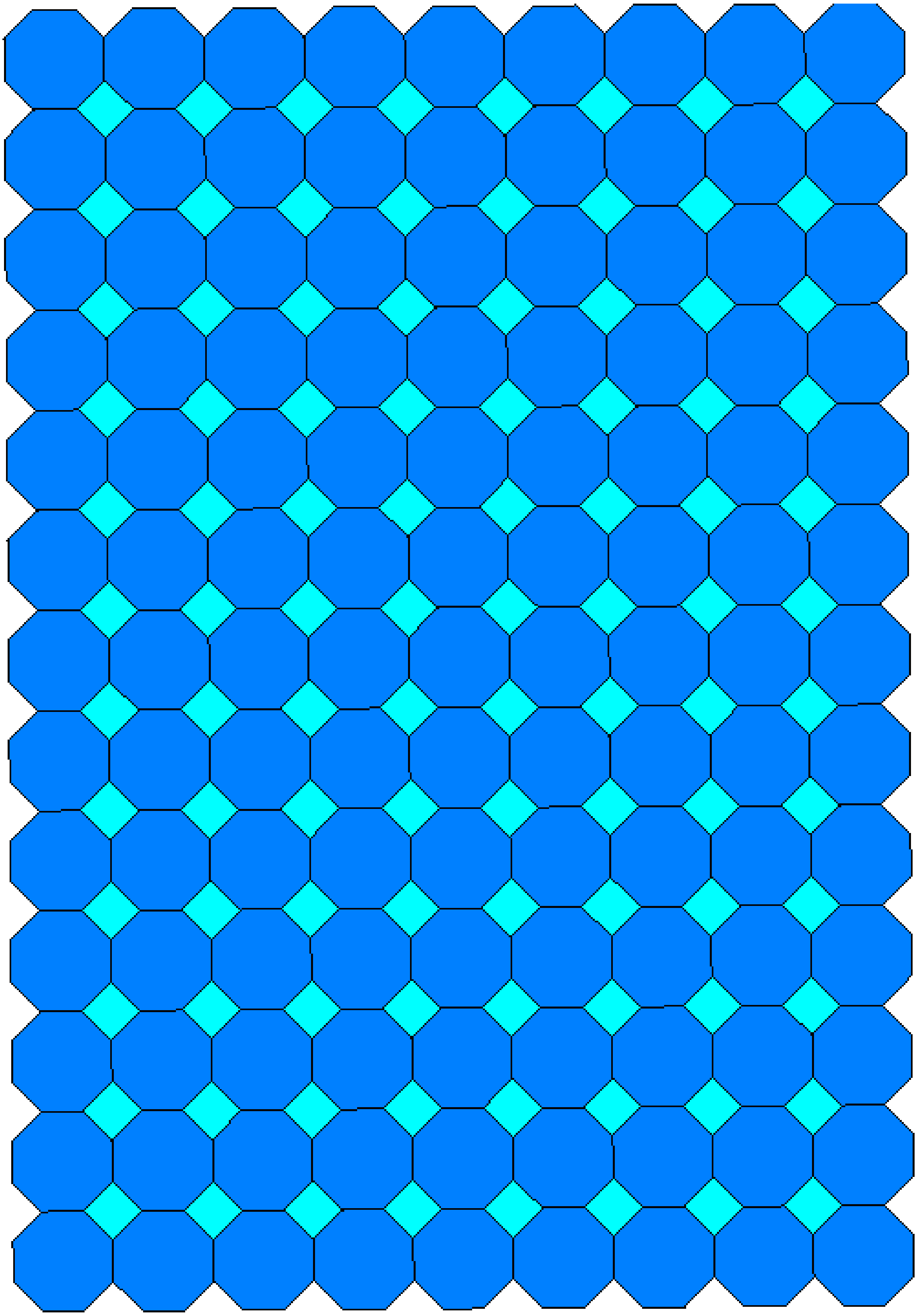
(3 - 6 - 3 - 6)



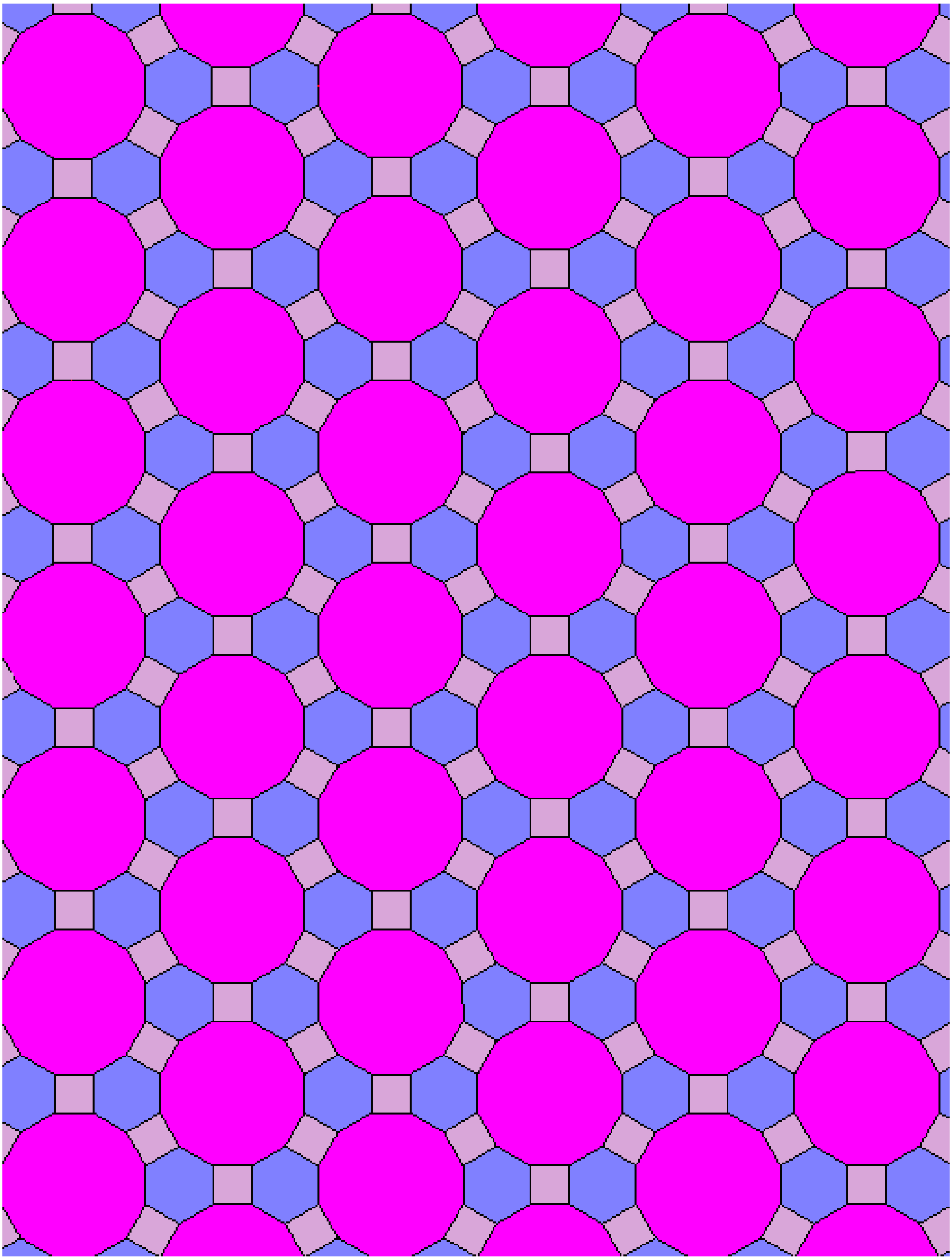
(3 - 12 - 12)



