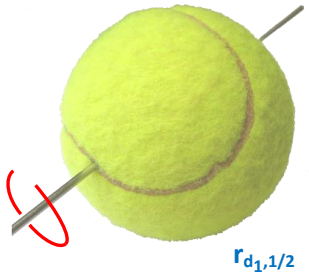
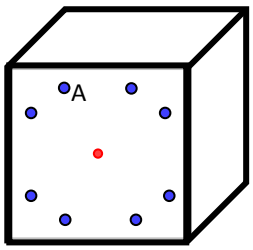
HAUTE ECOLE de la Communauté française EN HAINAUT

ECOLE NORMALE iSEP

Cellule de Géométrie

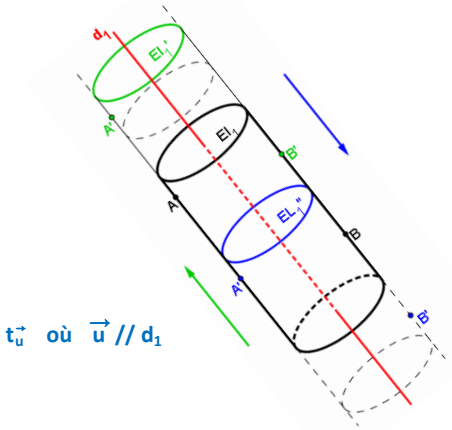
Mathématiques élémentaires

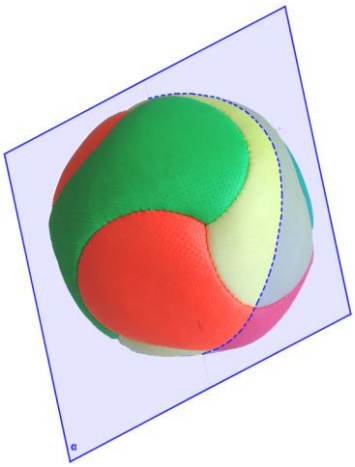




Auto (C) = 48 → Auto$^+$ = 24, Auto$^-$ = 24

Automorphismes de solides





Cellule de Géométrie – Catégorie pédagogique de la HEH

DEMAL Michel demal.michel@skynet.be

DRAMAIX Jérémy jeremy.dramaix@gmail.com

HIGNY Samuel higny_samuel@hotmail.com

LAFOT Cindy lafot.cindy@hotmail.com

MALAGUARNERA Angelo angelo.malaguarnera@gmail.com

Avec la collaboration de

ADABBO F. - PILAETE C. - URBAIN L.

"Il n'y a pas de choses simples mais il y a une manière simple de voir les choses…"

Paul VALERY

Ce travail, à vocation pédagogique et destiné aux élèves des deux dernières années du secondaire (16 - 18 ans), a pour objet de montrer que la recherche des symétries au sens large ou automorphismes[1] de solides ne pose pas de problème si, d'une part, les élèves ont déjà abordé les automorphismes de figures planes telles que carrés, rectangles, losanges, parallélogrammes, triangles, polygones réguliers, cercles... et, d'autre part, si les différents types de déplacements et de retournements **de l'espace** sont abordés via la conservation ou l'inversion des types de mains. *(cf. pg. I - 14-15)*

[1] **Par symétrie au sens large ou automorphisme**, il faut comprendre la notion simple de "transformation qui superpose un objet à lui-même tout en conservant sa structure". C'est à dire un sommet est envoyé sur un sommet, un côté sur un côté, une diagonale sur une diagonale, un milieu de côté sur un milieu de côté, un angle sur un angle de même amplitude, un point sur un point de même caractéristique…

Automorphismes de solides

Plan

I. PARTIE THEORIQUE

1. De la science à la géométrie des transformations
2. Automorphismes de figures planes
   - 2.1. Les automorphismes du carré
   - 2.2. Les automorphismes du losange quelconque
   - 2.3. Les automorphismes du parallélogramme quelconque
   - 2.4. Les automorphismes du disque
   - 2.5. Les automorphismes du n-gone régulier
3. Les isométries de l'espace
   - 3.1. Isométries du plan – Déplacements du plan – Retournements du plan
   - 3.2. Composées de déplacements et/ou de retournements du plan
   - 3.3. Synthèse sur les transformations du plan
   - 3.4. Isométries de l'espace
   - 3.5. Déplacements et retournements de l'espace
4. Orbite d'un point et automorphismes de solides
   - 4.1. Nombre d'automorphismes d'un solide et orbite d'un point

II. LES AUTOMORPHISMES DES POLYEDRES EUCLIDIENS PLATONICIENS (REGULIERS)

1. Le cube
2. Le tétraèdre régulier
3. L'octaèdre régulier
4. Le dodécaèdre régulier
5. L'icosaèdre régulier
6. Synthèses des automorphismes des cinq polyèdres platoniciens

III. AUTOMORPHISMES DE SOLIDES PARTICULIERS

1. Le cube tronqué
2. L'icosaèdre tronqué (ballon de football)

3. Le dodécaèdre tronqué
4. Le prisme à bases hexagonales
5. Le prisme à bases pentagonales
6. L'antiprisme à bases hexagonales
7. L'antiprisme à bases pentagonales
8. Le cylindre fini
9. Le cylindre infini
   - 8.1. Illustration des Auto$^+$
   - 8.2. Illustration des Auto$^-$
10. La sphère
    - a. Illustration des Auto$^+$
    - b. Illustration des Auto$^-$
11. Le carré plongé dans E^3
    - a. Illustration des Auto$^+$
    - b. Illustration des Auto$^-$
12. La balle de tennis
    - 11.1. Illustration des Auto$^+$
    - 11.2. Illustration des Auto$^-$
13. La balle de volley-ball
    - a. Illustration des Auto$^+$
    - b. Illustration des Auto$^-$

IV. AUTOMORPHISMES DES POLYEDRES ARCHIMEDIENS

1. Automorphismes d'Archimédiens analogues à ceux du cube (ou de l'octaèdre régulier)
2. Automorphismes d'Archimédiens analogues à ceux du dodécaèdre (ou de l'icosaèdre régulier)
3. Automorphismes d'Archimédiens analogues à ceux de l'octaèdre
4. Automorphismes d'Archimédiens analogues à ceux de l'icosaèdre
5. Automorphismes d'Archimédiens analogues à ceux du tétraèdre
6. Obtenus à partir des déplacements du cube
7. Obtenus à partir des déplacements du dodécaèdre

I. Automorphismes de solides

1. De la science à la géométrie des transformations

"Une autre géométrie élémentaire connaît une explosion dans les domaines les plus divers comme la chimie, la cristallographie, la biologie, la technologie, l'architecture, la robotique.

La liste n'est pas exhaustive, toutes les sciences, au sens le plus large, sont concernées; de même que les arts et la culture en général.

Il est urgent que la géométrie cesse de se replier sur un réduit minuscule et sans ambition, sur un statut de science morte. Il faut que la géométrie participe au développement de la science, de la technologie et de la culture".

F. BUEKENHOUT - Bruxelles, le 12 février 2004

Cette "autre géométrie élémentaire" se nomme "***la Géométrie des Transformations***" et prend ses origines dans la théorie des groupes ainsi que dans le fameux "Programme d'ERLANGEN" de Félix KLEIN de 1872.

Dans cette géométrie, les transformations sont perçues comme des outils qui permettent, grâce à leurs propriétés, de:

- découvrir et/ou démontrer les propriétés des objets géométriques du plan et de l'espace;
- créer des figures ayant des régularités "répétitives" (frises - rosaces - tapisseries);
- classer des objets du plan et de l'espace;
- percevoir si un objet est orienté ou non orienté (paires d'objets énantiomères - formes "gauche" ou "droite" d'un objet - molécules chirales);
- créer des objets (snub-cube; snub-dodécaèdre);
- …

Cette géométrie se base sur les 3 axes suivants:

1. les figures et les solides géométriques;
2. les transformations du plan et de l'espace;
3. le concept qui "relie" les propriétés des transformations aux propriétés des objets, c'est-à-dire sur la notion de "***symétrie au sens large***" ou d'"***automorphisme***".

   Par automorphisme, il faut comprendre la notion simple de "***transformation qui superpose un objet à lui-même tout en conservant sa structure***".

À ce propos, ils précisent:

"La symétrie est un aspect fascinant de la nature, mais c'est aussi un concept scientifique fondamental qui a envahi les mathématiques, la physique, la chimie et jusqu'à la biologie. Peut-être Paul VALERY y songeait-il quand il écrivait: '*Il n'y a pas de choses simples, mais il y a une manière simple de voir les choses*'".

Jean SIVARDIERE

"La symétrie (scientifique) est fondamentale dans les sciences quelles que soient les disciplines. La symétrie est partout. Elle permet de décrire de manière précise de nombreux systèmes, de clarifier et de simplifier l'étude de leurs propriétés. Des résultats très importants peuvent ainsi être prédits de manière rigoureuse sans que l'on ait à faire appel à des théories mathématiques sophistiquées."

Jean SIVARDIERE

"La symétrie (scientifique) est un outil de notre perception, car elle permet de réduire de manière importante les informations nécessaires à la connaissance globale d'un objet, d'une figure, d'un événement. Pourtant elle n'est pas enfermée dans une spécialité, mais apparaît plutôt comme un concept transversal relevant aussi bien des sciences exactes que des sciences du vivant, voire des disciplines artistiques."

Gilles COHEN – TANNOUDJI et Yves SECQUIN

" … tant de choses peuvent être connues sur la structure même d'un objet grâce à ses automorphismes (symétries)."

