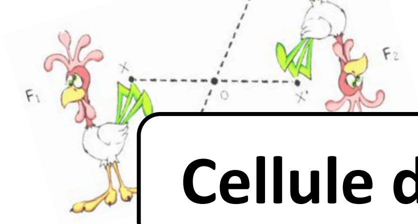
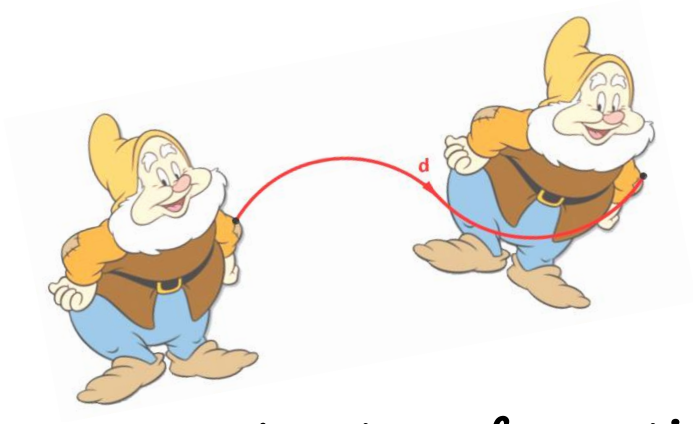


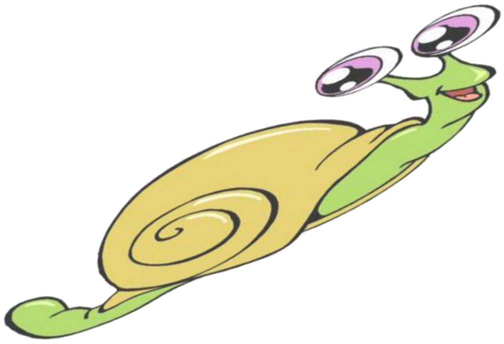
Cellule de Géométrie

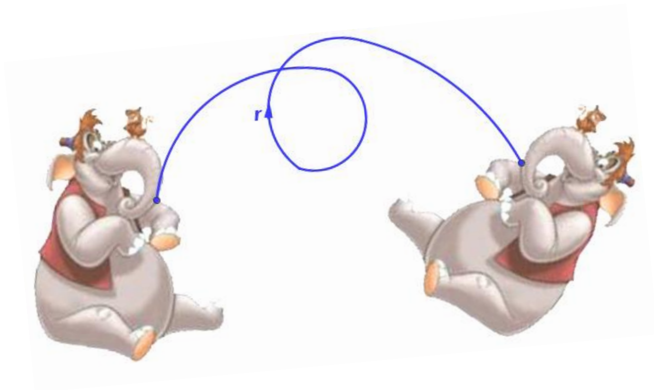
Mathématiques élémentaires



Les transformations du plan

Synthèse pour l'enseignant





Cellule de Géométrie – Catégorie pédagogique de la HEH

DEMAL Michel demal.michel@skynet.be
DRAMAIX Jérémy jeremy.dramaix@gmail.com
HIGNY Samuel higny_samuel@hotmail.com

LAFOT Cindy lafot.cindy@hotmail.com
MALAGUARNERA Angelo angelo.malaguarnera@gmail.com

Avec la collaboration de

POPELER D.

H.E.H. - Isep Mons
Boulevard Albert-Elisabeth, 2
7000 Mons (Belgique)

Mail: geometrie@hecfh.be
Site: www.hecfh.be/cellulegeometrie

Document 19

Semblablement à toutes les branches scientifiques, la géométrie élémentaire évolue. Elle est passée de l'étude des transformations (isométries – homothéties – similitudes) pour elles-mêmes à une géométrie où les transformations sont des outils qui permettent, grâce à leurs propriétés, de:

- découvrir et/ou démontrer les propriétés des objets géométriques du plan et de l'espace;
- créer des figures ayant des régularités "répétitives" (frises – rosaces – tapisseries);
- classer des objets du plan et de l'espace (cristallographie);
- percevoir si un objet est orienté ou non orienté (paires d'objets énantiomères – formes "gauche" ou "droite" d'un objet – molécules chirales);
- créer des objets (snub-cube; snub-dodécaèdre);
- …

En particulier, **les isométries planes ne sont plus actuellement définies à partir des composées de nombre pair ou impair de symétrie(s) orthogonale(s)** mais à partir d'une approche plus naturelle, à savoir: ***"Permutations qui conservent les distances"***.
Ces isométries sont scindées en deux sous-ensembles: celles qui conservent l'orientation du plan (les déplacements) et celles qui inversent l'orientation du plan (les retournements).

Dans ce document, nous décrivons de manière succincte et intuitive les principales transformations du plan qui interviennent en géométrie synthétique élémentaire pour les 5 à 18 ans. Il sera suivi d'autres publications qui détailleront du point de vue théorique les notions ici abordées de manière intuitive.

Plan

Figures déformées – figures non déformées et transformations du plan

1. Transformations du plan qui conservent la forme des figures

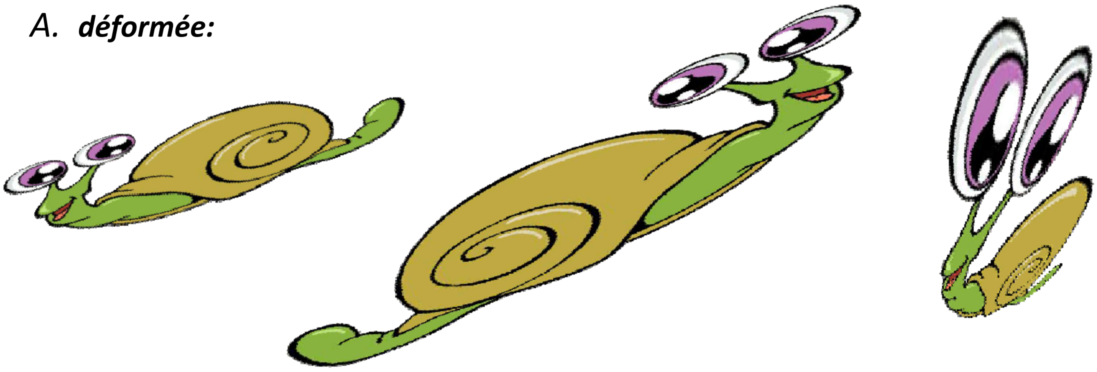
1.1. Figures planes déformées – figures planes non déformées

Après transformation du plan, une figure plane est soit déformée, soit non déformée (non déformée = *semblable ou proportionnelle*).

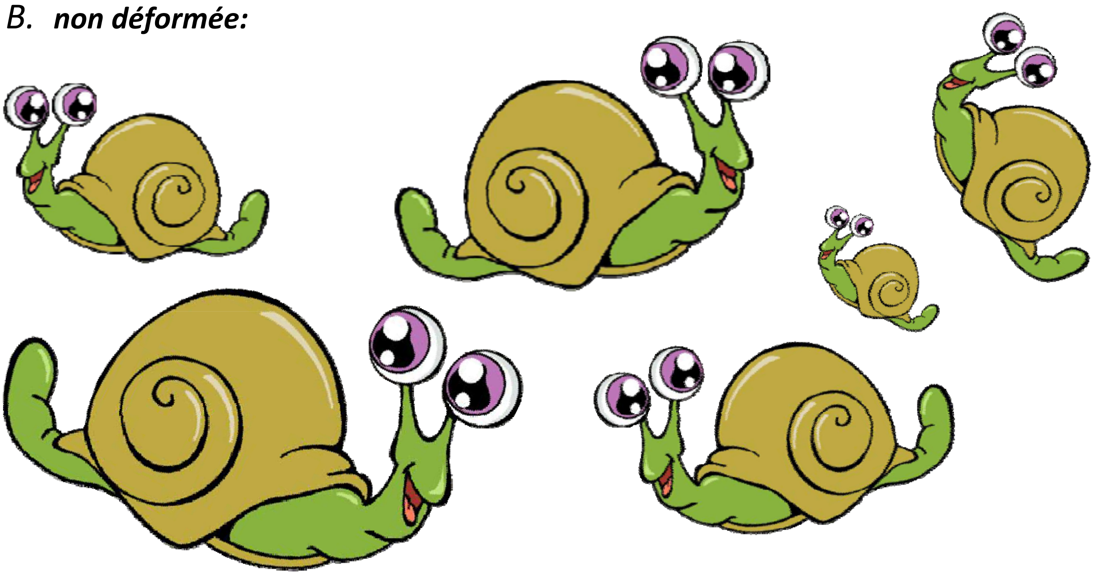
Soit une figure initiale:

Après transformation, la figure initiale peut être:

A. ***déformée:***



B. ***non déformée:***



Une figure plane non déformée est appelée figure semblable ou encore figure proportionnelle à la figure initiale

1.2. Figures planes non déformées ou semblables ou proportionnelles

Pour obtenir une figure plane semblable (ou proportionnelle ou non déformée) à partir d'une figure initiale il faut et il suffit de **multiplier toutes les dimensions** de la figure initiale **par un même nombre positif**. Ce nombre est appelé coefficient de proportionnalité ou rapport de proportionnalité.

Exemple:

Figure 1

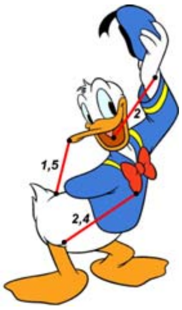
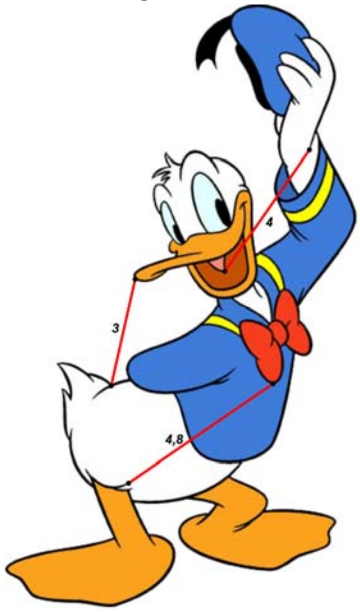


Figure 2



- ✓ Pour passer de la figure 1 à la figure 2, toutes les dimensions ont été multipliées par 2.

  Les figures sont donc proportionnelles et le rapport de proportionnalité de la figure 1 vers la figure 2 vaut 2.

- ✓ Pour passer de la figure 2 à la figure 1, toutes les dimensions ont été multipliées par ½.

  Les figures sont donc proportionnelles et le rapport de proportionnalité de la figure 2 vers la figure 1 vaut ½.

1.3. Figures semblables isométriques – agrandies – réduites

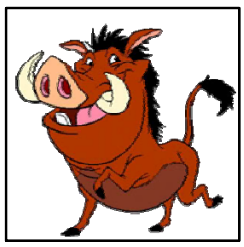
Lorsque deux figures sont semblables, trois cas sont possibles:

1.3.1. Soit la figure semblable (*F_2*) est isométrique par rapport à la figure initiale (*F_1*)

Deux figures planes sont isométriques si on peut "passer" de l'une à l'autre à l'aide d'un transparent (Rmq: sur le transparent se trouve une copie de la figure initiale).