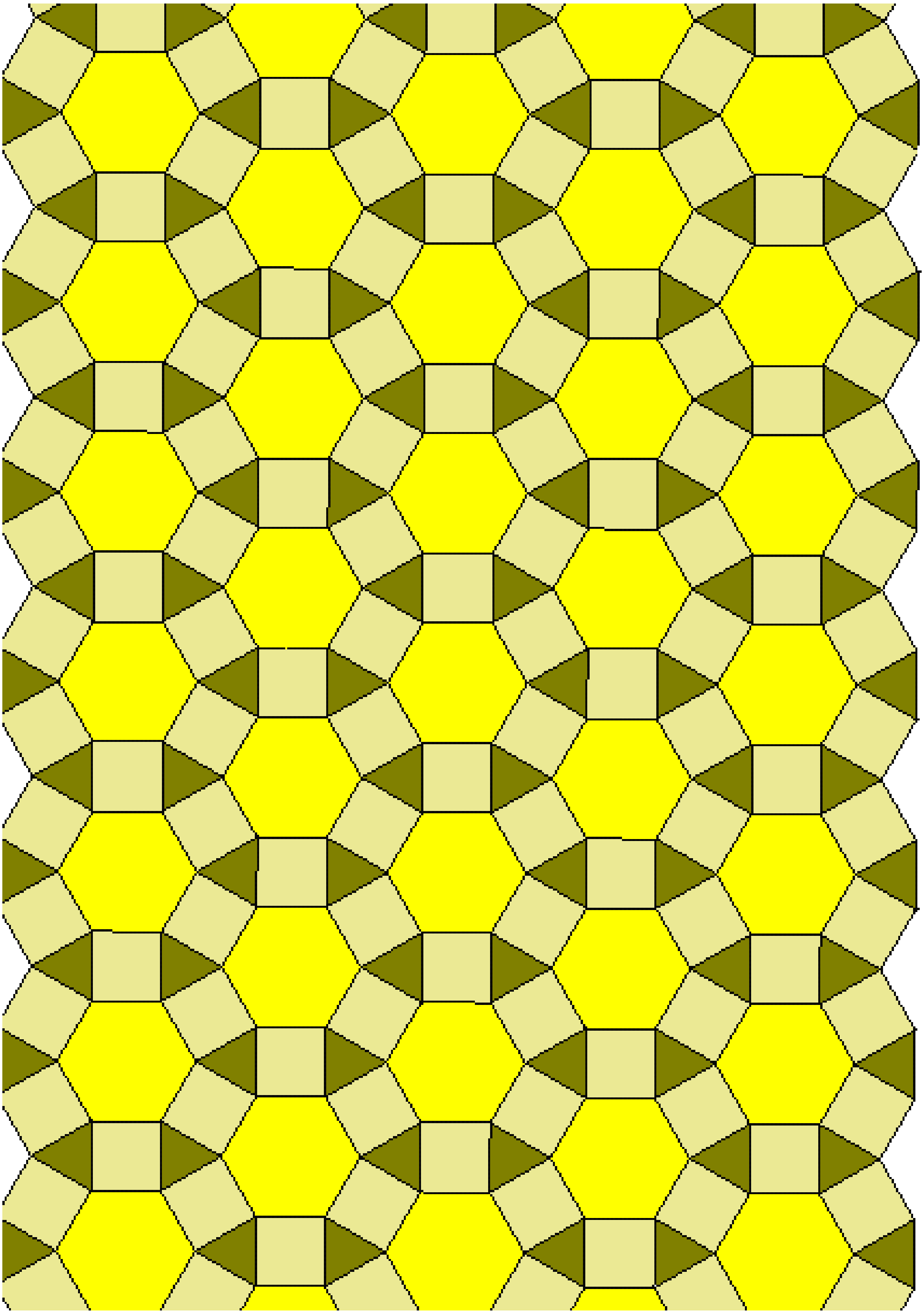
(4 - 8 - 8)



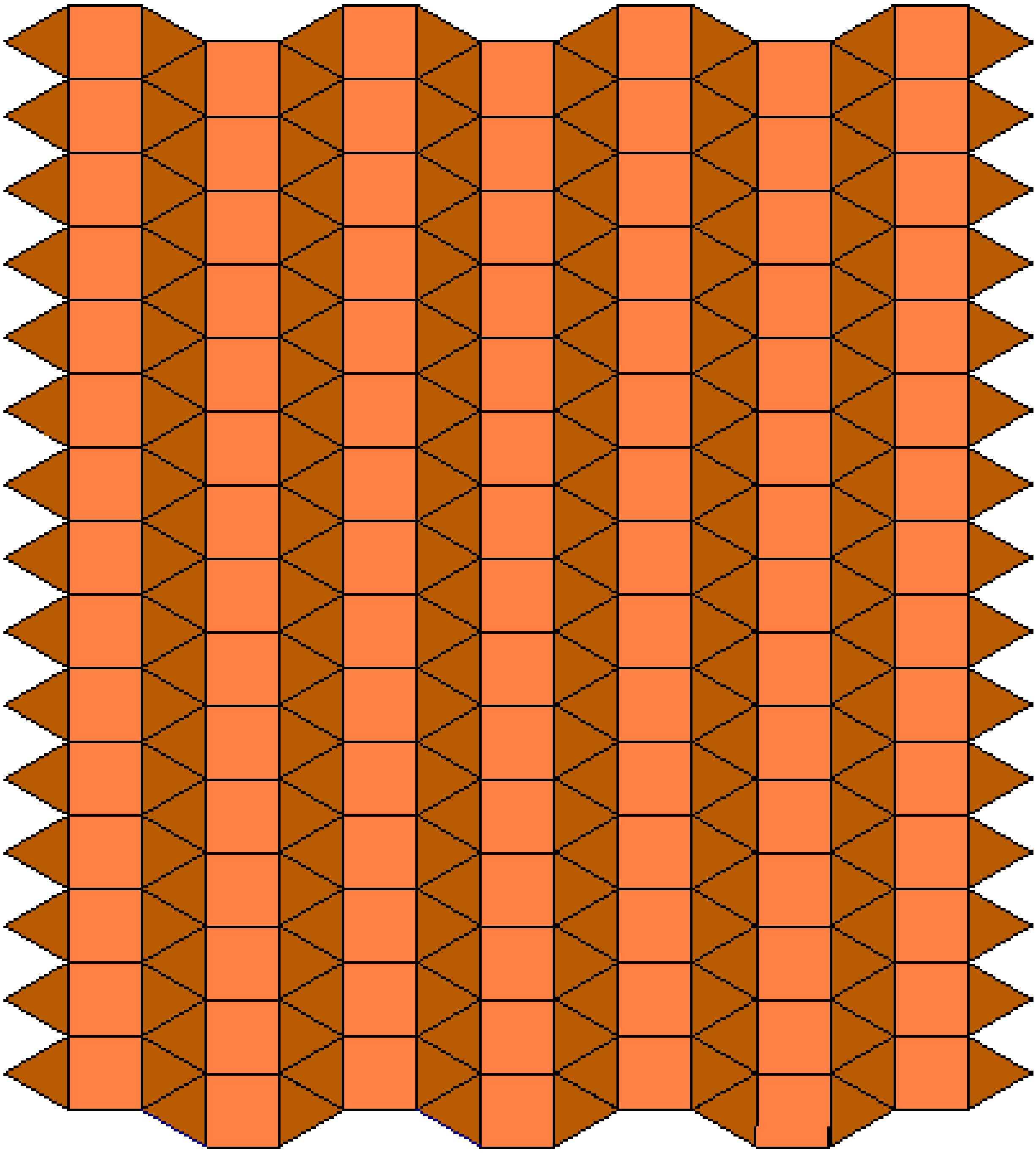
(4 - 6 - 12)