FREUDENTHAL

"Les modèles de symétrie sont intrinsèques à tous les aspects de la perception et semblent jouer un rôle essentiel dans les processus créatifs à la fois en sciences et en arts. Sans une conscience de l'importance de tels concepts abstraits pour les réponses cathartiques qui étayent l'effort humain, il est douteux que les présentes tentatives désespérées faites en vue d'améliorer la quantité et la qualité des relations (en recherche scientifique et développement ou en arts) ne conduisent à rien d'autre que l'échec."

Déclaration du prix Nobel de chimie 1996 Harry W. KROTO

"La symétrie est une notion universelle et un principe simplificateur. Trouver la symétrie cachée est souvent la clé de l'énigme. Mathématiques, sciences, arts, histoire des idées, rien n'échappe à la symétrie. La nature préfère la symétrie ou, notion encore plus fascinante, la "presque - symétrie", source de l'évolution. Et que dire des intrigantes "brisures de symétrie"? Pourquoi la symétrie fascine-t-elle l'esprit humain? Pourquoi est-elle un outil d'analyse si puissant? Un début de réponse se trouve peut-être dans la remarque suivante de Montesquieu: *"La raison qui fait que la symétrie plaît à l'âme, c'est qu'elle lui épargne de la peine, qu'elle soulage, et qu'elle coupe, pour ainsi dire, l'ouvrage par la moitié.*""

TANGENTE – Mars - Avril 2002 - n°85

2. Automorphismes de figures planes

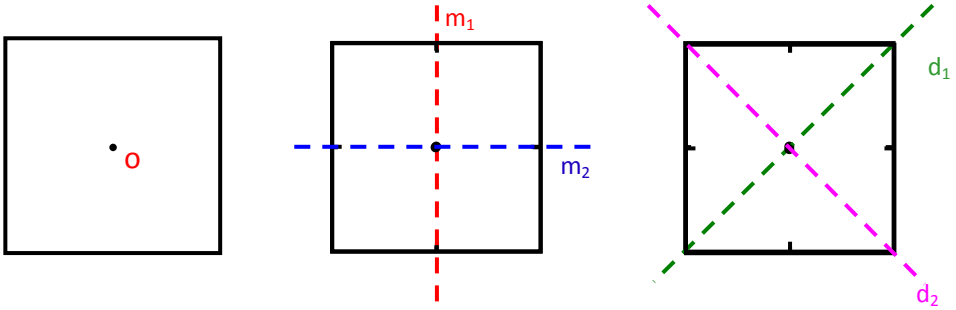
Avant d'aborder les symétries au sens large (les automorphismes) de solides géométriques et, à titre d'exemples, rappelons les automorphismes de quelques figures géométriques.

2.1. Les automorphismes du carré

Il existe exactement 8 transformations (isométries) qui superposent tout carré à lui-même tout en conservant sa structure:

- 4 "déplacements" ou 4 auto$^+$: les rotations de $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$ et $\frac{4}{4}$ de tour de centre O;
- 4 "retournements" ou 4 auto$^-$: les symétries orthogonales dont les droites de points fixes sont les médianes et les diagonales.

On résume les auto$^+$ en affirmant que le point "O" est un centre de rotation d'ordre 4 et les auto$^-$ en affirmant que les droites médianes et les droites diagonales d'un carré sont des axes de symétrie.



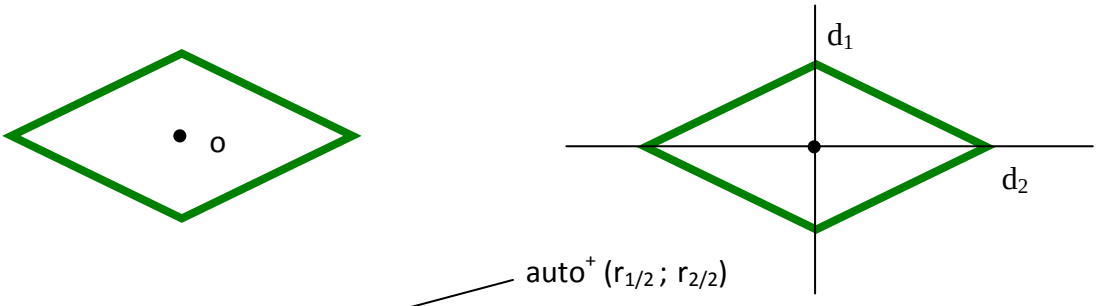
auto (C) : auto$^+$ $(r_{1/4}\,;\, r_{2/4}\,;\, r_{3/4}\,;\, r_{4/4})$; auto$^-$ $(s_{m1}\,;\, s_{m2}\,;\, s_{d1}\,;\, s_{d2})$

2.2. Les automorphismes du losange quelconque

Il existe exactement 4 isométries qui superposent tout losange quelconque à lui-même:

- 2 "déplacements" ou 2 auto$^+$: les rotations de $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{2}$ tour de centre O;
- 2 "retournements" ou 2 auto$^-$: les symétries orthogonales dont les droites de points fixes sont les diagonales.

On résume les auto$^+$ en affirmant que le point "O" est un centre de rotation d'ordre 2 et les auto$^-$ en affirmant que les droites diagonales d'un losange sont des axes de symétrie.



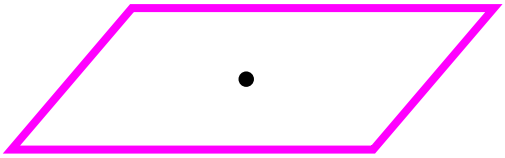
auto (L) : auto$^+$ $(r_{1/2}\,;\, r_{2/2})$; auto$^-$ $(s_{d1}\,;\, s_{d2})$

2.3. Les automorphismes du parallélogramme quelconque

Il existe exactement 2 isométries qui superposent tout parallélogramme quelconque à lui-même :

2 "déplacements" ou 2 auto$^+$: les rotations de $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{2}$ tour de centre O.

On résume les auto$^+$ en affirmant que le point "O" est un centre de rotation d'ordre 2.
Comme il n'existe pas de retournement du plan qui superpose tout parallélogramme quelconque à lui-même: il n'existe pas d'auto$^-$.



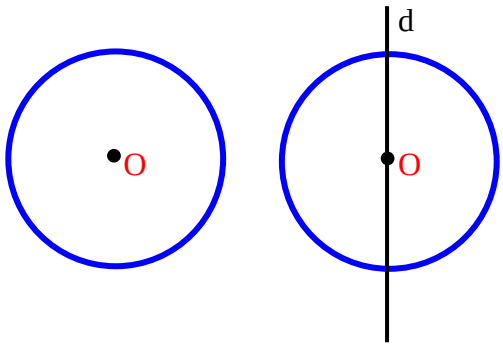
auto (P) → auto$^+$ ($r_{1/2}$; $r_{2/2}$)
auto (P) → auto$^-$ (néant)

2.4. Les automorphismes du disque

Il existe une double infinité d'isométries qui superposent tout disque (cercle) à lui-même:

- une infinité de "déplacements" ou une infinité d'auto$^+$: les rotations $r_{o,\hat{a}}$ où $0° < \hat{a} \leq 360°$;
- une infinité de "retournements" ou une infinité d'auto$^-$: les symétries orthogonales dont les droites de points fixes sont les droites diamétrales.

On résume les auto$^+$ en affirmant que le point "O" est un centre de rotation d'ordre infini ou de révolution et les auto$^-$ en affirmant que toutes les droites diamétrales sont axes de symétrie.



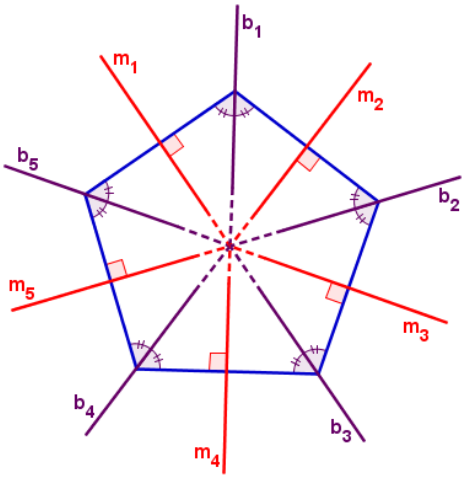
auto (D) → auto$^+$ ($r_{o,\hat{a}}$ où $0° < \hat{a} \leq 360°$)
auto (D) → auto$^-$ (s_d où d est un diamètre)

2.5. Les automorphismes du n-gone régulier

Rappels:

Dans tout n-gone régulier: - toute médiatrice est axe de symétrie.
- toute bissectrice est axe de symétrie.
- les médiatrices et les bissectrices sont concourantes en O (centre des cercles inscrit et circonscrit au n-gone).

2.5.1. Cas des 5-gones réguliers

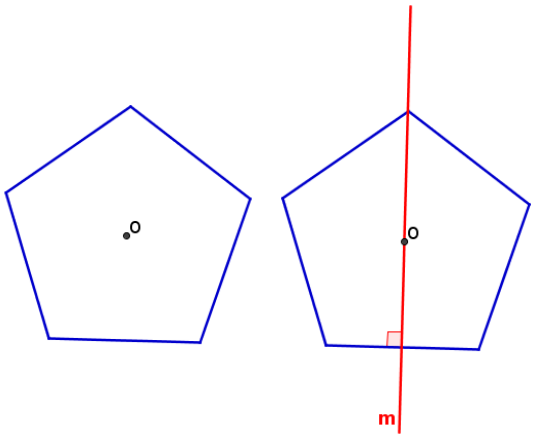


Remarque: dans un 5-gone régulier, toute médiatrice est confondue avec une bissectrice. Il n'y a donc que 5 axes de symétrie

Il existe exactement 10 isométries qui superposent tout 5-gone régulier à lui-même:

- 5 "déplacements" ou 5 auto$^+$: les rotations $r_{o,\hat{a}}$ où $\hat{a} = k \cdot \frac{360°}{5}$ (avec $0 \leq k \leq 4$);
- 5 "retournements" ou 5 auto$^-$: les symétries orthogonales dont les droites de points fixes sont les médiatrices (ou les bissectrices).