F_1

F_2



Transparent

Dans cet exemple, la figure F_2 est "isométrique-retournée" par rapport à la figure F_1

1.3.2. Soit la figure semblable (F_3) est agrandie par rapport à la figure initiale (F_1)

F_1

F_3

Dans cet exemple, la figure F_3 est "semblable agrandie-déplacée" par rapport à la figure F_1

1.3.3. Soit la figure semblable (F_4) est réduite par rapport à la figure initiale (F_1)

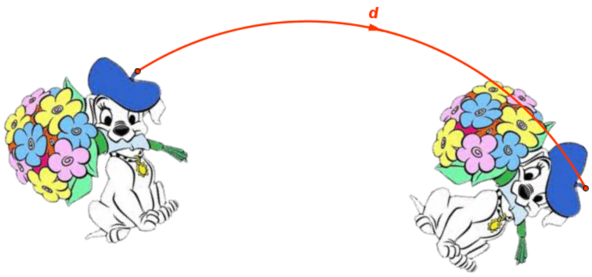
F_1

F_4

Dans cet exemple, la figure F_4 est "semblable réduite-retournée" par rapport à la figure F_1

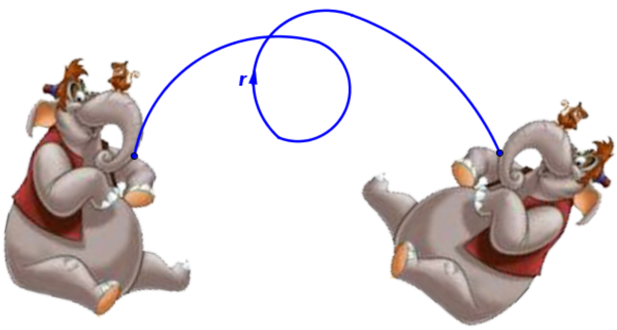
1.4. Figures isométriques déplacées et figures isométriques retournées (approche intuitive)

- ✓ Deux figures planes sont superposables par un **déplacement (d)** du plan si on peut passer de l'une à l'autre, à l'aide d'un transparent, sans que celui-ci ne quitte le plan.



Transparent

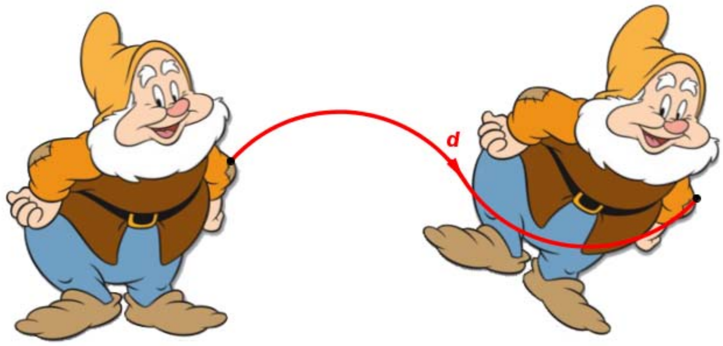
- ✓ Deux figures planes sont superposables par un **retournement (r)** du plan si on peut passer de l'une à l'autre, à l'aide d'un transparent, en le retournant une seule fois.



Transparent

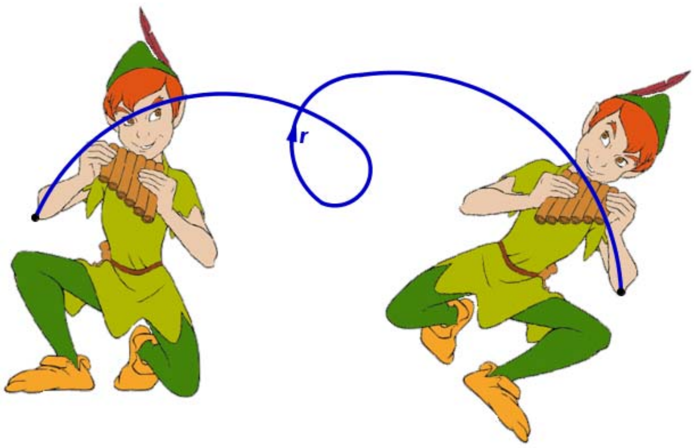
Si deux figures sont isométriques, il existe trois manières de "passer" de l'une à l'autre:

1.4.1. Soit uniquement par un DEPLACEMENT



Dans ce cas, on parle de figures isométriques déplacées.

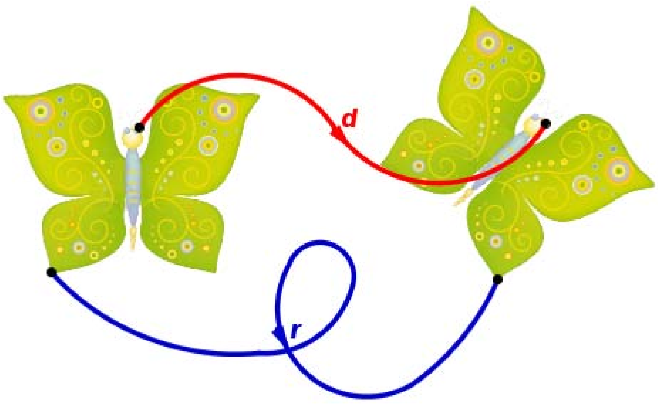
1.4.2. Soit uniquement par un RETOURNEMENT



Dans ce cas, on parle de figures isométriques retournées.

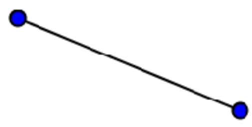
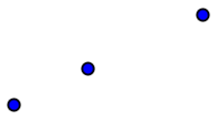
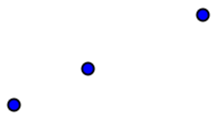
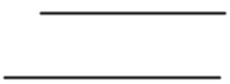
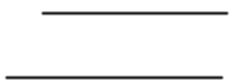
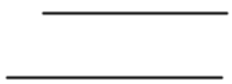
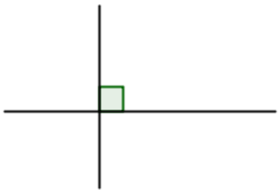
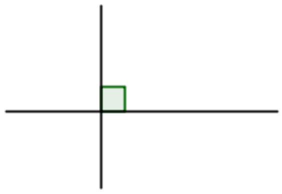
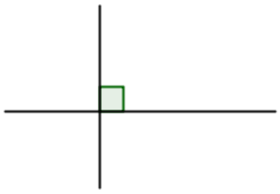
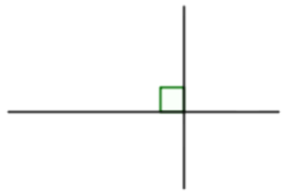
Conventionnellement en géométrie, si on déplace le transparent avant ou après l'avoir retourné, on obtient bien un retournement ("un déplacement suivi ou précédé d'un retournement est un retournement").

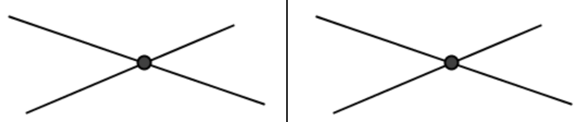
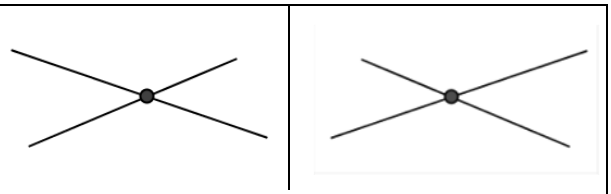
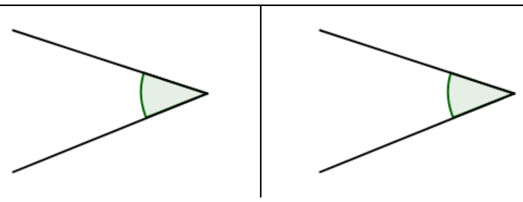
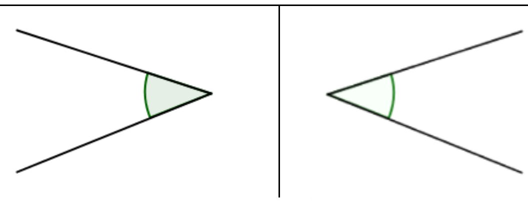
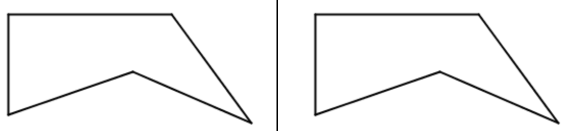
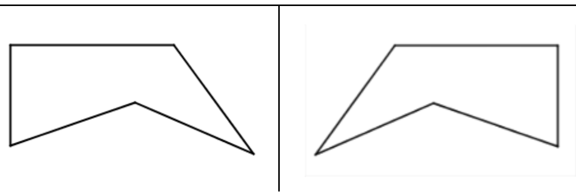
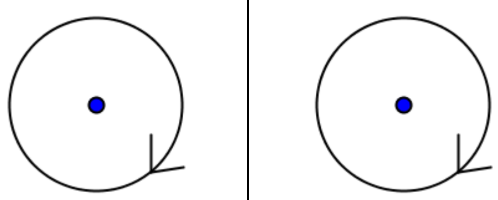
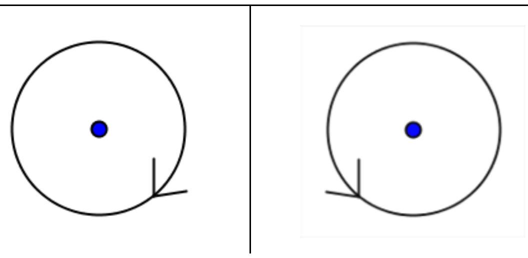
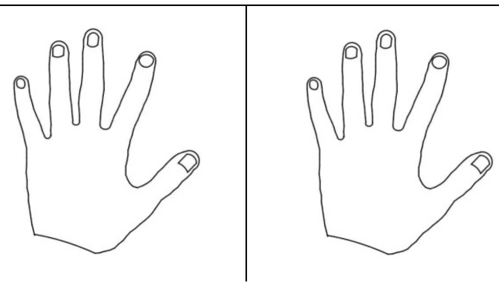
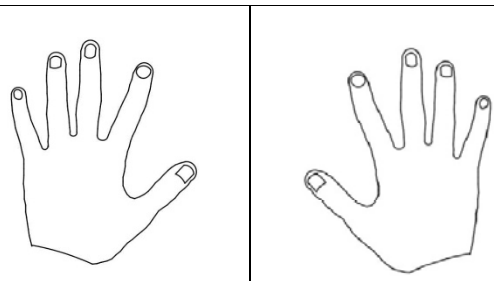
1.4.3. Soit par DEPLACEMENT et aussi par RETOURNEMENT



1.5. Notions conservées par les déplacements et les retournements plans

1.5.1. Tableau comparatif des notions conservées par les déplacements et les retournements

Déplacement		Retournement	
Avant	**Après**	**Avant**	**Après**
			
Conservation des *distances*.		**Conservation** des *distances*.	
			
L'image d'une droite est une droite.		**L'image d'une droite est une droite.**	
			
Conservation de ***l'alignement des points***.		**Conservation** de ***l'alignement des points***.	
			