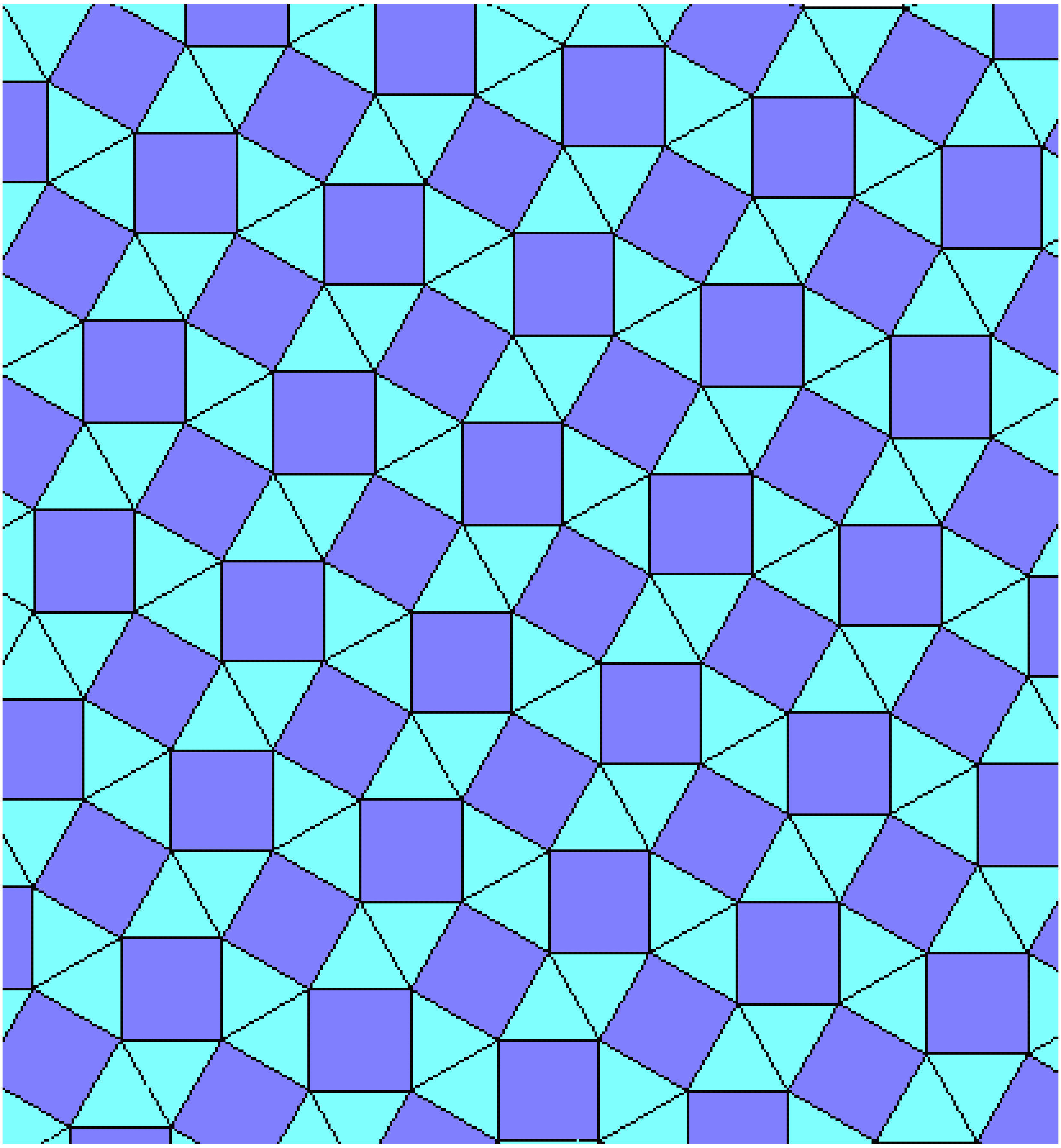
(3 - 4 - 6 - 4)



(3 - 3 - 3 - 4 - 4)



(3 - 3 - 4 - 3 - 4)