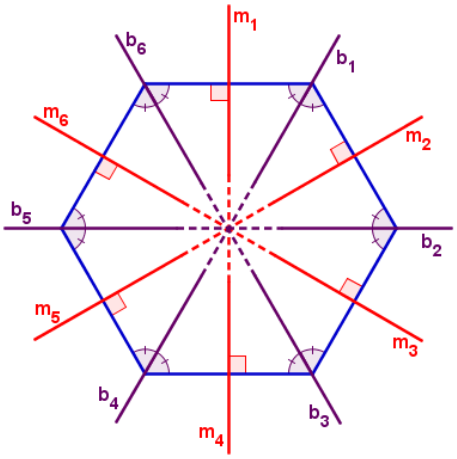
On résume les auto$^+$ en affirmant que le point "O" est un centre de rotation d'ordre 5 et les auto$^-$ en affirmant que toutes les médiatrices (ou les bissectrices) sont axes de symétrie.



auto (5-gone)

- auto$^+$ ($r_{o,\hat{a}}$ où $\hat{a} = k \cdot \frac{360°}{5}$)
- auto$^-$ (s_m où m est une médiatrice ou une bissectrice)

2.5.2. Cas des 6-gones réguliers



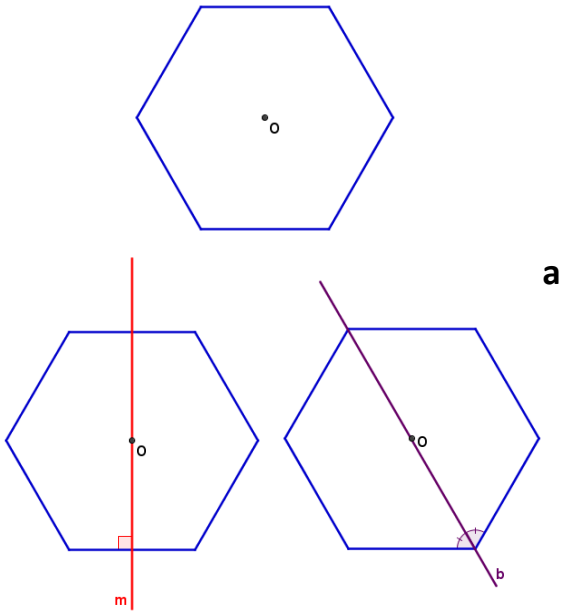
Remarque:

- dans un 6-gone régulier, toute médiatrice est confondue avec la médiatrice du côté opposé. Il n'y a donc que 3 axes de symétrie via les médiatrices
- dans un 6-gone régulier, toute bissectrice est confondue avec la bissectrice de l'angle opposé. Il n'y a donc que 3 axes de symétrie via les bissectrices

Il existe exactement 12 isométries qui superposent tout 6-gone à lui-même:

- 6 "déplacements" ou 6 auto$^+$: les rotations $r_{o,\hat{a}}$ où $\hat{a} = k \cdot \frac{360°}{6}$ (avec $0 \leq k \leq 5$);
- 6 "retournements" ou 6 auto$^-$: les symétries orthogonales dont les droites de points fixes sont les médiatrices et les bissectrices.

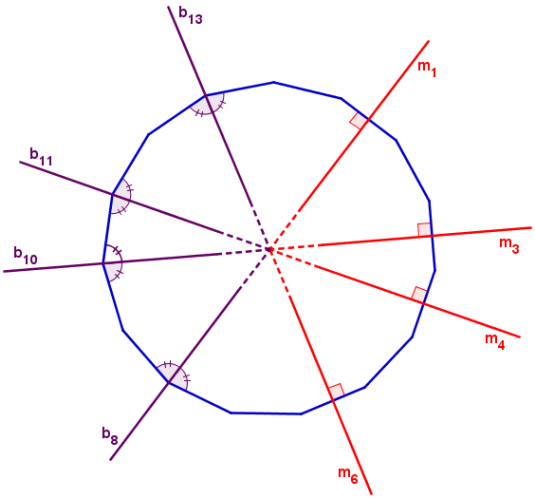
On résume les auto$^+$ en affirmant que le point "O" est un centre de rotation d'ordre 6 et les auto$^-$ en affirmant que 3 médiatrices et 3 bissectrices sont axes de symétrie.



auto (6-gone)

- auto$^+$ ($r_{o,\hat{a}}$ où $\hat{a} = k \cdot \frac{360°}{6}$)
- auto$^-$ (s_m où m est une médiatrice et s_b où b est bissectrice)

2.5.3. Cas des n-gones réguliers avec n impair

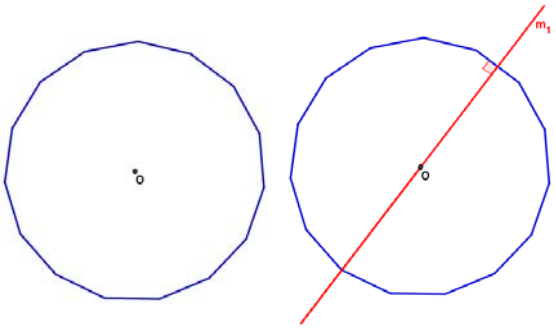


Remarque: dans un n-gone régulier, avec n impair, toute médiatrice est confondue avec une bissectrice. Il n'y a donc que "n" axes de symétrie

Il existe exactement "2n" isométries qui superposent tout n-gone, avec n impair, à lui-même:

- n "déplacements" ou n auto$^+$: les rotations $r_{o,\hat{a}}$ où $\hat{a} = k \cdot \frac{360°}{n}$ (avec $0 \leq k \leq n-1$);
- n "retournements" ou n auto$^-$: les symétries orthogonales dont les droites de points fixes sont les médiatrices (ou les bissectrices).

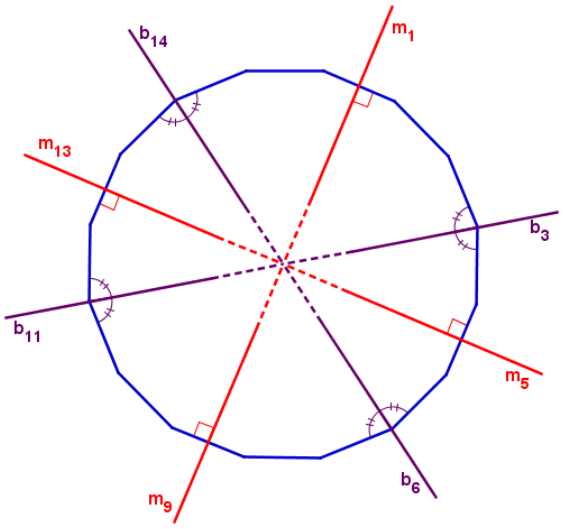
On résume les auto$^+$ en affirmant que le point "O" est un centre de rotation d'ordre n et les auto$^-$ en affirmant que toutes les médiatrices (ou les bissectrices) sont axes de symétrie.



auto (n-gone) avec n impair

- auto$^+$ ($r_{o,\hat{a}}$ où $\hat{a} = k \cdot \frac{360°}{n}$)
- auto$^-$ (s_m où m est une médiatrice)

2.5.4. Cas des n-gones réguliers avec n pair



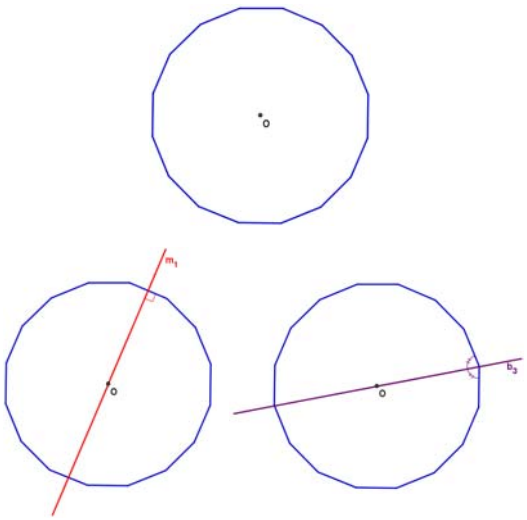
Remarque:

- dans un n-gone régulier, avec n pair, toute médiatrice est confondue avec la médiatrice du côté opposé. Il n'y a donc que $\frac{n}{2}$ axes de symétrie via les médiatrices
- dans un n-gone régulier, avec n pair, toute bissectrice est confondue avec la bissectrice de l'angle opposé. Il n'y a donc que $\frac{n}{2}$ axes de symétrie via les bissectrices

Il existe exactement "2n" isométries qui superposent tout n-gone, avec n pair, à lui-même:

- n "déplacements" ou n auto$^+$: les rotations $r_{o,\hat{a}}$ où $\hat{a} = k \cdot \frac{360°}{n}$ (avec $0 \leq k \leq n-1$);
- n "retournements" ou n auto$^-$: les symétries orthogonales dont les droites de points fixes sont les médiatrices et les bissectrices.