Conservation du ***milieu*** d'un segment.		**Conservation** du ***milieu*** d'un segment.	
			
Conservation du ***parallélisme***.		**Conservation** du ***parallélisme***.	
			
Conservation de la ***perpendicularité***.		**Conservation** de la ***perpendicularité***.	

 **Conservation** de ***l'intersection de deux droites***.	 **Conservation** de **l'intersection de deux droites**.
 **Conservation** de ***l'amplitude des angles***.	 **Conservation** de ***l'amplitude des angles***.
 **Conservation** de **la forme et de la surface** des figures.	 **Conservation** de ***la forme et de la surface*** des figures.
 **Conservation** du ***sens de rotation*** d'un cercle.	 **Inversion** du ***sens de rotation*** d'un cercle.
 **Conservation** du ***type de dessin de main***.	 **Inversion** du ***type de dessin de main***.

1.5.2. Synthèse

Les notions suivantes sont conservées par les isométries planes (aussi bien par les déplacements que par les retournements du plan):

- ✓ les distances
- ✓ l'alignement des points
- ✓ le milieu d'un segment
- ✓ le parallélisme
- ✓ la perpendicularité
- ✓ l'intersection de deux droites
- ✓ l'amplitude des angles
- ✓ la forme des figures
- ✓ la surface des figures

De plus, les **déplacements du plan** conservent le sens de rotation (horlogique, antihorlogique), ainsi que le type de dessin de main (gauche, droite).

Par contre, les **retournements du plan** inversent le sens de rotation ainsi que le type de dessin de main.

1.6. Figures semblables agrandies et figures semblables réduites

Si deux figures semblables sont agrandies ou réduites, il existe alors quatre cas envisageables:

1.6.1. Des figures semblables agrandies déplacées (F_2) ou des figures semblables agrandies retournées (F_3)

Figure initiale = F_1

F_2

Toutes les dimensions de la figure F_1 sont multipliées par un nombre strictement plus grand que 1.

Figure initiale = F_1

F_3

Toutes les dimensions de la figure F_1 sont multipliées par un nombre strictement plus grand que 1.

<u>Remarques</u>: Pour obtenir une figure agrandie déplacée (voir animation):

- Soit on agrandit puis on déplace la figure;
- Soit on déplace puis on agrandit la figure.

Pour obtenir une figure agrandie retournée (voir animation):

- Soit on agrandit puis on retourne la figure;
- Soit on retourne puis on agrandit la figure.

1.6.2. Des figures semblables réduites déplacées (F_4) ou des figures semblables réduites retournées (F_5)

Figure initiale = F_1

F_4

Toutes les dimensions de la figure initiale sont multipliées par un nombre compris entre 0 et 1 (avec 0 et 1 non compris)

Figure initiale = F_1

F_5

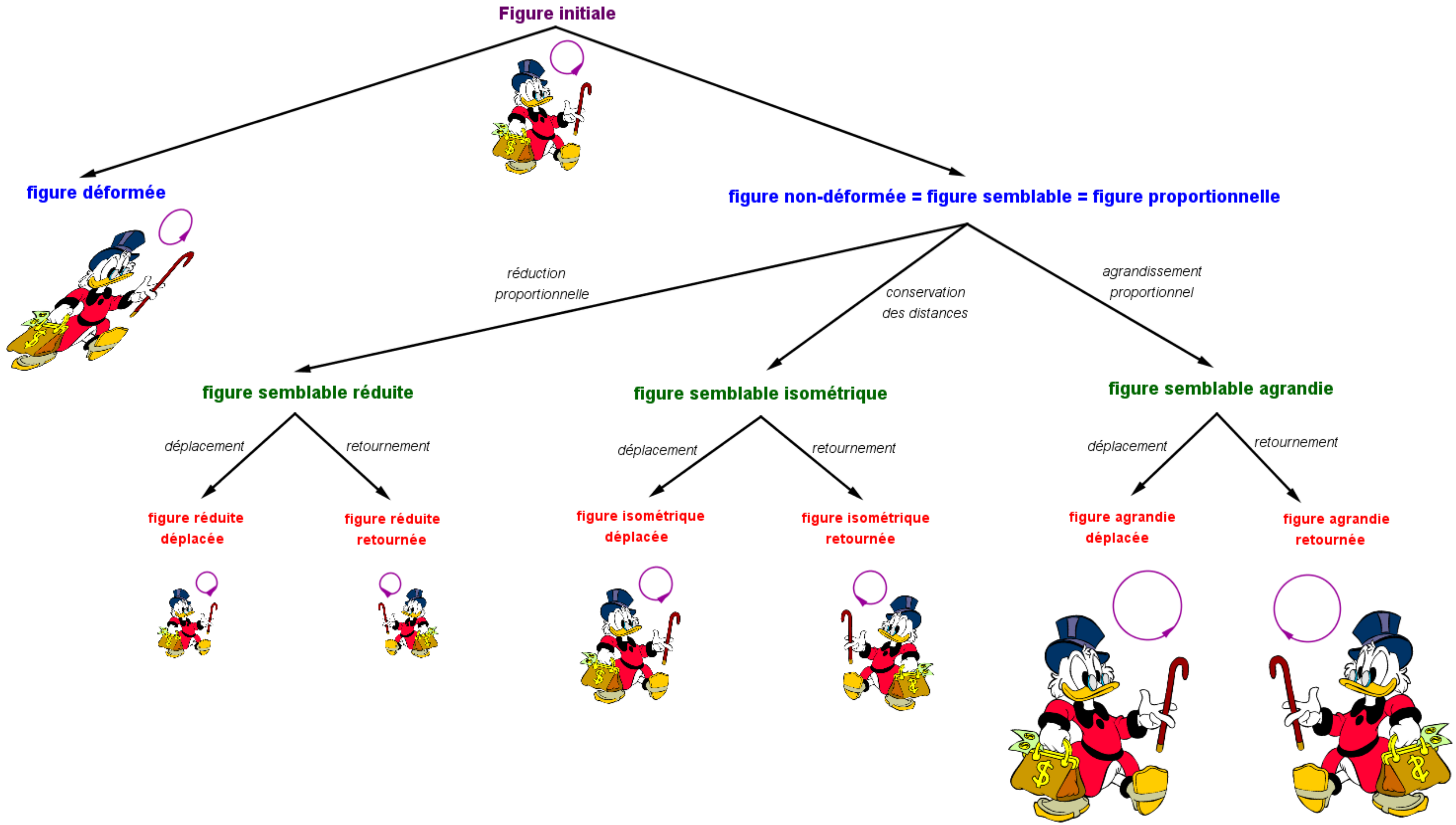
<u>Remarques</u>: Pour obtenir une figure réduite déplacée (Voir animation):

- Soit on réduit puis on déplace la figure;
- Soit on déplace puis on réduit la figure.

Pour obtenir une figure réduite retournée (Voir animation):

- Soit on réduit puis on retourne la figure;
- Soit on retourne puis on réduit la figure.

1.7. Synthèse des figures déformées – figures non déformées et transformations du plan



2. Isométries planes

Le mot "isométrie" vient du grec ***"iso"*** qui signifie ***"même"*** et ***"metros"*** qui signifie ***"mesure"***.

Une isométrie plane est une transformation du plan qui conserve les distances.

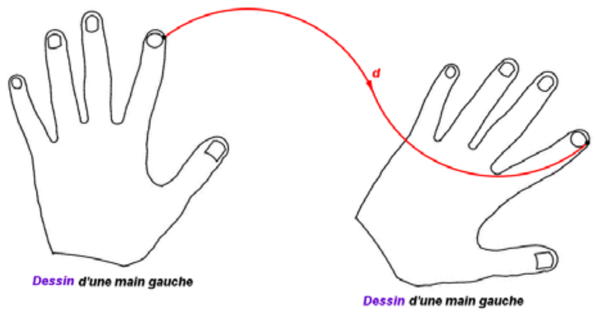
Remarque: le fait de conserver les distances entraîne automatiquement la conservation des mesures d'angles, des mesures de surfaces, la forme des figures, les milieux, le parallélisme, la perpendicularité, …

Il existe deux types d'isométries planes: les *déplacements* et les *retournements*.

2.1. Définitions des déplacements et des retournements du plan

Un déplacement du plan est une isométrie plane qui conserve le type de ***dessin*** de main ou de pied.

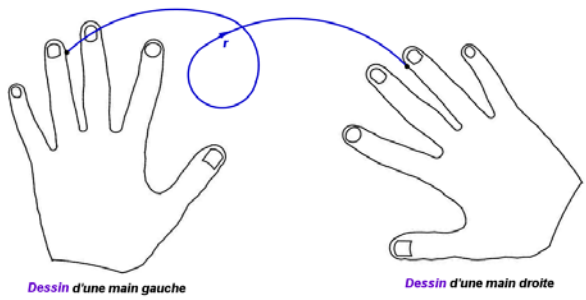
- Par un déplacement du plan, l'image du *dessin* d'une main droite est le *dessin* d'une main droite et l'image du *dessin* d'une main gauche est le *dessin* d'une main gauche.



- On dit que *"les déplacements conservent les orientations du plan"*.

Un retournement du plan est une isométrie plane qui inverse le type de ***dessin*** de main ou de pied.

- Par un retournement du plan, l'image du *dessin* d'une main droite est le *dessin* d'une main gauche et l'image du *dessin* d'une main gauche est le *dessin* d'une main droite).



- On dit que *"les retournements inversent les orientations du plan"*.

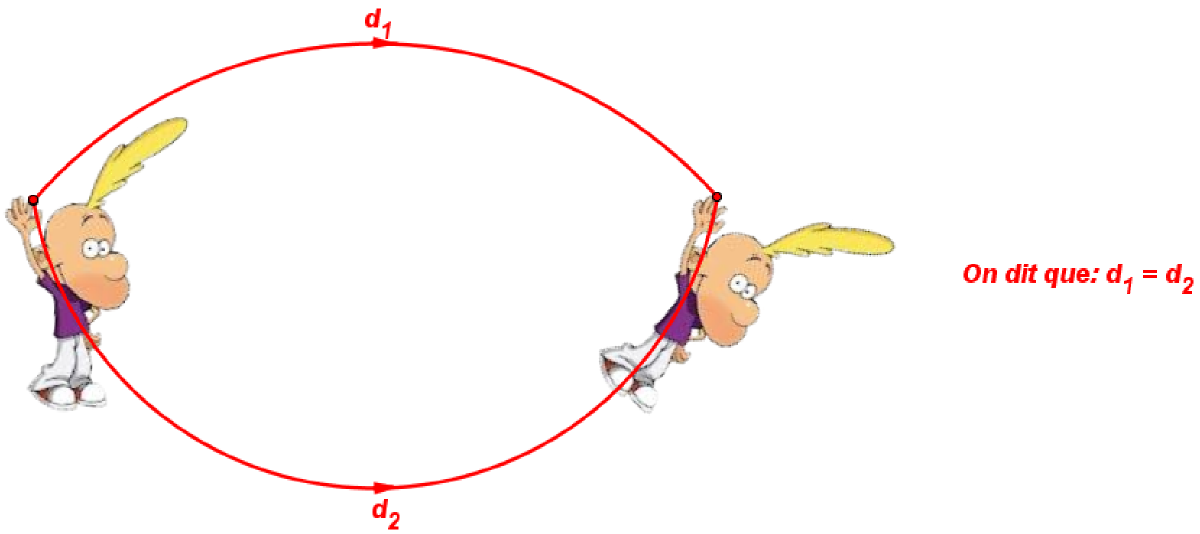
2.2. Types de déplacements et de retournements du plan

2.2.1. Convention

En mathématique, lors d'un déplacement ou d'un retournement, ***la trajectoire suivie*** par tous les points du plan ***n'a pas d'importance***. Ce qui importe c'est la ***position initiale*** (origine) et la ***position finale*** (extrémité).