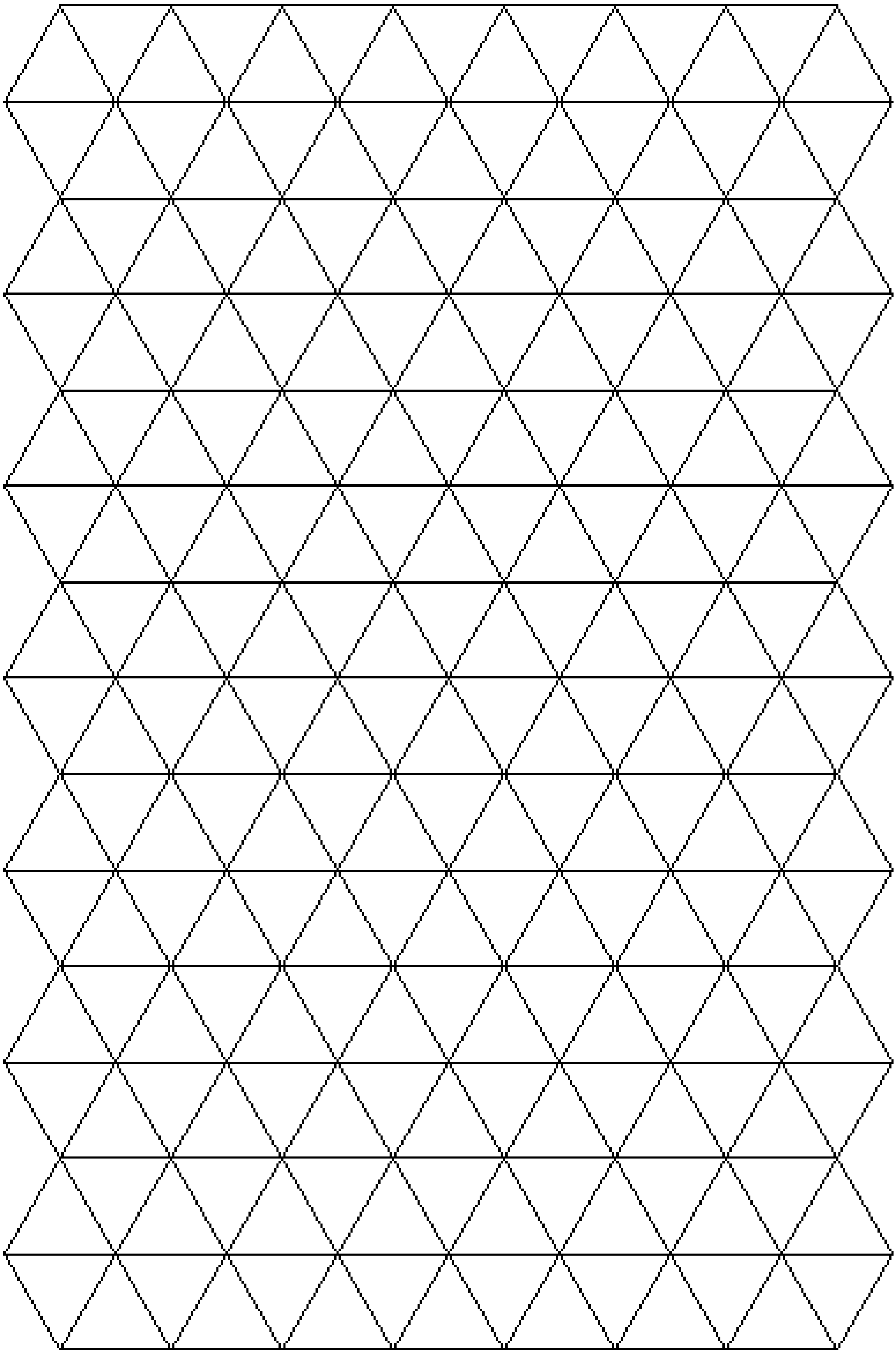


ANNEXE :

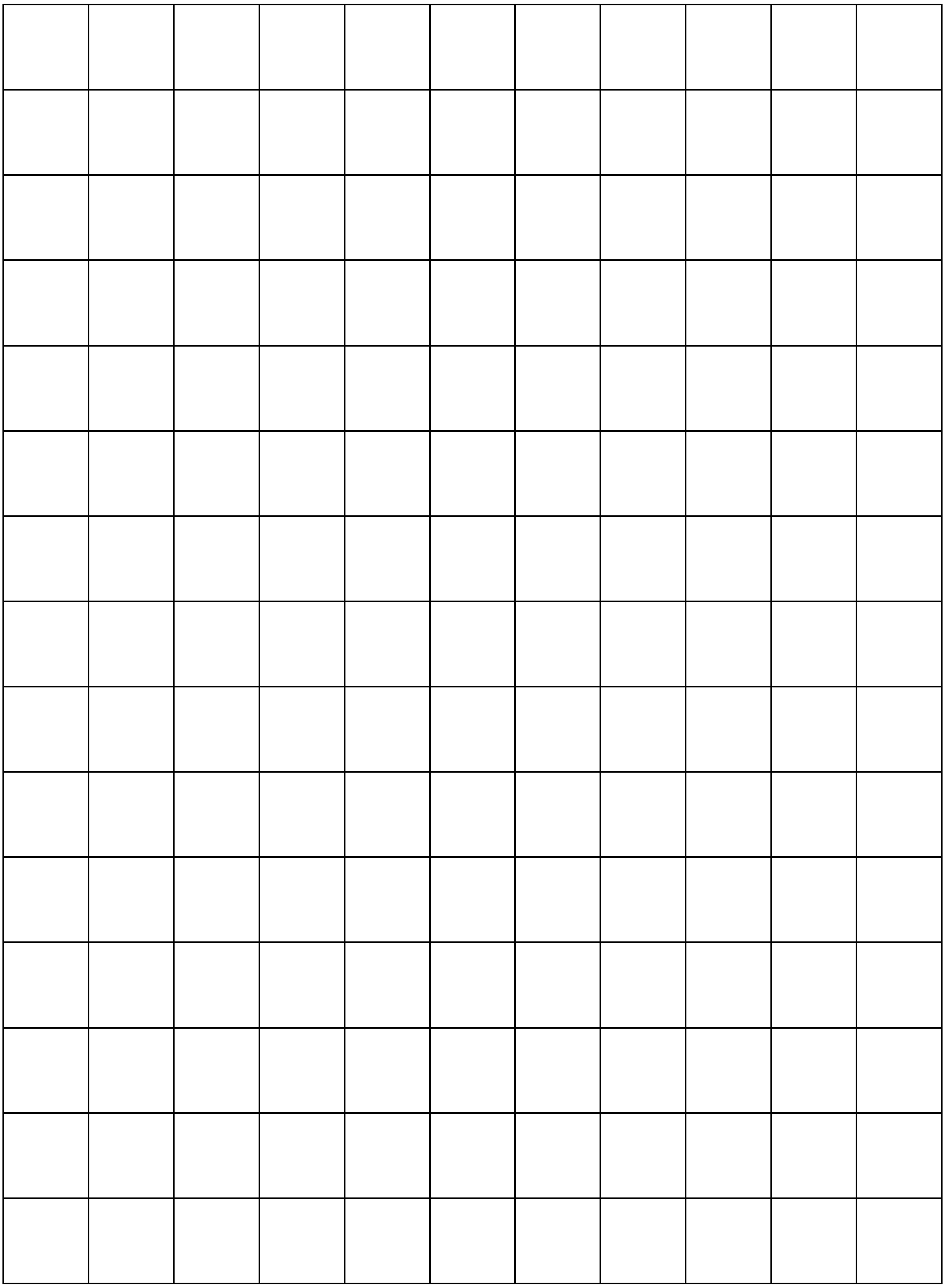
MODELE A COLORIER

LES TROIS PAVAGES REGULIERS.