On résume les auto$^+$ en affirmant que le point "O" est un centre de rotation d'ordre n et les auto$^-$ en affirmant que $\frac{n}{2}$ médiatrices et $\frac{n}{2}$ bissectrices sont axes de symétrie..



auto (n-gone) avec n pair

- auto$^+$ ($r_{o,\hat{a}}$ où $\hat{a} = k \cdot \frac{360°}{n}$)
- auto$^-$ (s_m où m est une médiatrice et s_b ou b est bissectrice)

Remarques:

- Les automorphismes du plan euclidien sont les similitudes planes.
- Les automorphismes d'un carré plongé dans l'espace euclidien de dimension 3 sont au nombre de 16 (et pas seulement 8) (cf. p.III – 69)

3. Les isométries de l'espace

Pour les objets "finis", les automorphismes se réduisent aux isométries qui superposent l'objet à lui-même. La recherche des automorphismes des objets "finis" se résume donc à déterminer les types d'isométries de l'espace qui superposent les objets "finis" à eux-mêmes.

Avant d'aborder les différents types d'isométries de l'espace, rappelons quelques informations concernant les isométries planes et qui, par analogie, seront utiles pour comprendre les isométries de l'espace.

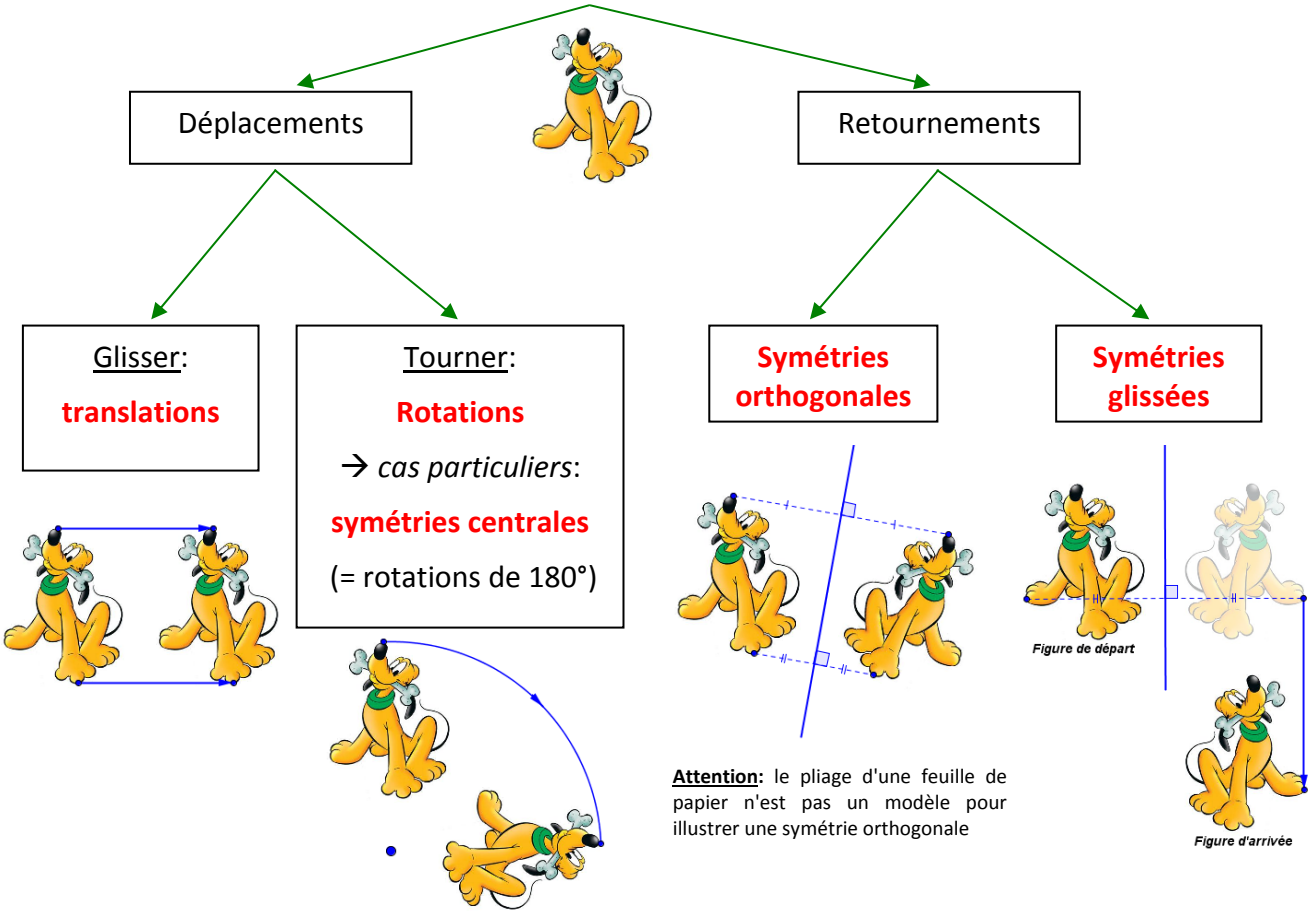
3.1. Isométries du plan – Déplacements du plan – Retournements du plan

- Les isométries sont des permutations qui conservent les distances.
- Les déplacements plans sont les isométries qui conservent les types d'orientations du plan ou de manière équivalente les types de **dessins** de mains ainsi que les cercles orientés.
- Les retournements plans sont les isométries qui inversent les types d'orientations du plan ou de manière équivalente les types de **dessins** de mains ainsi que les cercles orientés.

3.2. Composées de déplacements et/ou de retournements du plan

- La composée de deux déplacements plans est un déplacement plan.
- La composée de deux retournements plans est un déplacement plan.
- La composée d'un déplacement et d'un retournement plans est un retournement plan.
- La composée d'un retournement et d'un déplacement plans est un retournement plan.

3.3. Synthèse sur les isométries du plan



3.4. Isométries de l'espace

Les isométries de l'espace sont les permutations de l'espace qui conservent les distances.

3.5. Déplacements et retournements de l'espace

Semblablement aux isométries du plan, les isométries de l'espace se décomposent en "deux sous-familles": les déplacements et les retournements de l'espace (voir synthèse p.13).

En géométrie élémentaire, une définition des **déplacements de l'espace** peut être donnée via les types de mains (ou de pieds): *"un déplacement de l'espace est une isométrie de l'espace qui conserve les types de mains (ou de pieds)". Une main droite (gauche) reste une main droite (gauche).*

En géométrie élémentaire, une définition des **retournements de l'espace** peut être donnée via les types de mains ou de pieds: "*un retournement de l'espace est une isométrie de l'espace qui inverse les types de mains (ou de pieds). Une main droite (gauche) devient une main gauche (droite).*

Remarque: Une définition exacte des déplacements et des retournements de l'espace fait appel à la notion de repères lévogyre et dextrogyre (repères isomorphes aux mains), c'est-à-dire aux deux orientations de l'espace. Dans cette approche, un déplacement de l'espace devient: "*un déplacement de l'espace est une isométrie de l'espace qui conserve les types de repères et un retournement de l'espace est une isométrie de l'espace qui inverse les types de repères" (Pour plus d'informations voir points a, b et c ci-dessous).*

a) Les repères lévogyres et dextrogyres de l'espace ou les deux "véritables" orientations de l'espace

Soient les deux repères (**Bleu – Rouge – Vert**) ou (B-R-V) ci-dessous:

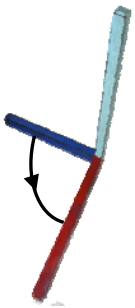
Lequel de ces deux repères B-R-V est dit "lévogyre" ou "dextrogyre"?

Nos mains "gauche et "droite" nous aident à répondre à cette question, ainsi que les sens de rotation horlogique et antihorlogique.

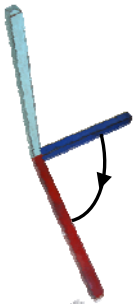
b) Sens horlogique et antihorlogique

Soit le repère (Bleu – Rouge – Vert) ou (B-R-V) formé de trois vecteurs orthonormés.
Pour préciser si le repère (B-R-V) est un repère lévogyre ou dextrogyre, on applique la règle conventionnelle suivante:

- le troisième vecteur (vert) symbolise la direction verticale.
- on observe le sens giratoire du "plus petit angle" (horlogique ou antihorlogique) pour "passer" du premier vecteur (bleu) au deuxième vecteur (rouge):
  - ✓ Si le sens est ***antihorlogique***, alors, le repère est ***dextrogyre***.
  - ✓ Si le sens est ***horlogique***, alors, le repère est ***lévogyre***.



Repère (B-R-V)
Repère ***dextrogyre***



Repère (B-R-V)
Repère ***lévogyre***

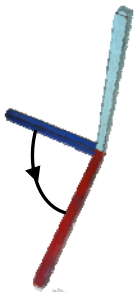
c) <u>Analogie avec les mains</u>

Le qualificatif lévogyre (gauche) ou dextrogyre (droit) se détermine par la règle des mains gauche ou droite explicitée ci-dessous.

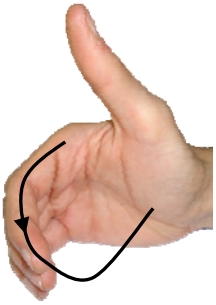
- Le pouce de la main gauche ou de la main droite se positionne nécessairement comme le troisième vecteur (ici, le vert).

  ✓ Si le sens des doigts, pour "passer" (par le plus petit angle) du premier vecteur (ici, bleu) au deuxième vecteur (ici, rouge) est illustré par la main droite, alors le repère est dextrogyre.

Repère dextrogyre



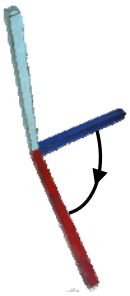
Repère (B-R-V)



Main droite

  ✓ Si le sens des doigts, pour "passer" (par le plus petit angle) du premier vecteur (ici, bleu) au deuxième vecteur (ici, rouge) est illustré par la main gauche, alors le repère est lévogyre.