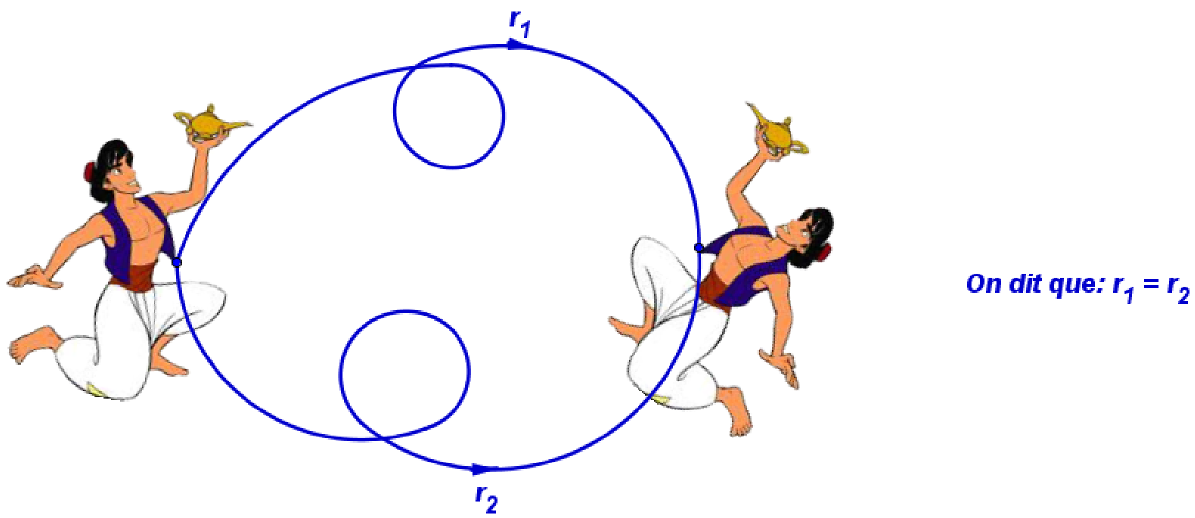
2.2.2. Egalité de déplacements et égalité de retournements

En mathématique, des déplacements sont égaux si, pour tous les points du plan, ces déplacements ont même origine (même "avant") et même extrémité (même "après").



Il en résulte qu'il n'existe que deux types de déplacements du plan.

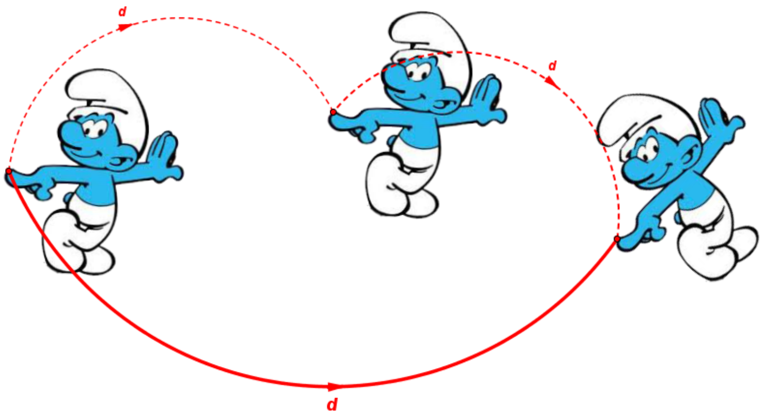
En mathématique, des retournements sont égaux si, pour tous les points du plan, ces retournements ont même origine (même "avant") et même extrémité (même "après").



Il en résulte qu'il n'existe que deux types de retournements du plan.

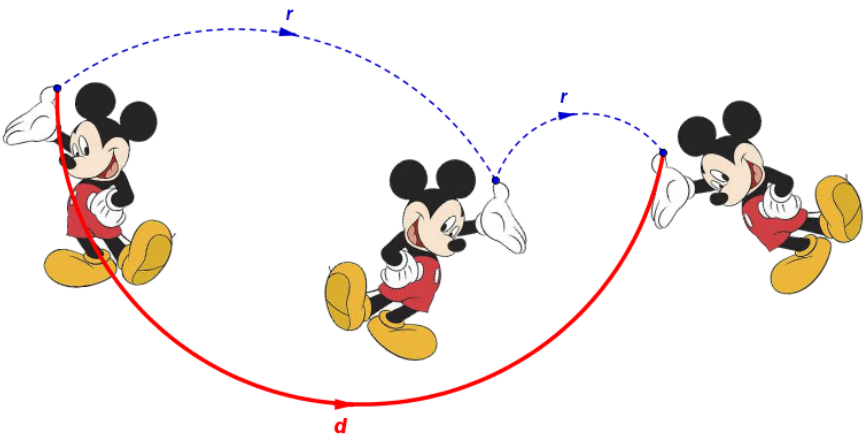
2.2.3. Composées de déplacements et de retournements

✓ La composée de deux ***déplacements*** est un ***déplacement***



Remarque: la composée de plusieurs déplacements est toujours un déplacement.

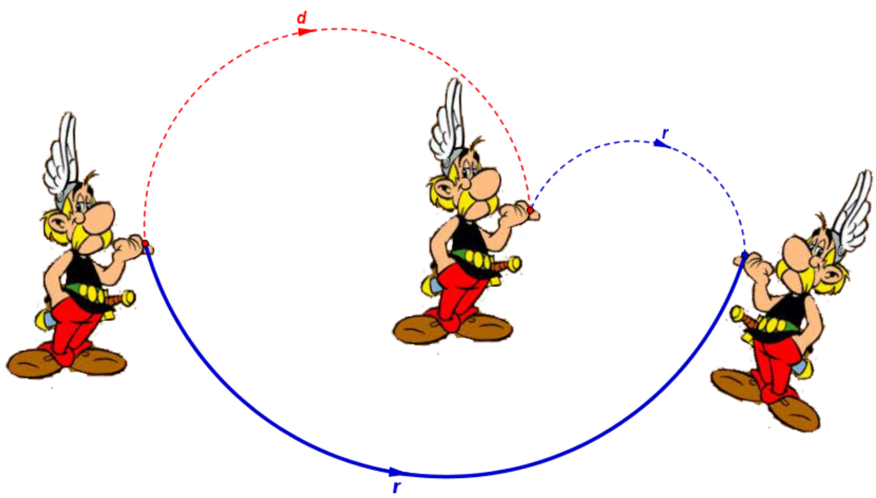
✓ La composée de deux ***retournements*** est un ***déplacement***



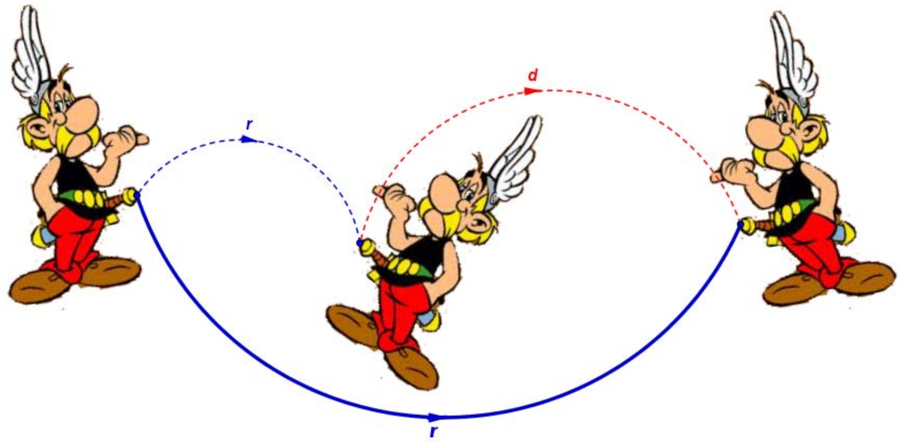
Remarques: - La composée d'un nombre pair de retournements est un déplacement.
- La composée d'un nombre impair de retournements est un retournement.

✓ La composée d'un ***déplacement*** et d'un ***retournement*** est un ***retournement***

A.

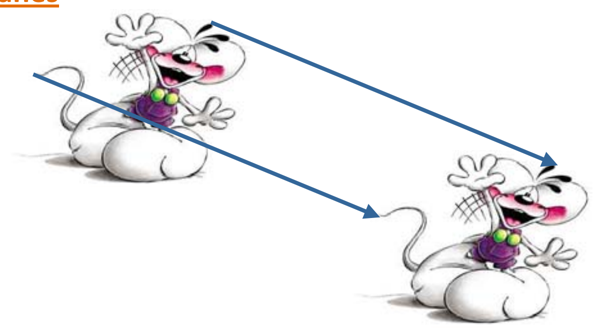


B.



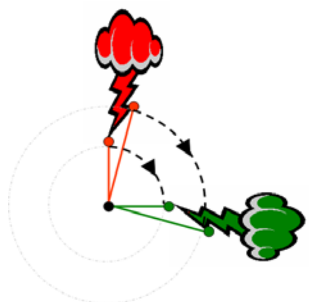
2.2.4. Types de déplacements du plan

A. Les translations planes



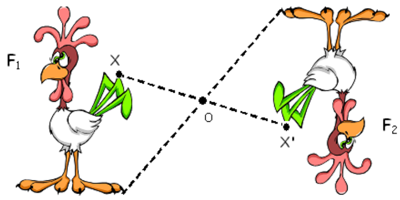
Une translation plane est une transformation qui transporte tous les points du plan dans la même direction, le même sens et de la même longueur.

B. Les rotations planes



Une rotation plane est une transformation qui transporte tous les points du plan:
- *sur des arcs de cercles de même centre (concentriques)*
- *dans le même sens (horlogique ou antihorlogique)*
- *d'un angle de même amplitude.*

C. Les symétries centrales planes (ou rotations de 180°)



Une symétrie centrale plane de centre O est une transformation qui transporte tout point X sur son image X' tel que:

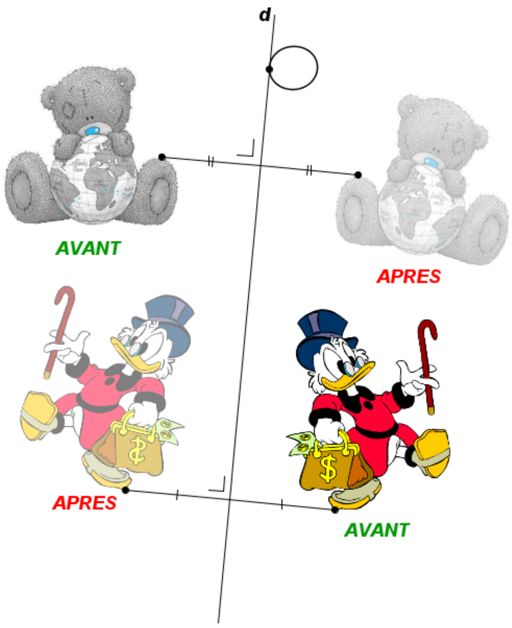
1) X, O, X' sont alignés

2) |XO| = |OX'|

Remarques: - Dans le plan, une symétrie centrale équivaut à une rotation de 180°.
- ***Dans l'espace***, une symétrie centrale est *un retournement de l'**espace***.