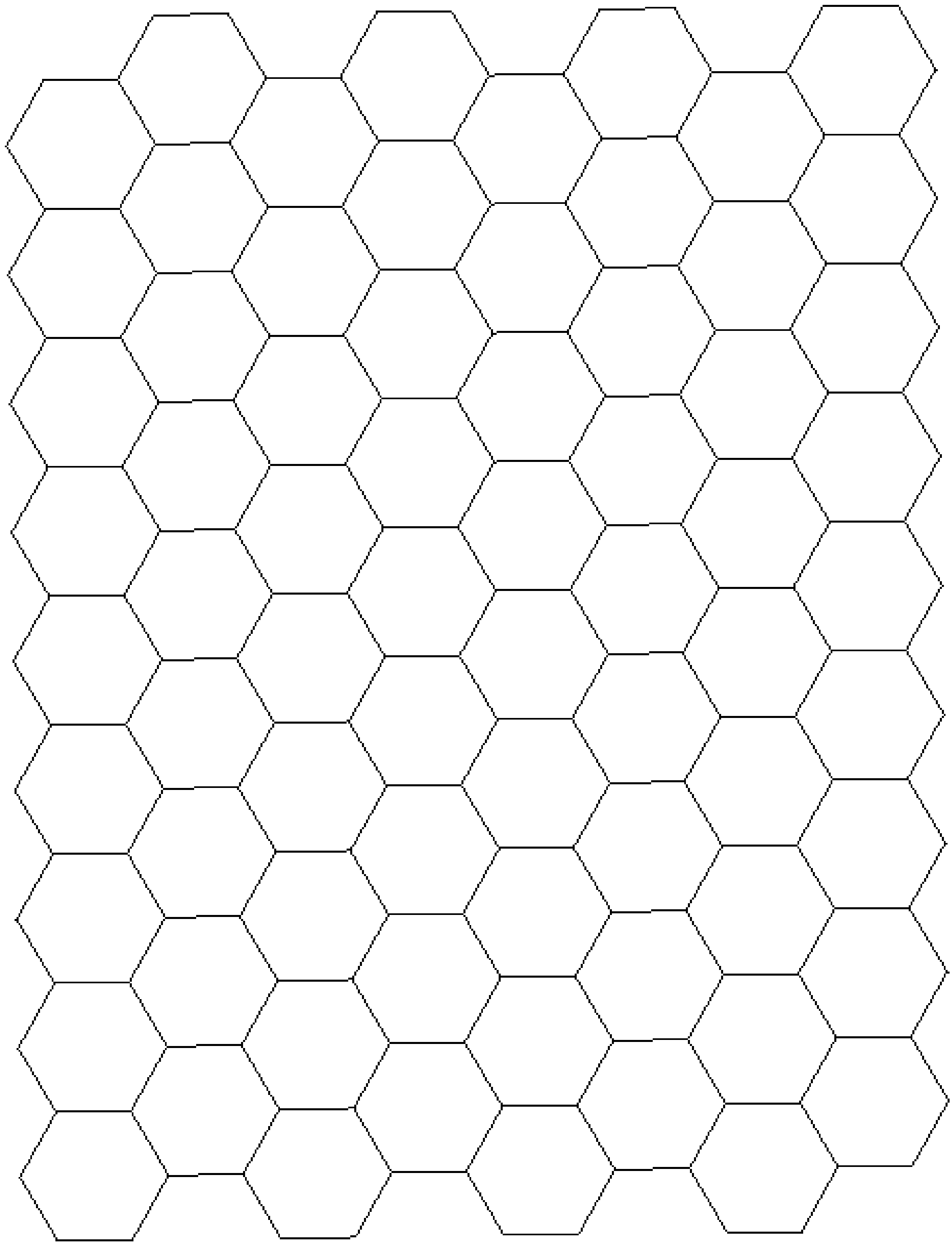
(3 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3)



(4 - 4 - 4 - 4)

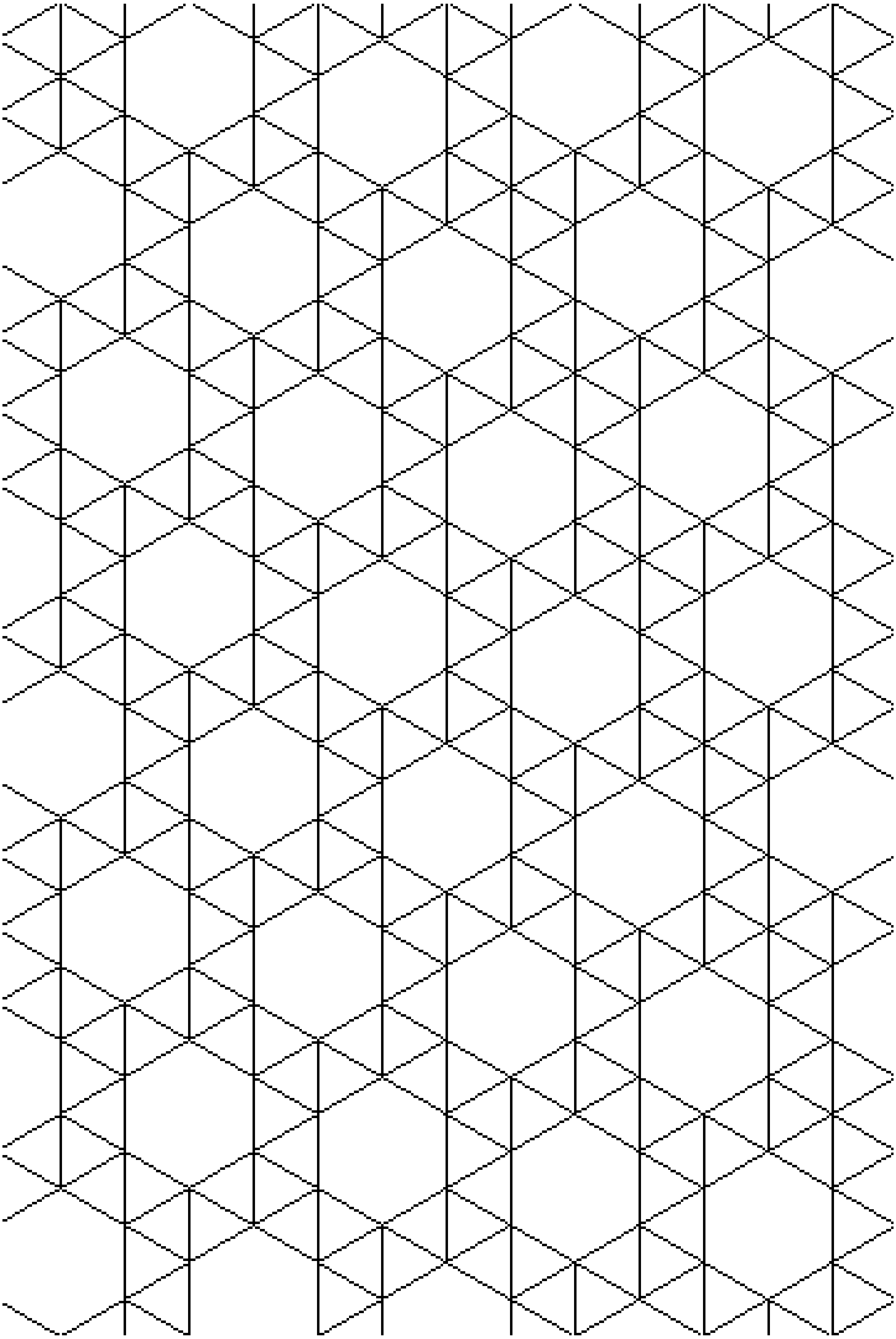


(6 - 6 - 6)