Repère lévogyre



Repère (B-R-V)

Main gauche

Cette règle conventionnelle montre que les mains gauche et droite sont isomorphes aux repères lévogyre et dextrogyre. Elles peuvent donc servir à définir les déplacements et les retournements de l'espace.

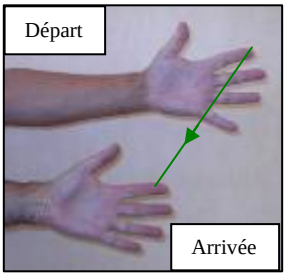
Types de déplacements et de retournements de l'espace

Isométries de l'espace

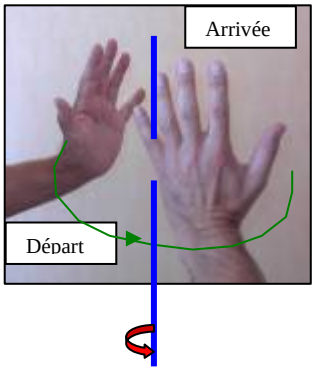
Déplacements

"Un déplacement de l'espace est une isométrie de l'espace qui conserve les types de mains (l'orientation)"

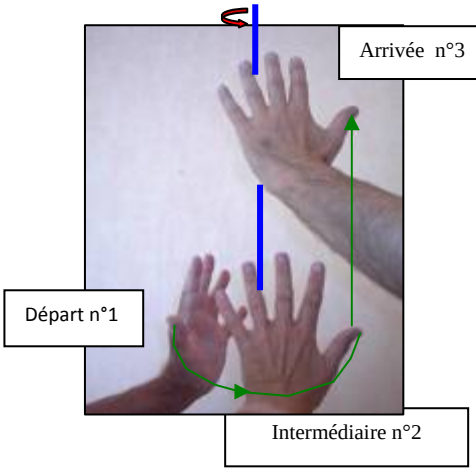
Translations de l'espace



Rotations de l'espace



Vissages de l'espace



Vissage: rotation suivie d'une translation dont la direction est parallèle à l'axe de la rotation.

Retournements

"Un retournement de l'espace est une isométrie de l'espace qui inverse les types de mains (l'orientation)"

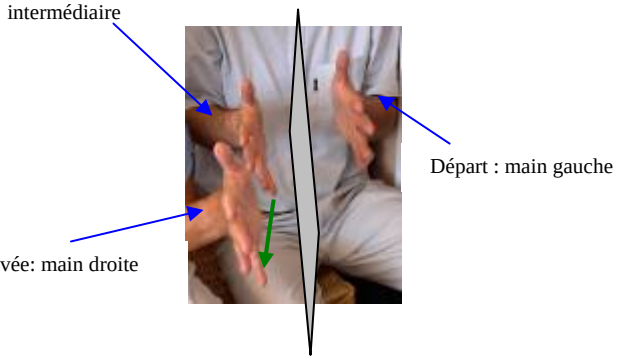
Symétries centrales de l'espace

Main droite

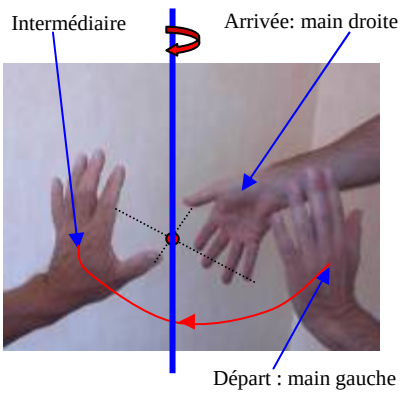
Main gauche

Symétries bilatérales de l'espace

Symétries bilatérales glissées de l'espace



Antirotations de l'espace



Symétrie bilatérale glissée: symétrie bilatérale suivie d'une translation dont la direction est parallèle au plan définissant la symétrie bilatérale.

Antirotation[1]**:** rotation de l'espace suivie d'une symétrie centrale de l'espace dont le centre appartient à l'axe de la rotation.

[1] Une antirotation d'angle 180° correspond à une symétrie bilatérale dont le plan est perpendiculaire à l'axe de la rotation et passe par le centre de la symétrie centrale.

4. Orbite d'un point et automorphismes de solides

4.1. Nombre d'automorphismes d'un solide et orbite d'un point

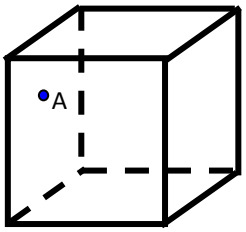
Les automorphismes sont des transformations qui superposent un objet à lui-même tout en conservant la structure de celui-ci.
Il en résulte que tout point de l'objet est envoyé, par un automorphisme, sur un point de mêmes caractéristiques.

L'ensemble des points ayant les mêmes caractéristiques porte le nom *d'orbite d'un point* et est obtenu en recherchant les images du point par tous les automorphismes de l'objet.

La détermination du nombre d'automorphismes ($Auto^+$ et $Auto^-$) d'un solide peut donc se faire par la recherche du nombre de points ayant les mêmes caractéristiques qu'un ***point non-particulier*** donné du solide (il y a autant d'automorphismes que le nombre de points non-particuliers ayant les mêmes caractéristiques).

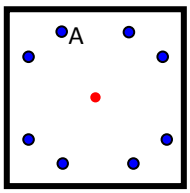
Détermination du nombre de points dans l'orbite d'un "point non particulier" d'un cube:

Soit A un "point non particulier"(1) d'une face carrée d'un cube.



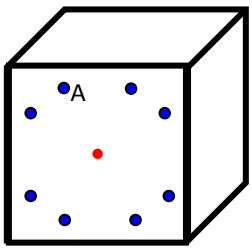
(1): Par point non particulier, on entend un point qui n'est ni un sommet, ni un milieu d'arête, ni un milieu de face, ni un point d'une bissectrice, d'une médiatrice, …

Il y a exactement huit points de cette face carrée qui possèdent les mêmes caractéristiques que le point A (ce sont les 8 points obtenus à partir des 8 automorphismes de cette face carrée).



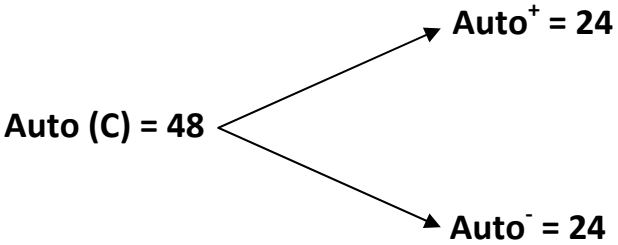
Comme un cube est formé de six carrés, il y a donc 48 (6 x 8) points du cube qui possèdent les mêmes caractéristiques que le point A.

Comme tout automorphisme superpose le cube à lui-même tout en appliquant un point sur un point de même caractéristique, on en conclut que le nombre d'automorphismes du cube est de 48.



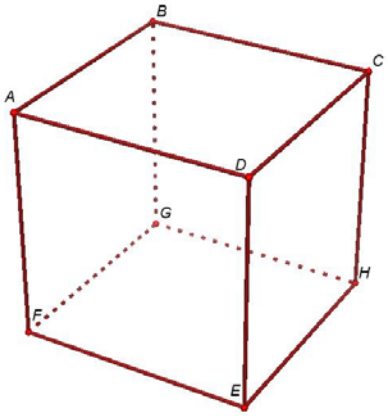
Le théorème de LAGRANGE montre qu'il existe autant d'automorphismes du type "déplacements" que du type "retournements" si l'objet possède au moins un automorphisme du type retournement

Dès lors, comme le cube possède au moins un plan de symétrie, on a:

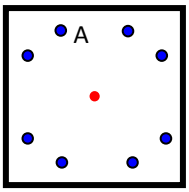


II. Les automorphismes des polyèdres euclidiens platoniciens (réguliers)

1. Le cube



1.1. Orbite d'un point du cube et nombre d'automorphismes du cube



À partir d'un "point non particulier" A du cube, il y a 48 autres points du cube qui possèdent les mêmes caractéristiques que le point A. On en déduit donc qu'il existe 48 automorphismes. Comme il existe au moins un retournement de l'espace qui superpose le cube à lui-même, du théorème de Lagrange , on peut déduire qu'il existe le même nombre de retournements de l'espace que de déplacements de l'espace qui superposent le cube à lui-même .

1.2. Automorphismes du cube

Voici les différents types de déplacements et de retournements; ils sont développés et illustrés à partir du point 1.3.