2.2.5. Types de retournements du plan

A. Les symétries orthogonales planes

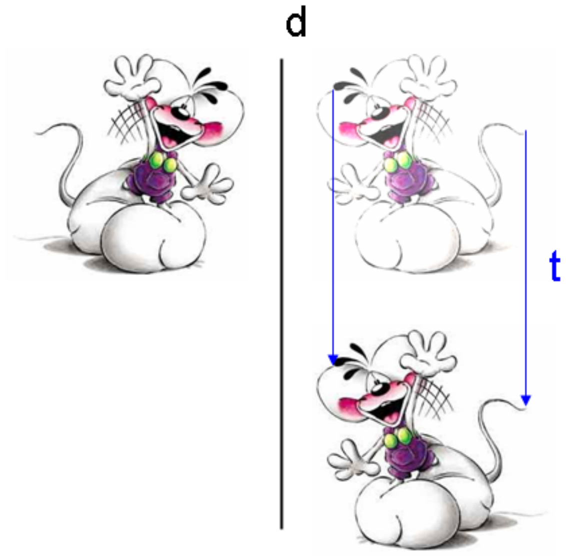


Une symétrie orthogonale plane est une transformation qui transporte tout point du plan:

- *de l'autre côté de l'axe*
- *sur la droite perpendiculaire à l'axe et passant par ce point*
- *à une même distance de l'axe.*

Remarques: - ***Dans l'espace***, une symétrie orthogonale est *un déplacement de l'**espace***.

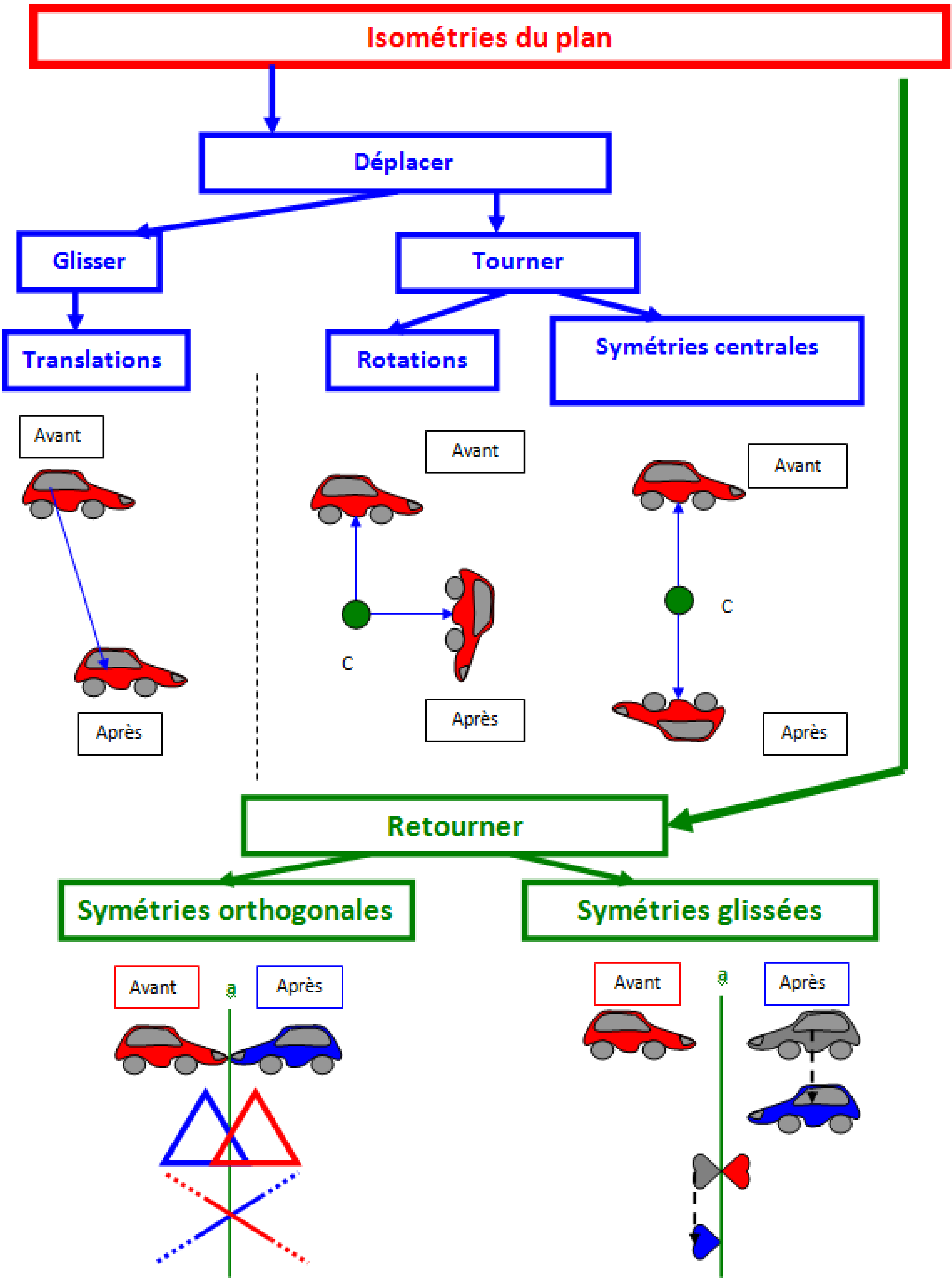
B. Les symétries glissées planes



Une symétrie glissée plane est une transformation du plan déterminé par la composée d'une symétrie orthogonale suivie d'une translation parallèle à la droite de points fixes déterminant la symétrie orthogonale.

$$S_{gl.} = t \circ S_d = S_d \circ t$$

2.3. Synthèse récapitulatives des isométries du plan



2.4. Symétrie au sens large – automorphisme de figures planes

Comme indiqué dans l'introduction, les transformations sont des outils qui permettent, grâce à leurs propriétés, de:

- découvrir et/ou démontrer les propriétés des objets géométriques du plan et de l'espace;
- créer des figures ayant des régularités "répétitives" (frises – rosaces – tapisseries);
- classer des objets du plan et de l'espace (cristallographie);
- percevoir si un objet est orienté ou non orienté (paires d'objets énantiomères – formes "gauche" ou "droite" d'un objet – molécules chirales);
- créer des objets (snub-cube; snub-dodécaèdre);
- …

Le concept qui relie les propriétés des transformations aux propriétés des figures se nomme ***"symétrie au sens large"*** ou ***"automorphisme".***

Par ***automorphisme***, il faut comprendre la notion simple de ***"transformation qui superpose une figure à elle-même tout en conservant sa structure"*** ou encore, si la figure est finie, ***"déplacement et/ou retournement qui superpose la figure à elle-même".***

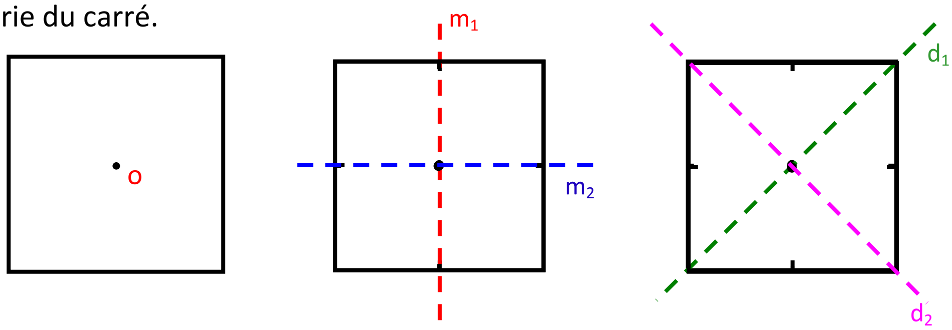
Exemples:

1) Les automorphismes du carré:

Il existe exactement 8 transformations (isométries) qui superposent tout carré à lui-même tout en conservant sa structure:

- 4 "déplacements" ou 4 auto$^+$: les rotations de $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$ et $\frac{4}{4}$ de tour de centre O;
- 4 "retournements" ou 4 auto$^-$: les symétries orthogonales dont les droites de points fixes sont les médianes et les diagonales.

On résume les auto$^+$ en affirmant que le point "O" est un centre de rotation d'ordre 4 et les auto$^-$ en affirmant que les droites médianes et les droites diagonales sont des axes de symétrie du carré.



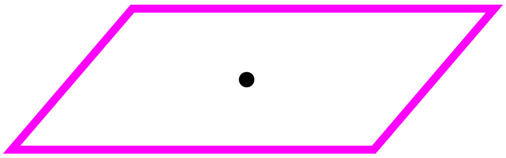
auto (C)
- auto$^+$ ($r_{1/4}$; $r_{2/4}$; $r_{3/4}$; $r_{4/4}$)
- auto$^-$ (s_{m1} ; s_{m2} ; s_{d1} ; s_{d2})

2) <u>Les automorphismes du parallélogramme quelconque</u>:

Il existe exactement 2 isométries qui superposent tout parallélogramme quelconque à lui-même :

2 "déplacements" ou 2 auto$^+$: les rotations de $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{2}$ tour de centre O.

On résume les auto$^+$ en affirmant que le point "O" est un centre de rotation d'ordre 2. Comme il n'existe pas de retournement du plan qui superpose tout parallélogramme quelconque à lui-même: il n'existe pas d'auto$^-$.



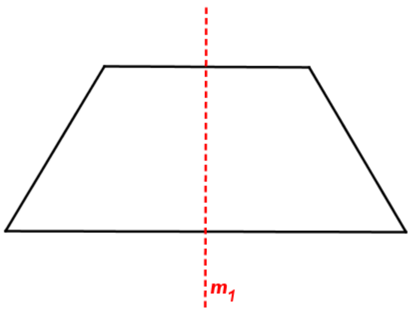
auto (P)
- auto$^+$ ($r_{1/2}$; $r_{2/2}$)
- auto$^-$ (néant)

3) <u>Les automorphismes du trapèze isocèle quelconque</u>:

Il existe exactement 2 isométries qui superposent tout trapèze isocèle quelconque à lui-même :

1 "déplacement" ou 1 auto$^+$: la rotation de 360° (= identité);
1 "retournement" ou 1 auto$^-$: la symétrie orthogonale dont la droite de points fixes est la médiane relative aux bases parallèles.

On résume les auto$^-$ en affirmant que la médiane est un axe de symétrie du trapèze isocèle quelconque.



auto (T)
- auto$^+$ ($r_{360°}$)
- auto$^-$ (S_{m1})

3. Homothéties planes

3.1. Introduction

Les homothéties sont les transformations qui permettent d'obtenir des figures semblables parallèles (agrandies, réduites ou isométriques) à la figure initiale. Elles multiplient donc toutes les distances par un réel strictement positif.