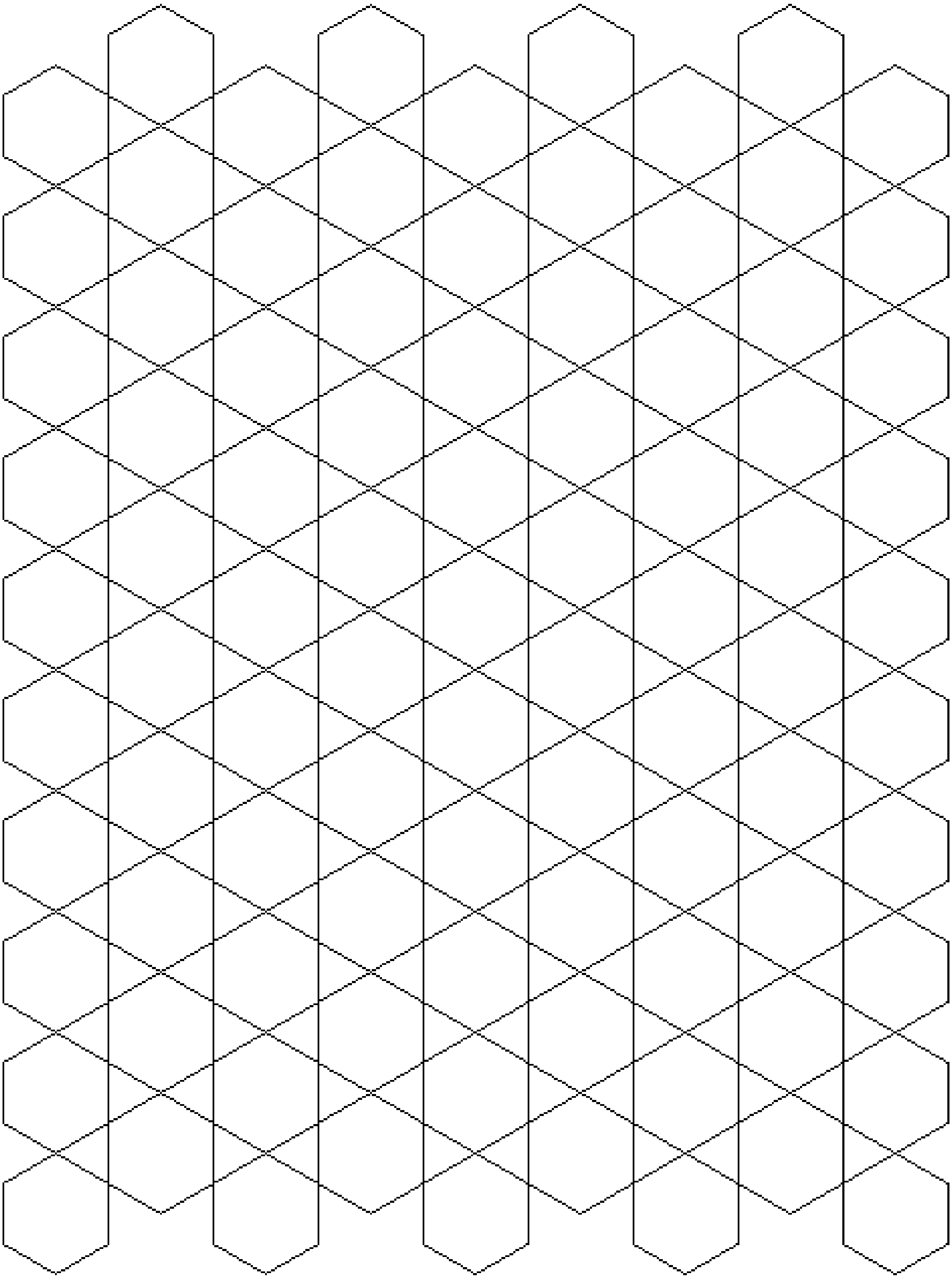


LES HUIT PAVAGES SEMI-REGULIERS.

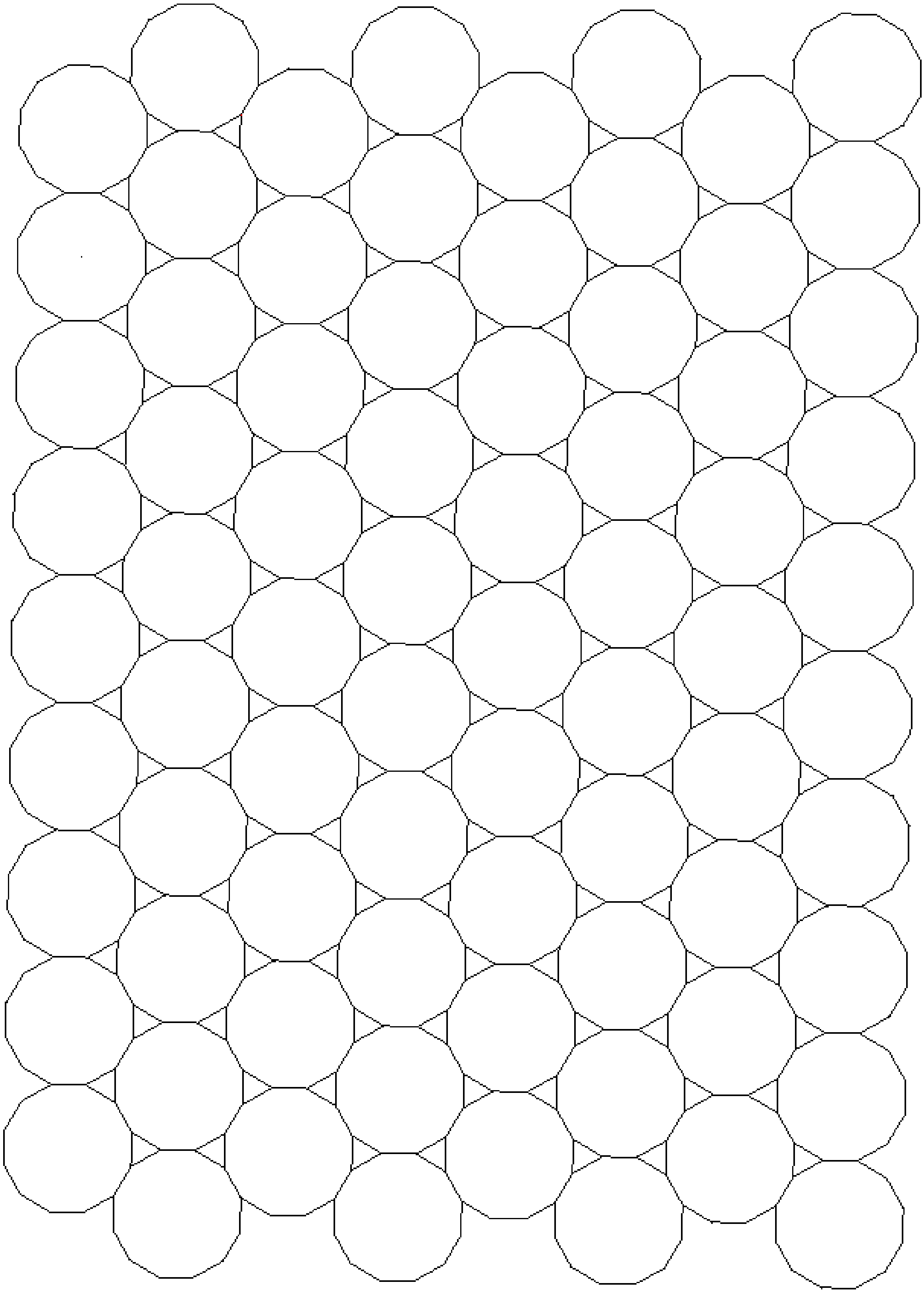
(3 - 3 - 3 - 3 - 6)