- **Les déplacements (voir les illustrations ci-après)**

TYPES	CENTRE/AXE/PLAN	NOMBRE ASSOCIÉ AUX TYPES
- L'identité		1
- Les rotations liées aux axes d'ordre 4 ($\frac{1}{4}, \frac{2}{4}$ et $\frac{3}{4}$)	Droite joignant le centre de deux faces opposées	3 x 3 rotations
- Les rotations liées aux axes d'ordre 3 ($\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$)	Droite joignant deux sommets opposés	4 x 2 rotations
- Les rotations liées aux axes d'ordre 2 ($\frac{1}{2}$)	Droite joignant le milieu de deux arêtes opposées	6 x 1 rotation $\Rightarrow$ 24 déplacements

- **Les retournements (voir les illustrations ci-après)**

TYPES	CENTRE/AXE/PLAN	NOMBRE ASSOCIÉ AUX TYPES
- Les symétries centrales	Centre du cube.	1
- Les symétries bilatérales	Plan passant par deux arêtes opposées.	6
- Les symétries bilatérales	Plan médiateur à deux faces opposées.	3
- Les antirotations liées aux axes d'ordre 4 ($\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$)	Droite joignant le centre de deux faces opposées.	3 $ar_{1/4}$ et 3 $ar_{3/4}$
- Les antirotations liées aux axes d'ordre 3 ($\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$)	Droite joignant deux sommets opposés	4 $ar_{1/3}$ et 4 $ar_{2/3}$ $\Rightarrow$ 24 retournements

		3 axes d'ordre 4			4 axes d'ordre 3		6 axes d'ordre 2	Total
Auto$^+$	1_E	$r_{1/4}$	$r_{2/4}$	$r_{3/4}$	$r_{1/3}$	$r_{2/3}$	$r_{1/2}$	
	1	3	3	3	4	4	6	24
Auto$^-$	S_c	$ar_{1/4}$	S_α	$ar_{3/4}$	$ar_{1/3}$	$ar_{2/3}$	S_β	
	1	3	3	3	4	4	6	24
Auto (C)								**48**

Axe d'ordre 4 = axe passant par le milieu de deux faces opposées

Axe d'ordre 3 = axe passant deux sommets opposés

Axe d'ordre 2 = axe passant par le milieu de deux arêtes opposées

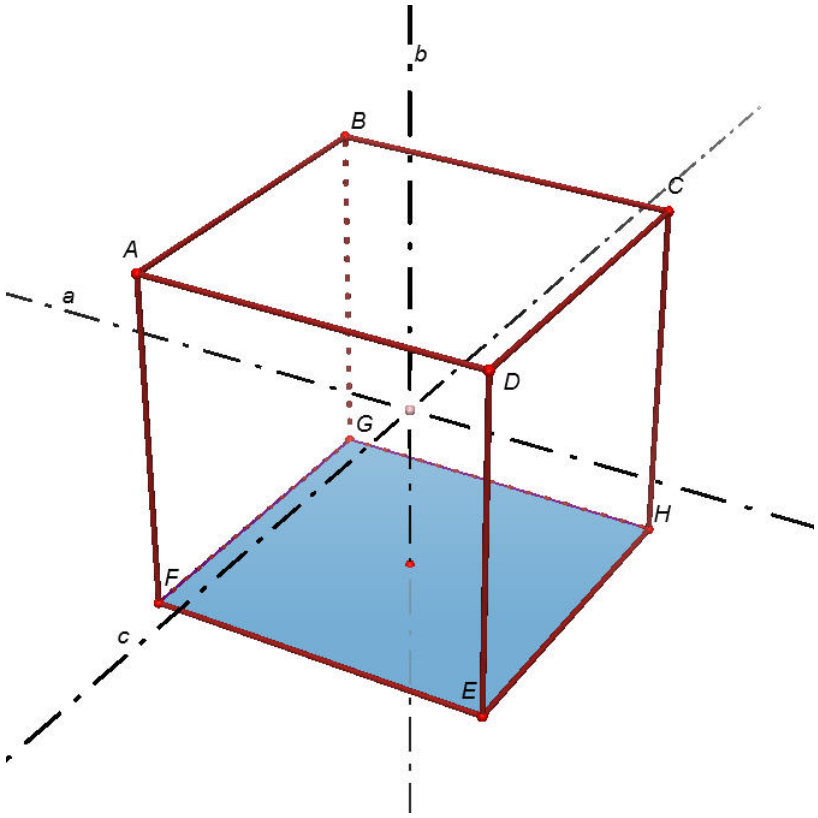
α = plans médiaux

β = plans diagonaux

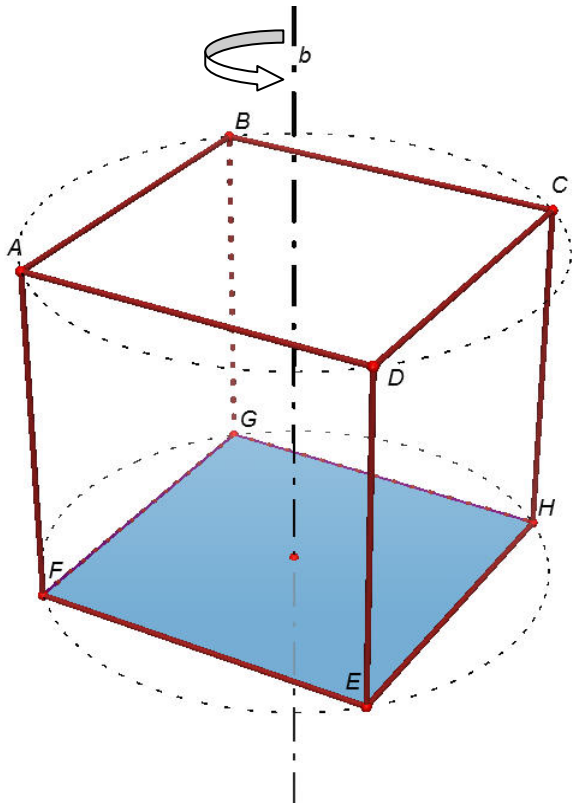
Remarque: Une antirotation d'angle 180° correspond à une symétrie bilatérale dont le plan est perpendiculaire à l'axe de la rotation et passe par le centre de la symétrie centrale.

1.3. Illustrations

- ***Les rotations liées aux axes d'ordre 4 ($\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ et $\frac{3}{4}$)***

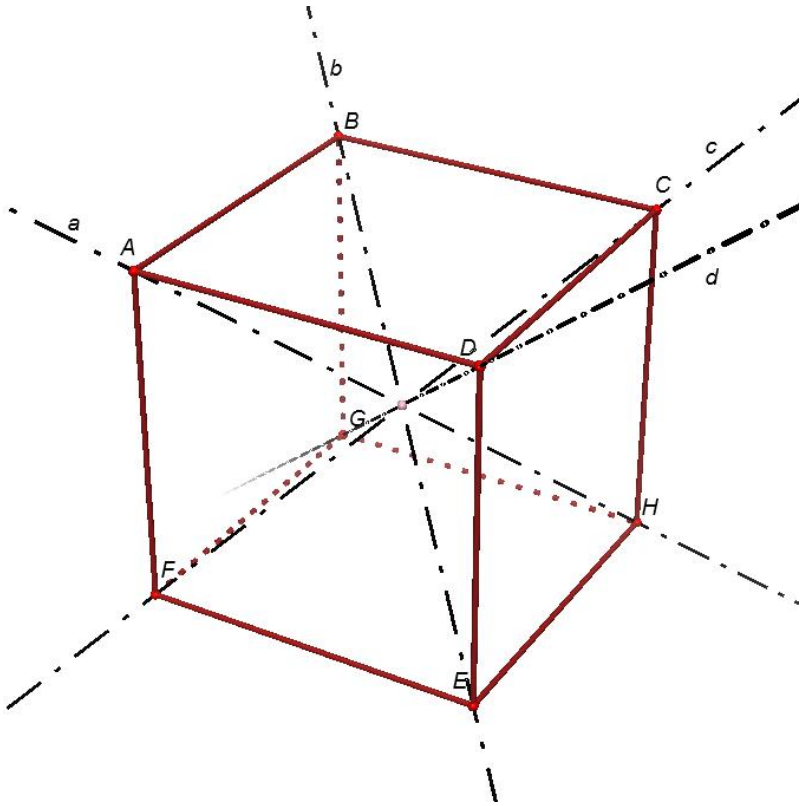


Exemple: image des sommets du cube par la rotation d' $\frac{1}{4}$ de tour d'axe b

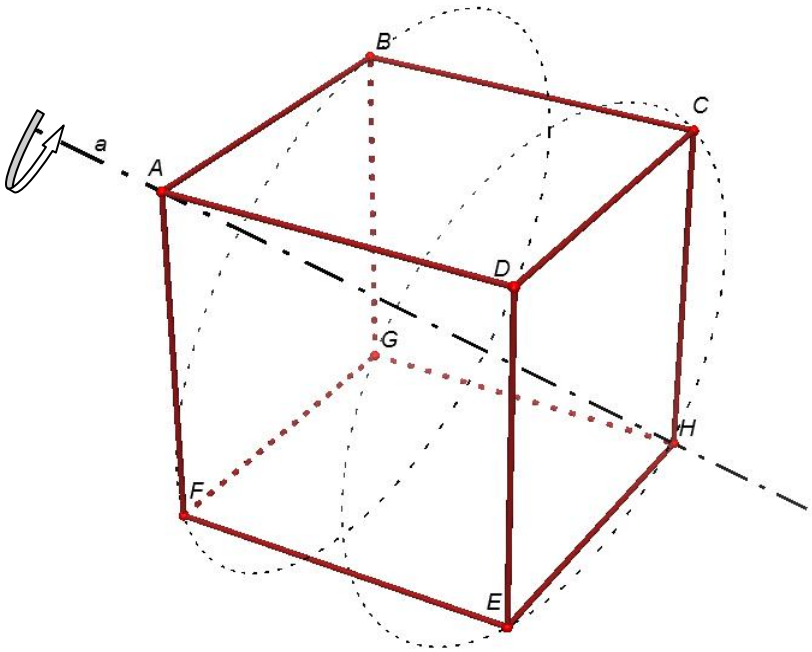


$b\frac{1}{4}$	
Origine	Image
A	D
B	A
C	B
D	C
E	H
F	E
G	F
H	G

- ***Les rotations liées aux axes d'ordre 3 ($\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$)***