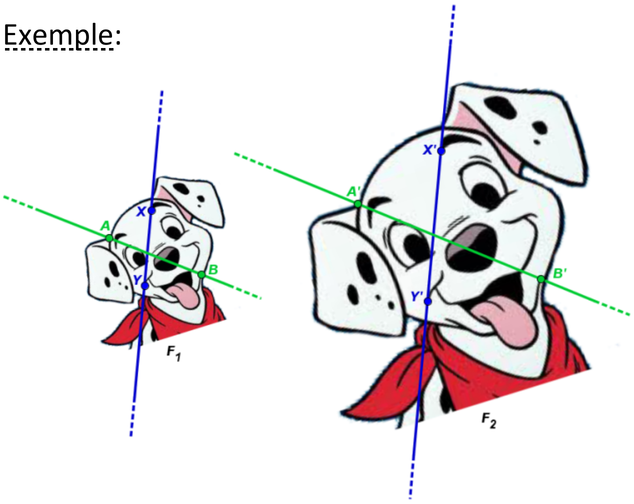
- ✓ Si ce réel est plus grand que 1, alors on obtient une figure semblable agrandie parallèle.
- ✓ Si ce réel est plus petit que 1, alors on obtient une figure semblable réduite parallèle.
- ✓ Si ce réel est égal à 1, alors on obtient une figure isométrique parallèle.

3.2. Figures parallèles

Deux figures sont dites parallèles si et seulement si, la droite passant par deux points quelconques de la première figure est parallèle à la droite passant par les deux points images de la deuxième figure. Autrement dit:

F_1 est parallèle à F_2 ssi $\forall$ **X, Y $\in$ F_1: XY // X'Y'** (avec X' et Y'($\in F_2$) images de X et Y).

Exemple:

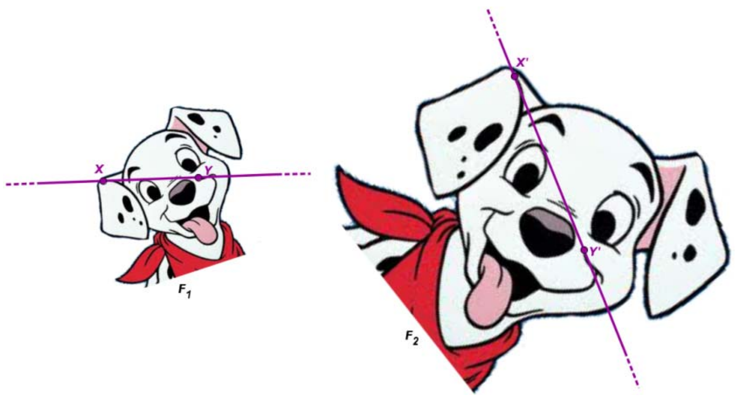


XY // X'Y' ; AB // A'B' ; …

En fait, quels que soient X et Y ($\in F_1$), la droite passant par X et Y est parallèle à la droite passant par X' et Y'($\in F_2$).

⇨ On dit que F_2 est parallèle à F_1

Contre-exemple:



XY $\not\parallel$ X'Y'

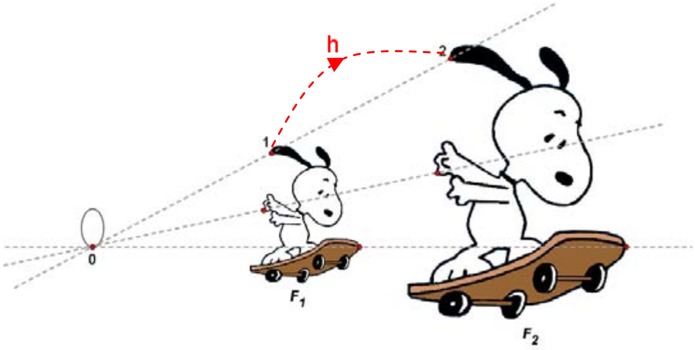
Il existe X et Y tels que la droite passant par X et Y n'est pas parallèle à la droite passant par X' et Y'.

⇨ F_2 n'est pas parallèle à F_1

Remarque: L'image d'une figure par une translation ou une symétrie centrale plane est une figure parallèle à la figure initiale.

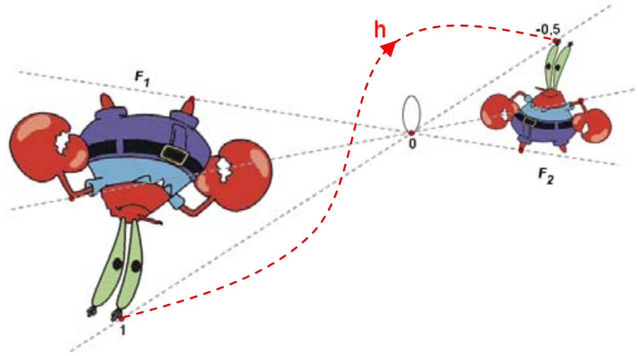
3.3. Exemples d'homothéties

1)



Toutes les distances ont été multipliées par 2.

2)



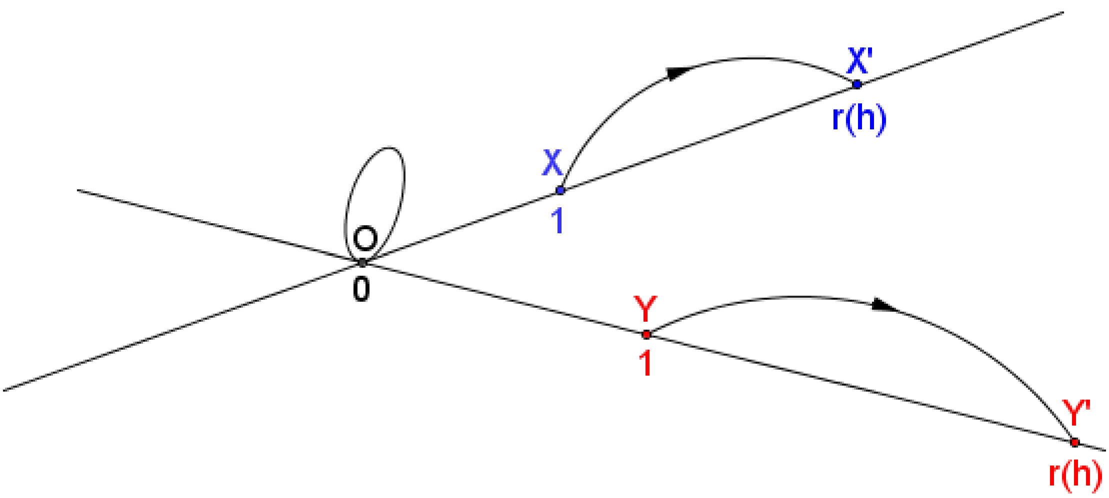
Toutes les distances ont été multipliées par 1/2.

3.4. Définition mathématique

Une homothétie plane est une transformation du plan déterminée par un centre "O" et un réel non nul "r(h)"(appelé *rapport d'homothétie*) telle que:

- ✓ tout point X (différent de "O") a pour image X' dont l'abscisse dans le repère (O,X) est r(h).
- ✓ le centre "O" est sa propre image.

Illustration:



Autrement dit:

$\forall O \in E^2$; $\forall r(h) \in R_0$: $h_{(O,\, r(h))} : E^2 \longrightarrow E^2 : X \longrightarrow X'$ $\quad (X' = h(X))$

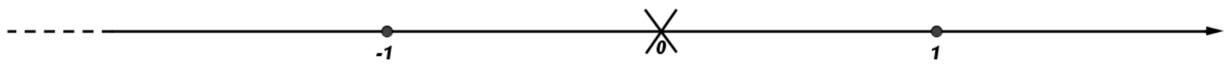
$$\text{où} \begin{cases} 1)\ abs_{(O,X)}X' = r(h) & \textbf{avec } X \neq O \\ 2)\ h(O) = O \end{cases}$$

Remarque: Les homothéties multiplient toutes les distances par la valeur absolue du rapport de l'homothétie (*|r(h)|*).

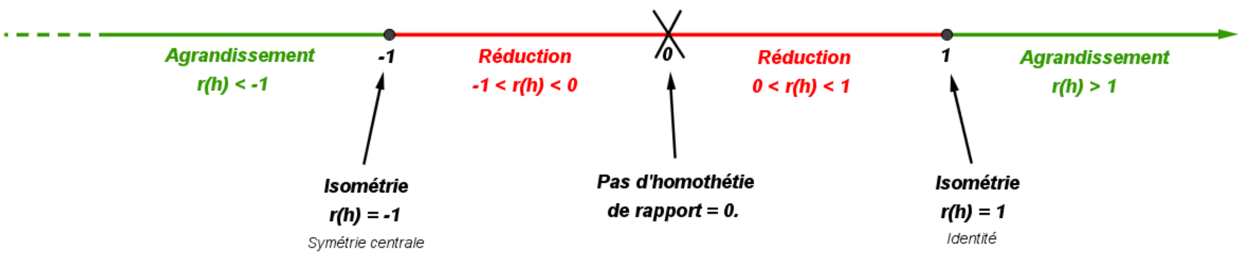
3.5. Types de figures semblables en fonction du rapport de l'homothétie

On peut obtenir **trois types** de figures semblables (proportionnelles) différents **en fonction de la valeur du rapport** de l'homothétie qui applique la première image sur la deuxième:

- Voici une droite graduée représentant les valeurs que peut prendre r(h):

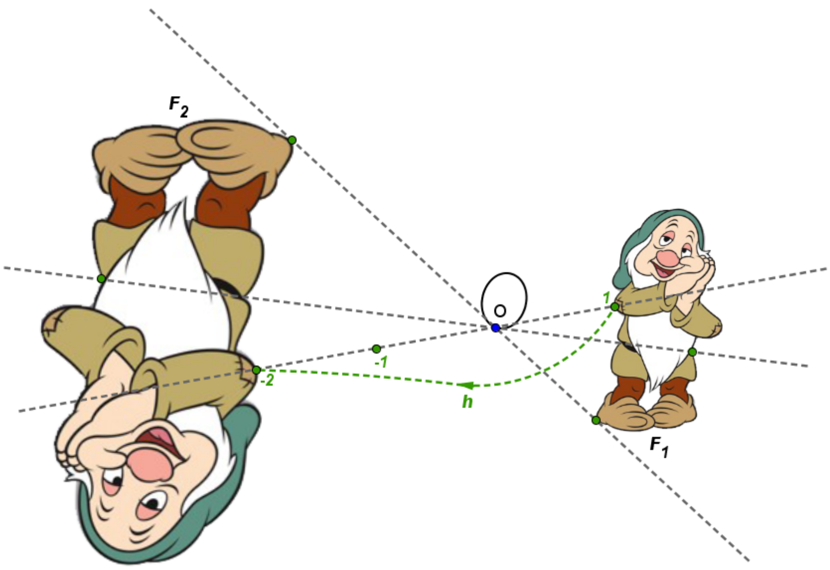


- Figures semblables obtenues en fonction du rapport d'homothétie (r(h)) donné:



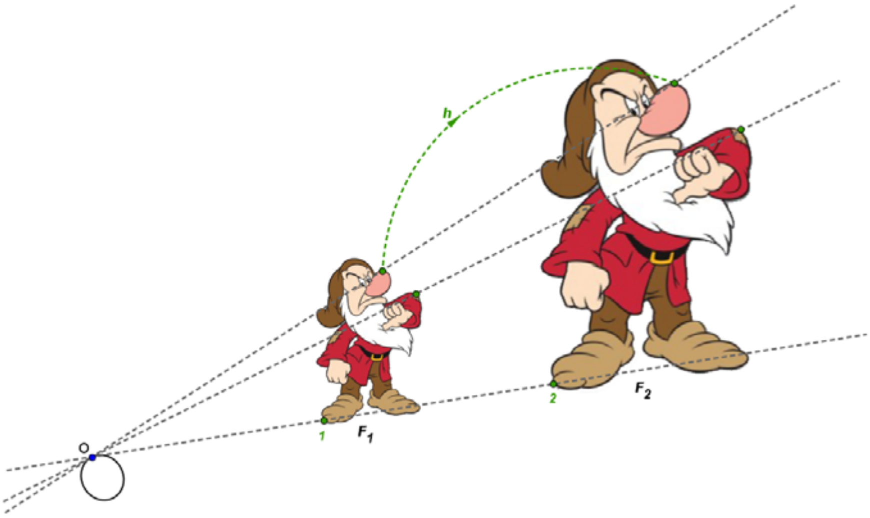
3.5.1. Images agrandies

1) r(h) < -1 (ici r(h) = -2)



F₂ est une figure semblable agrandie par rapport à F₁.