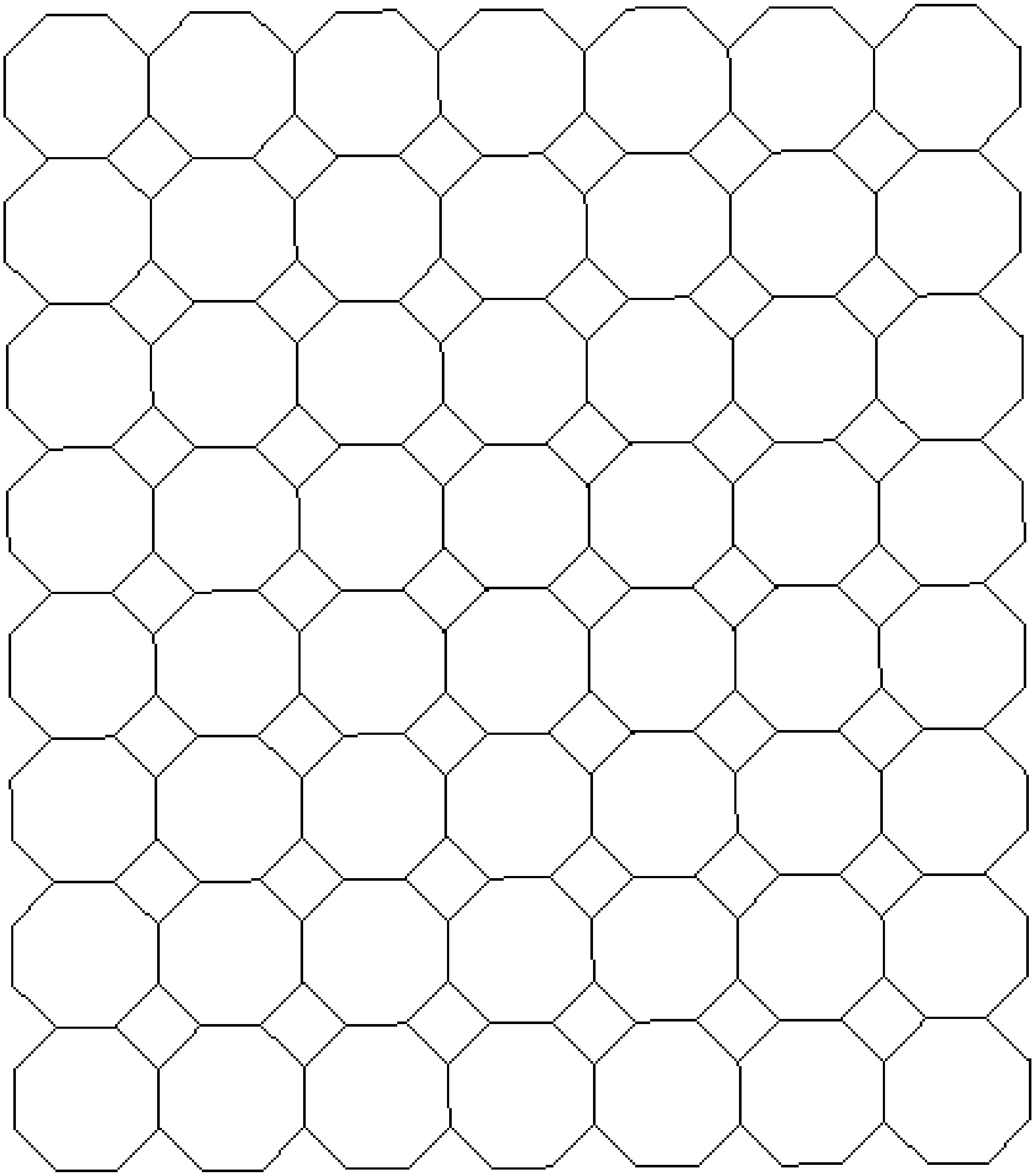
(3 - 6 - 3 - 6)