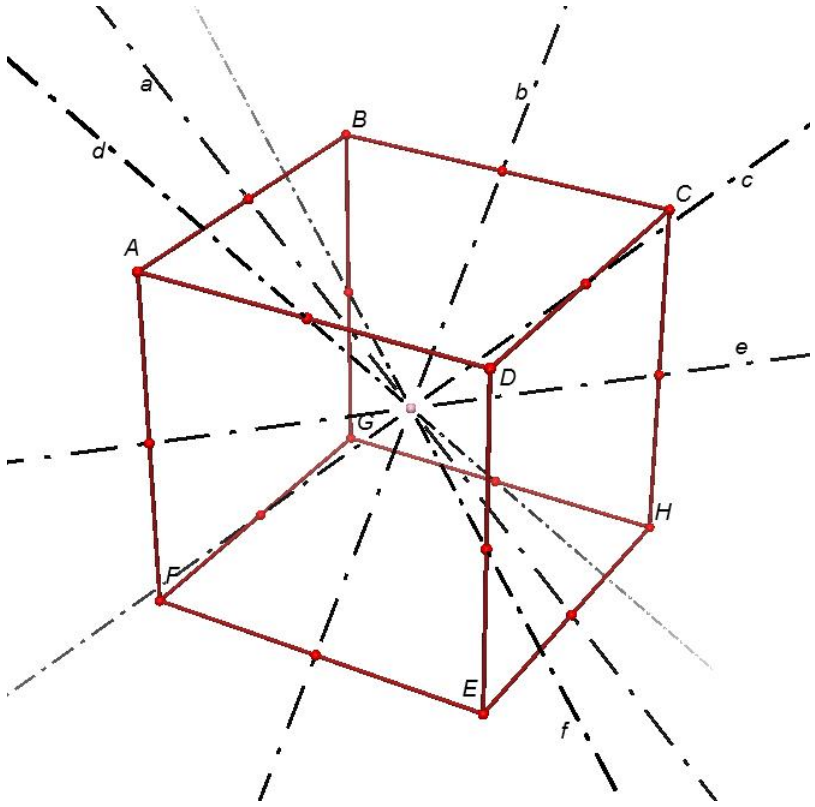


Exemple: image des sommets du cube par la rotation d' $\frac{1}{3}$ de tour d'axe a

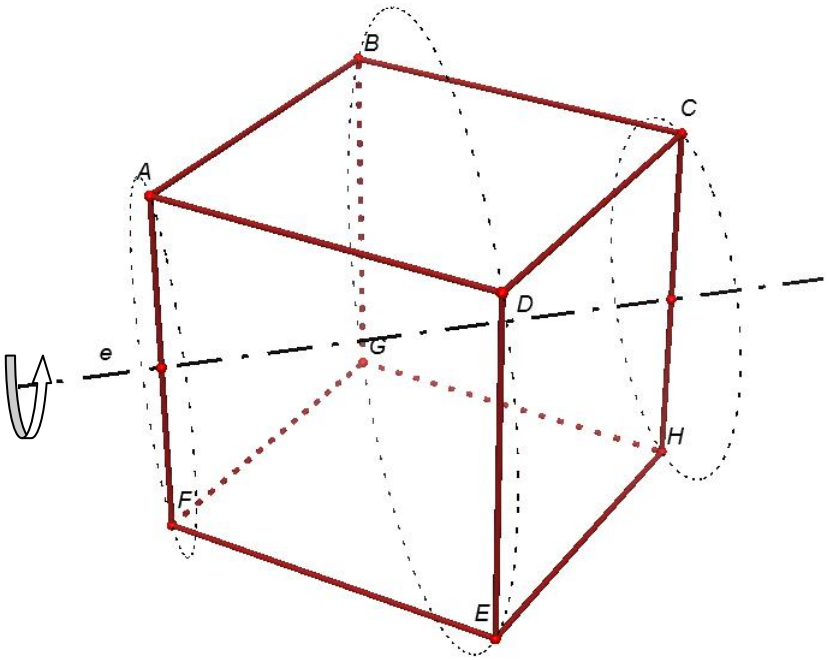


$a\frac{1}{3}$	
Origine	Image
A	A
B	F
C	G
D	B
E	C
F	D
G	E
H	H

- ***Les rotations liées aux axes d'ordre 2 ($\frac{1}{2}$)***

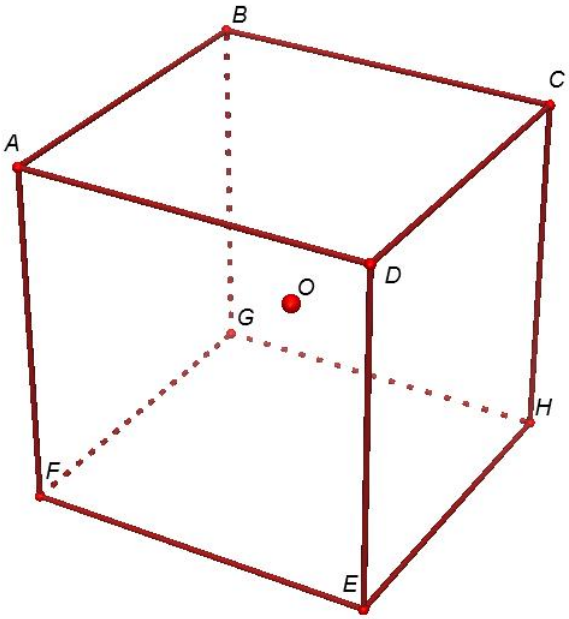


Exemple: image des sommets du cube par la rotation d' $\frac{1}{2}$ tour d'axe e

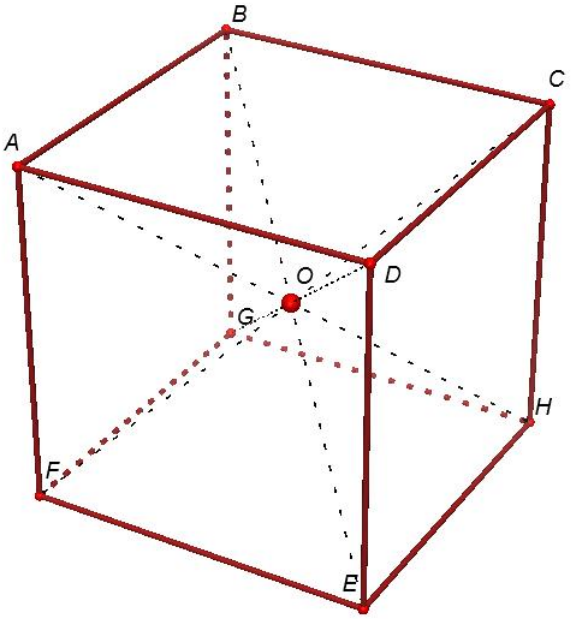


$e_{\frac{1}{2}}$	
Origine	Image
A	F
B	E
C	H
D	G
E	B
F	A
G	D
H	C

- ***La symétrie centrale***



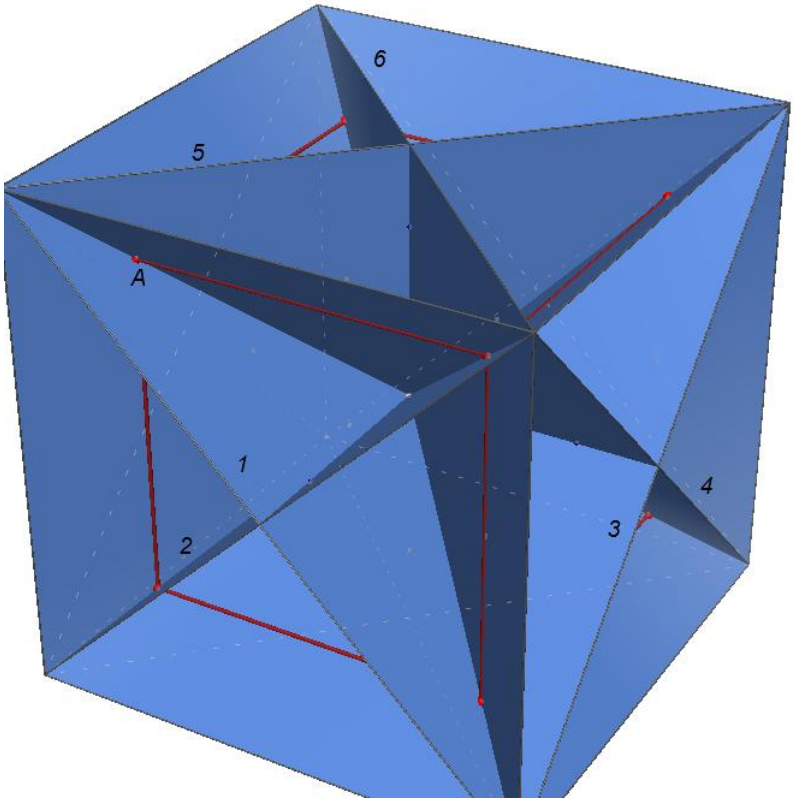
Exemple: image des sommets du cube par la symétrie de centre O