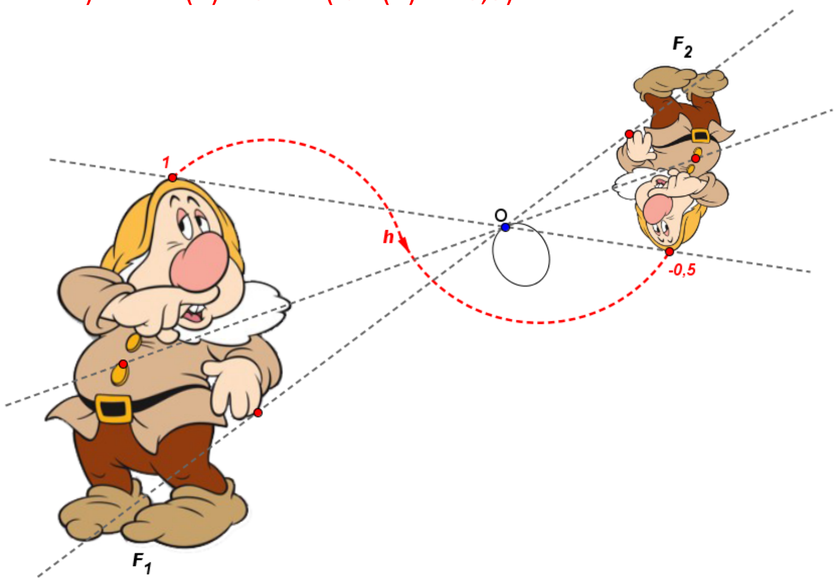
2) r(h) > 1 (ici r(h) = 2)



F₂ est une figure semblable agrandie par rapport à F₁.

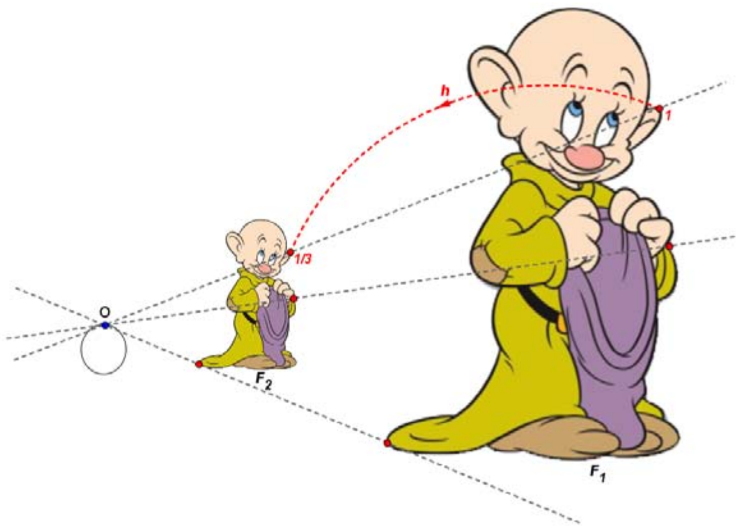
3.5.2. Images réduites

1) -1 < r(h) < 0 (ici r(h) = - 0,5)



F₂ est une figure semblable réduite par rapport à F₁.

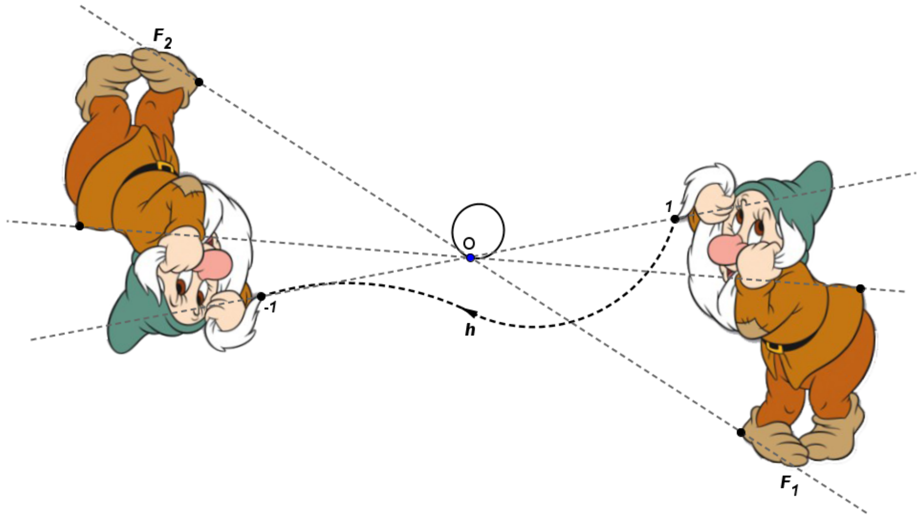
2) 0 < r(h) < 1 (ici r(h) = 1/3)



F₂ est une figure semblable réduite par rapport à F₁.

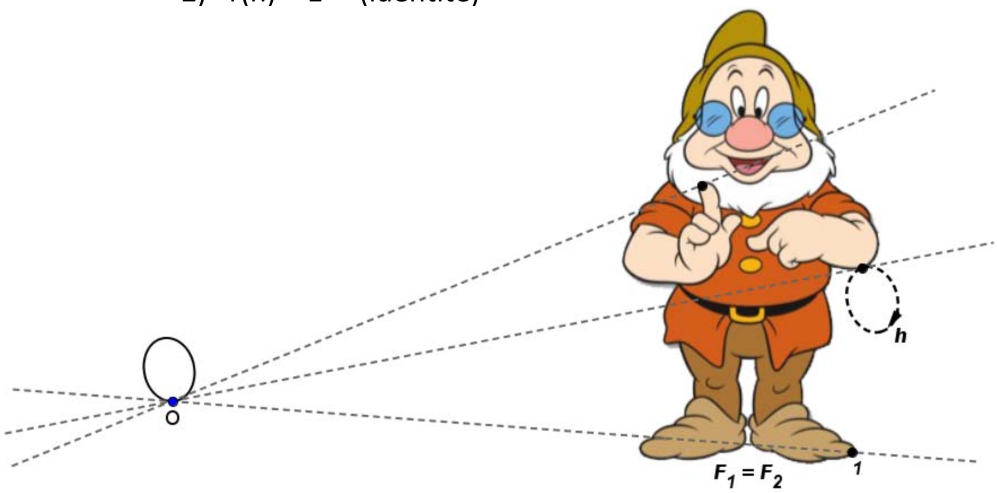
3.5.3. Images isométriques

1) r(h) = -1 (symétrie centrale)



F₂ est une figure semblable isométrique par rapport à F₁.

2) r(h) = 1 (identité)



F₂ est une figure semblable isométrique par rapport à F₁.

$F_1 = F_2$

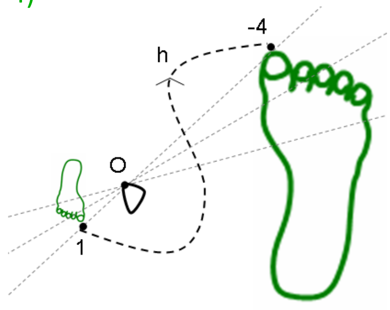
3.6. Homothéties et orientation

Les homothéties planes conservent l'orientation du plan quel que soit le rapport de l'homothétie.

C'est-à-dire: l'image du dessin d'un type de main, de pied ou de cercle orienté (horlogique ou antihorlogique) par une homothétie reste un dessin du même type de main, de pied ou de cercle orienté.

Illustration à l'aide d'exemples:

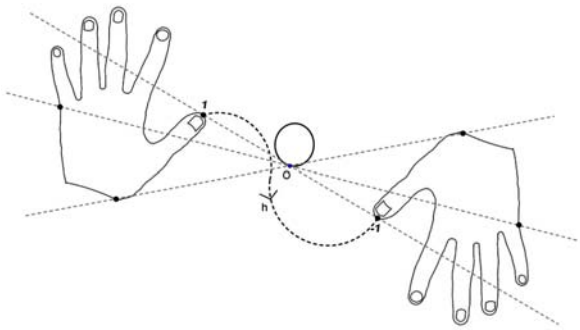
Ex 1: r(h) < -1 (ici r(h) = -4)



Par une homothétie de ***rapport inférieur à -1***, l'image du *dessin d'un pied droit* est le *dessin d'un pied droit*.

→ **Ces homothéties conservent bien l'orientation.**

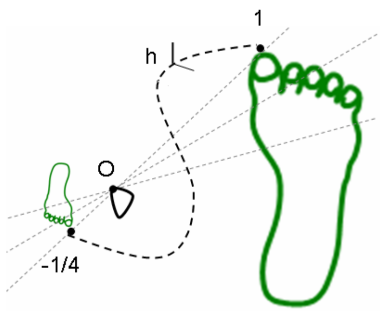
Ex 2: r(h) = -1 (symétrie centrale)



Par une homothétie de ***rapport égal à -1***, l'image du *dessin d'une main gauche* est le *dessin d'une main gauche*.

→ **Ces homothéties conservent bien l'orientation.**

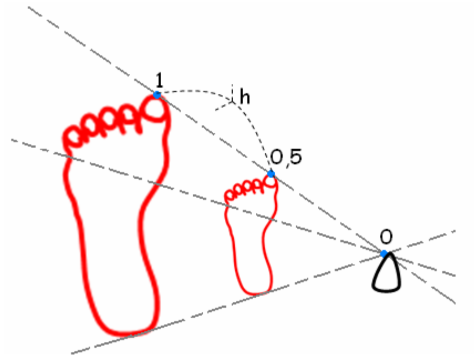
Ex 3: -1 < r(h) < 0 (ici r(h) = -1/4)



Par une homothétie de ***rapport compris entre -1 et 0***, l'image du *dessin d'un pied droit* est le *dessin d'un pied droit*.