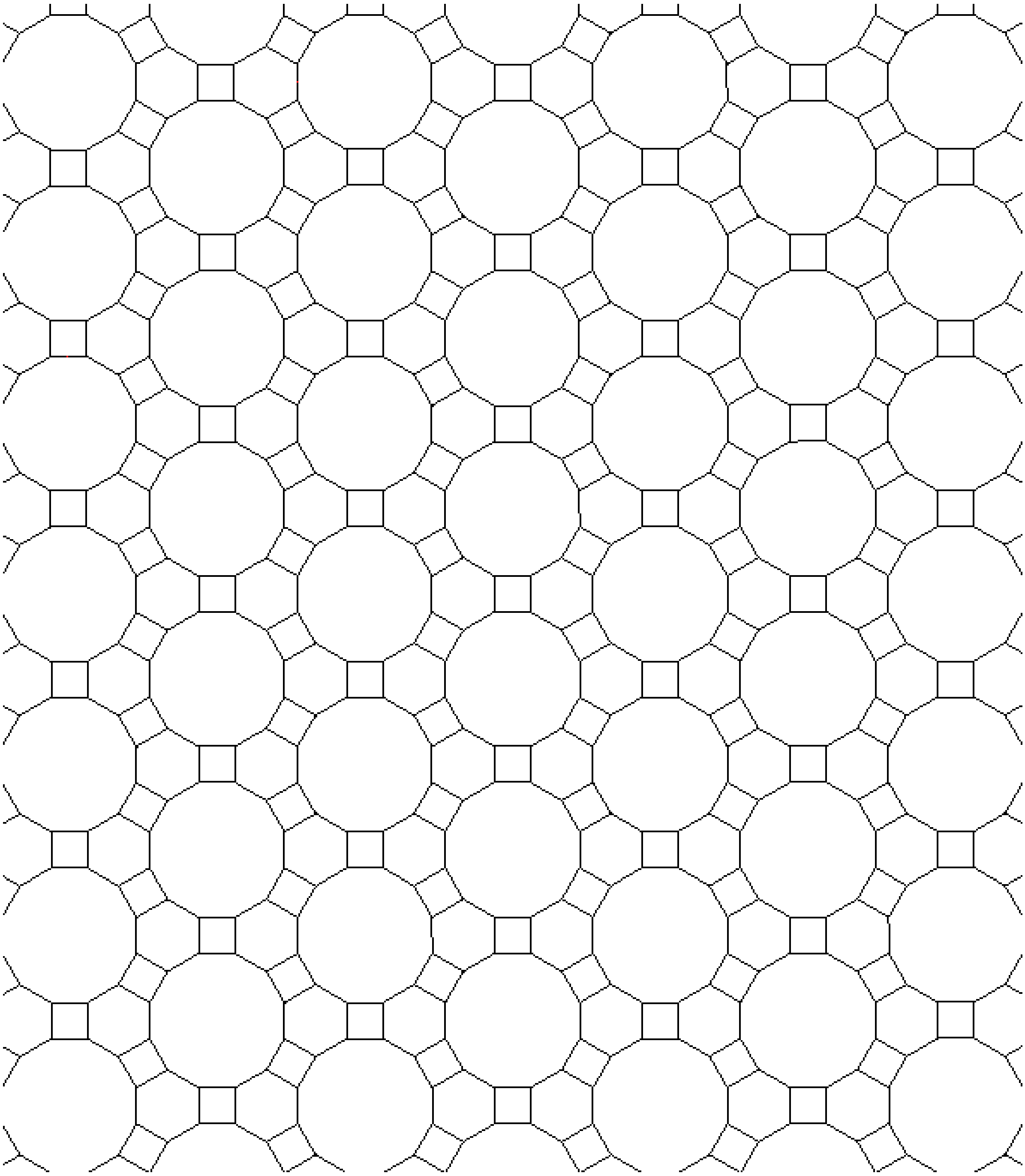
(3 - 12 - 12)



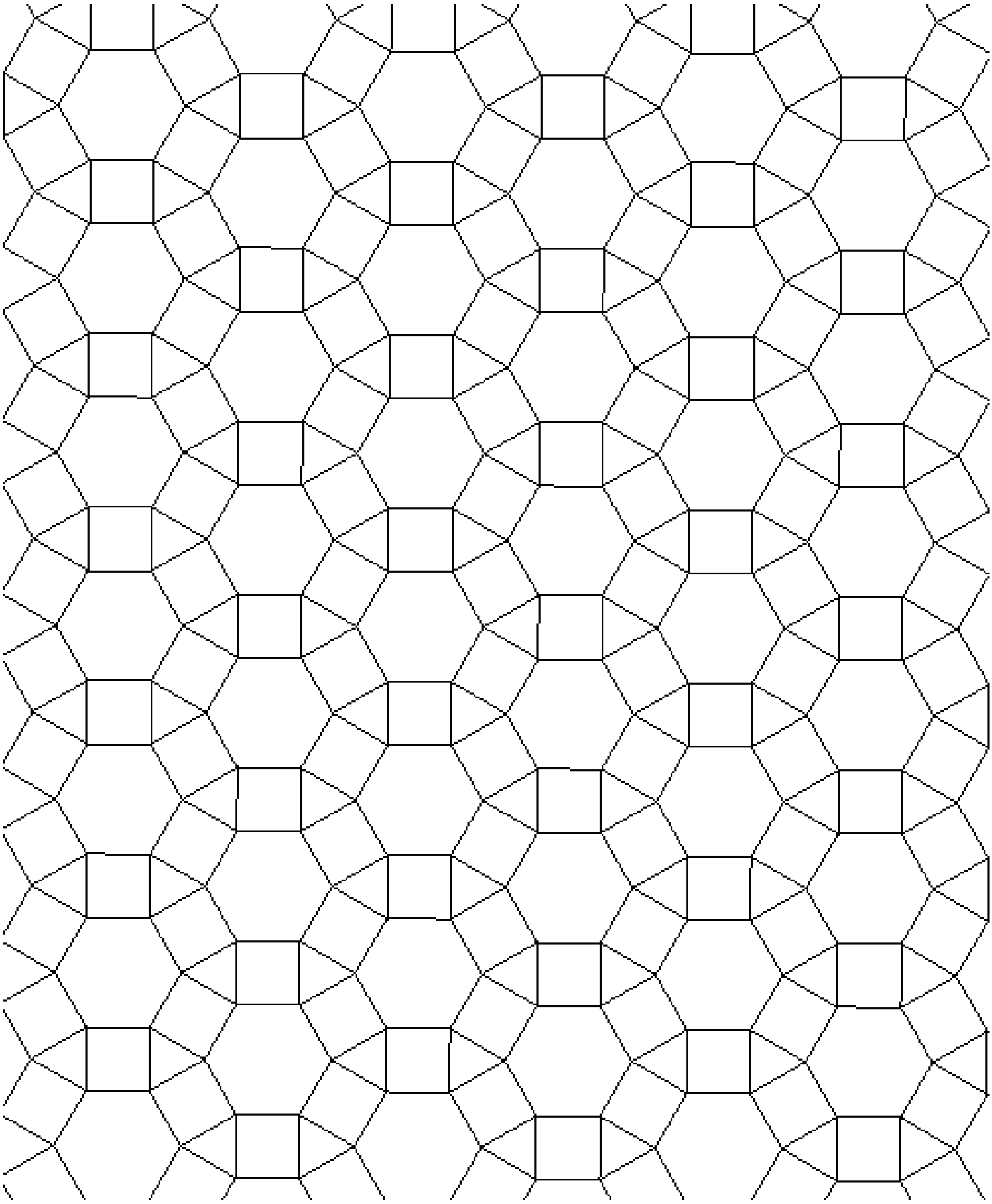
(4 - 8 - 8)



(4 - 6 - 12)



(3 - 4 - 6 - 4)



(3 - 3 - 3 - 4 - 4)