→ **Ces homothéties conservent bien l'orientation.**

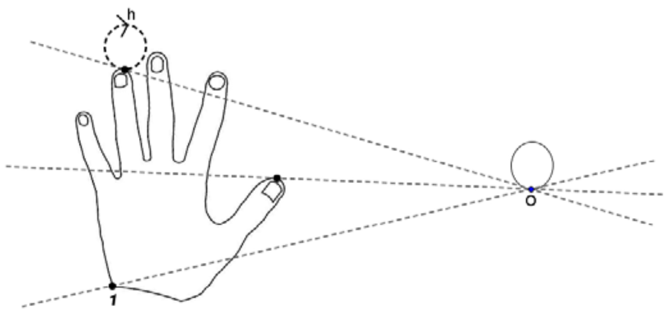
<u>Ex 4</u>: 0 < r(h) < 1   (ici r(h) = 0,5)



Par une homothétie de ***rapport compris entre 0 et 1***, l'image du *dessin d'un pied gauche* est le *dessin d'un pied gauche*.

→ **Ces homothéties conservent bien l'orientation.**

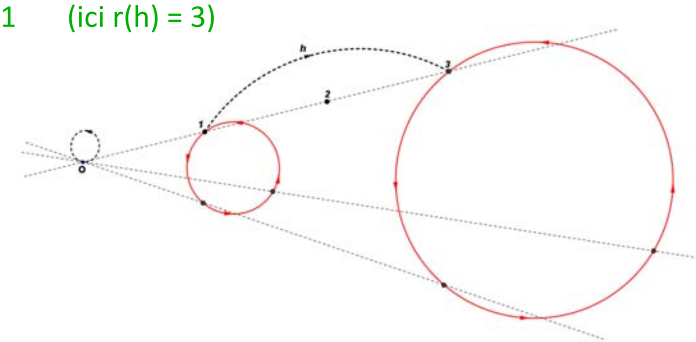
<u>Ex 5</u>: r(h) = 1   (identité)



Par une homothétie de ***rapport égal à 1***, l'image du *dessin d'une main gauche* est le *dessin d'une main gauche*.

→ **Ces homothéties conservent bien l'orientation.**

<u>Ex 6</u>: r(h) > 1   (ici r(h) = 3)



Par une homothétie de ***rapport supérieur à 1***, l'image du *dessin d'une main droite* est le *dessin d'une main droite*.

→ **Ces homothéties conservent bien l'orientation.**

<u>Remarques</u>:

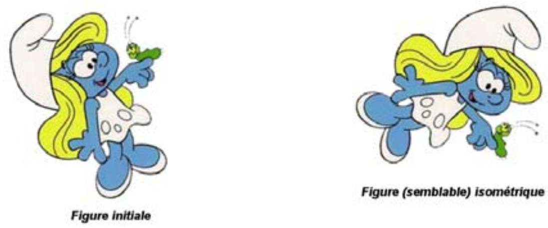
- Les homothéties de l'***espace*** de rapport positif conservent les types d'orientations de l'espace (conservent les types de mains ou de pieds).
- Les homothéties de l'***espace*** de rapport négatif inversent les types d'orientations de l'espace (inversent les types de mains ou de pieds).

4. Similitudes planes

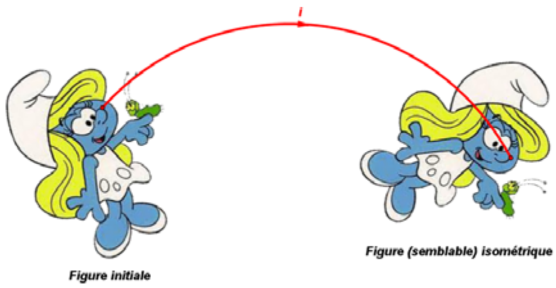
4.1. Introduction

Pour "passer" d'une figure initiale à une figure semblable (isométrique, agrandie ou réduite), il existe trois manières de faire:

4.1.1. Si les figures sont isométriques



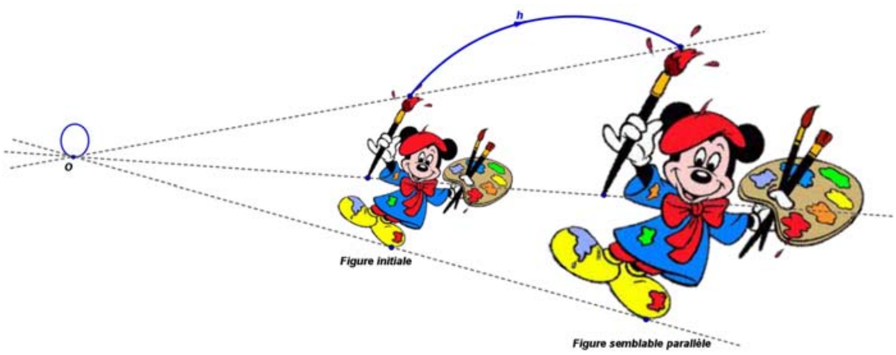
Dans ce cas, on peut passer d'une figure à l'autre par une *isométrie plane* (un déplacement ou un retournement):



Remarque: ici l'isométrie est un déplacement (rotation).

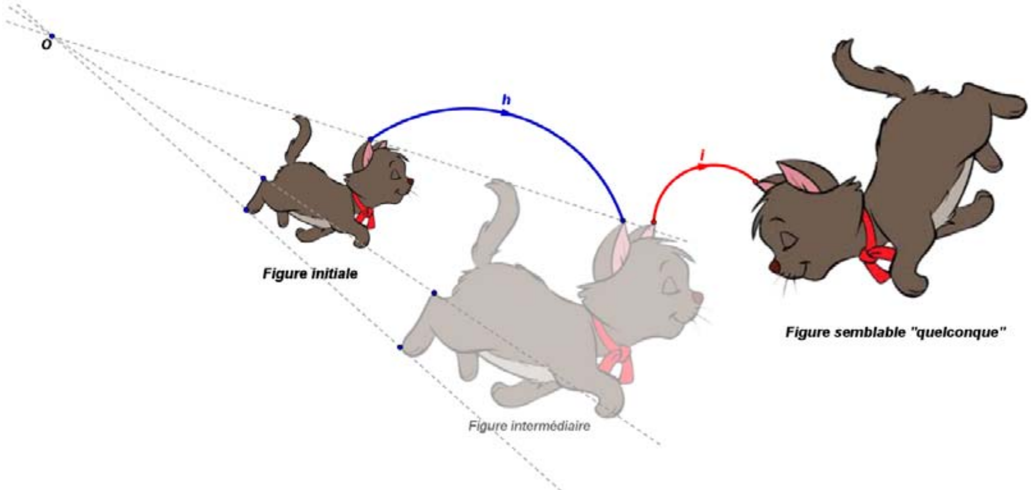
4.1.2. Si les figures sont semblables parallèles

Dans ce cas, on peut passer d'une figure à l'autre par une *homothétie plane*:



4.1.3. Si les figures ne sont ni isométriques ni semblables parallèles

Dans ce cas, il est impossible de passer directement d'une figure à l'autre par une isométrie seule ou par une homothétie seule.
Pour passer d'une figure à l'autre, il faut en fait appliquer à la figure initiale *une homothétie plane* ***puis*** *une isométrie plane (ou inversement)*:



Remarque: ici l'isométrie est un retournement (une symétrie orthogonale).

Cette composée d'homothétie plane et d'isométrie plane est appelée ***similitude plane.***

4.2. Définition

Une similitude plane est une composée d'homothétie(s) plane(s) et d'isométrie(s) plane(s).

Remarques: - Comme les similitudes planes sont composées d'une ou plusieurs homothéties, elles multiplient toutes les distances par un nombre réel strictement positif (le produit des valeurs absolues des rapports des homothéties).

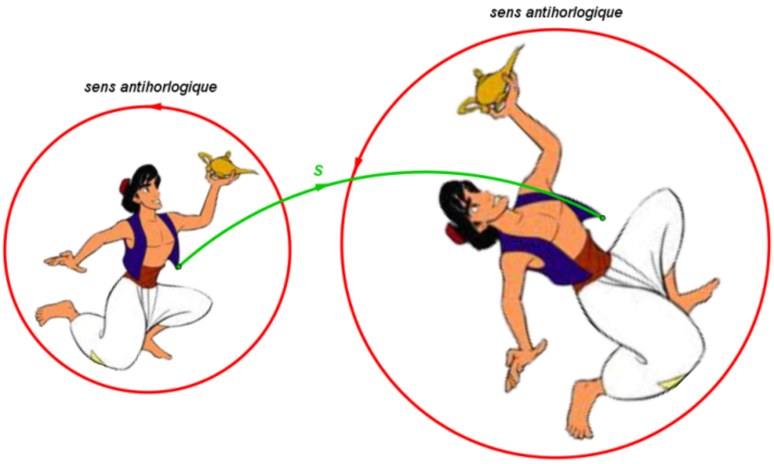
- De la définition, il résulte que les homothéties du plan et les isométries du plan sont aussi des similitudes planes.

- Par une similitude plane, une figure et son image sont proportionnelles mais non nécessairement parallèles entre elles.

4.3. Similitudes directes – similitudes indirectes du plan

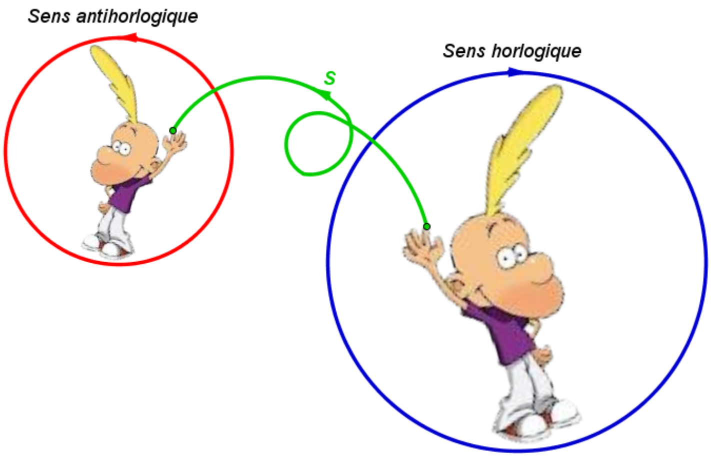
4.3.1. Similitudes directes (similitudes déplacées) du plan

Les similitudes directes du plan sont les similitudes du plan qui ***conservent les types d'orientations*** (les types de dessins de mains, de pieds ou encore les cercles orientés)



4.3.2. Similitudes indirectes (similitudes retournées) du plan

Les similitudes indirectes du plan sont les similitudes du plan qui ***inversent les types d'orientations*** (les types de dessins de mains, de pieds ou encore les cercles orientés)



4.3.3. Similitudes directes/indirectes du plan et retournements

Comme les homothéties et les déplacements conservent toujours les orientations du plan, seuls ***les retournements*** qui interviennent dans les similitudes ***déterminent le type de similitudes*** (directes ou indirectes):

- Si le nombre de retournements plans est ***pair***, alors la similitude est ***directe***.
- Si le nombre de retournements plans est ***impair***, alors la similitude est ***indirecte***.