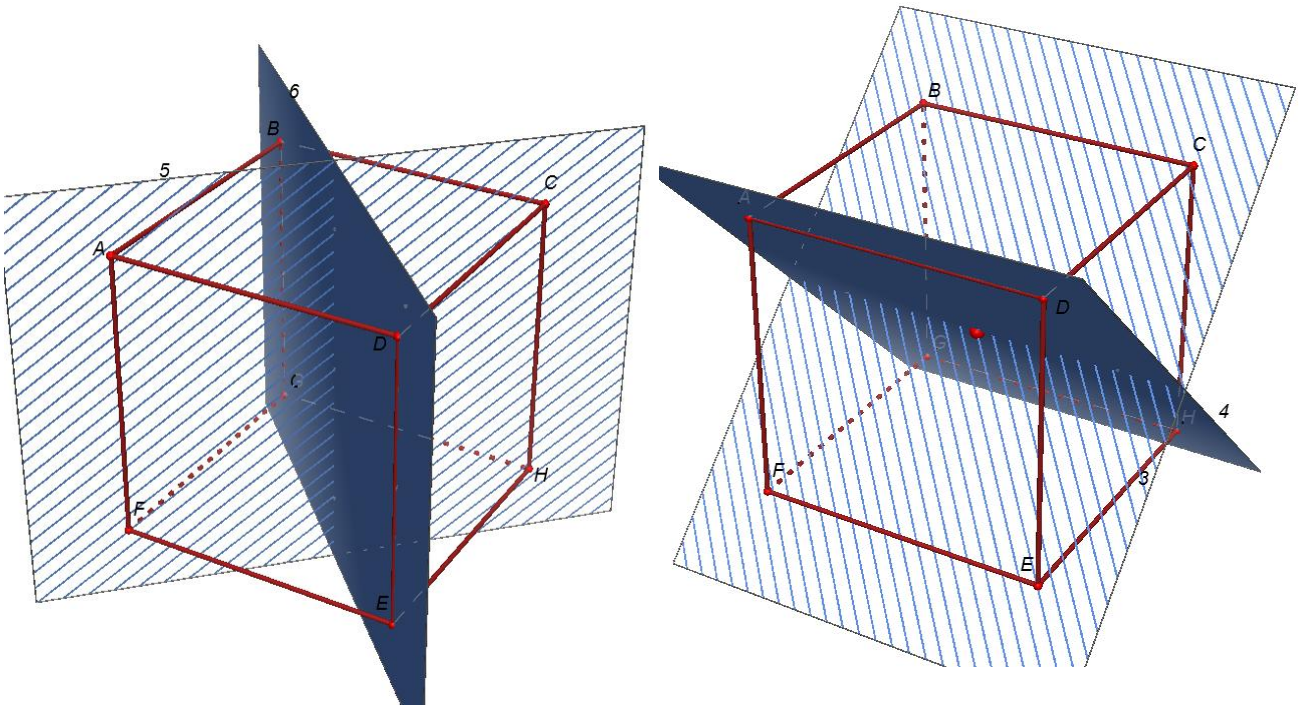
S_O	
Origine	Image
A	H
B	E
C	F
D	G
E	B
F	C
G	D
H	A

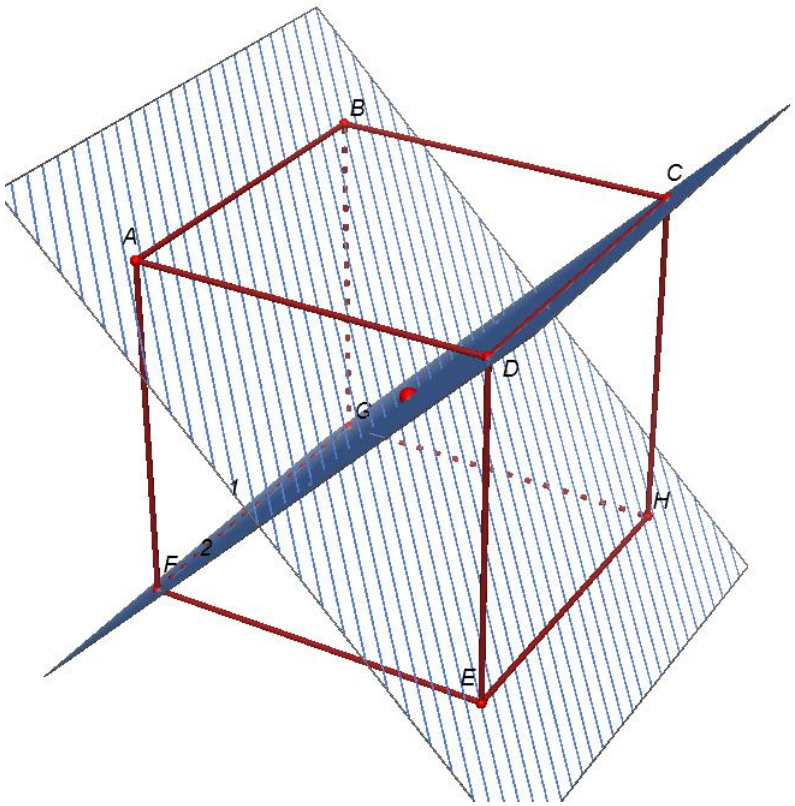
- ***Les symétries bilatérales (Plan passant par deux arêtes opposées)***

  Les 6 plans:

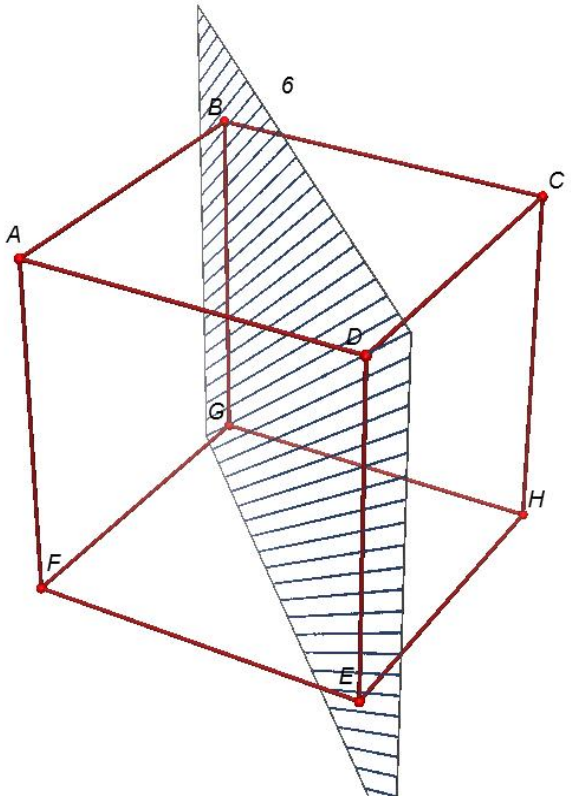


Pour une meilleure visualisation:



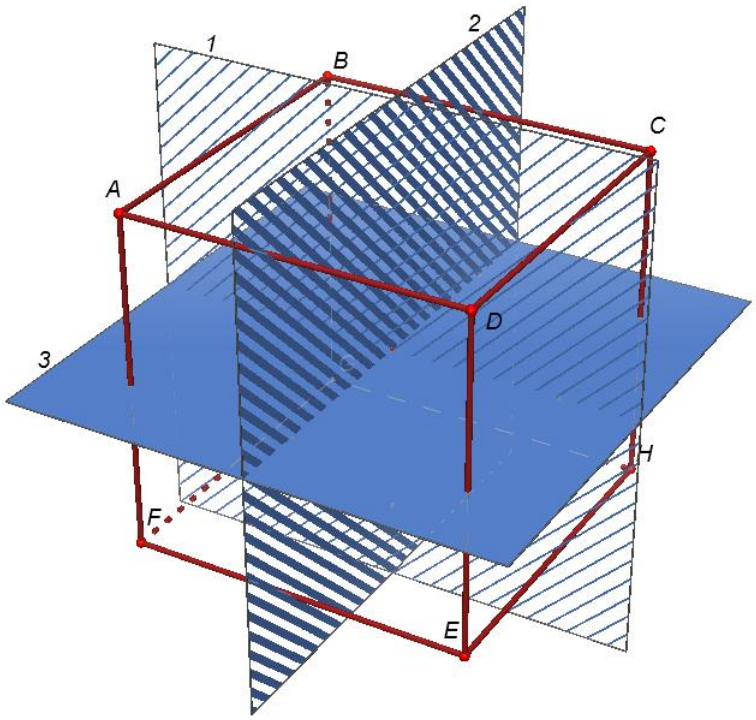


Exemple: image des sommets du cube par la symétrie bilatérale de plan "6"

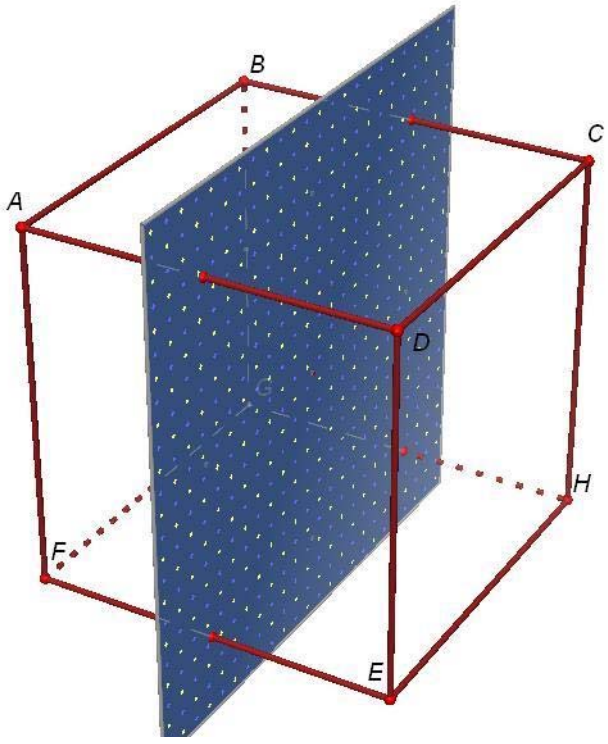


S_6	
Origine	Image
A	C
B	B
C	A
D	D
E	E
F	H
G	G
H	F

- ***Les symétries bilatérales (Plan médiateur à deux faces opposées)***

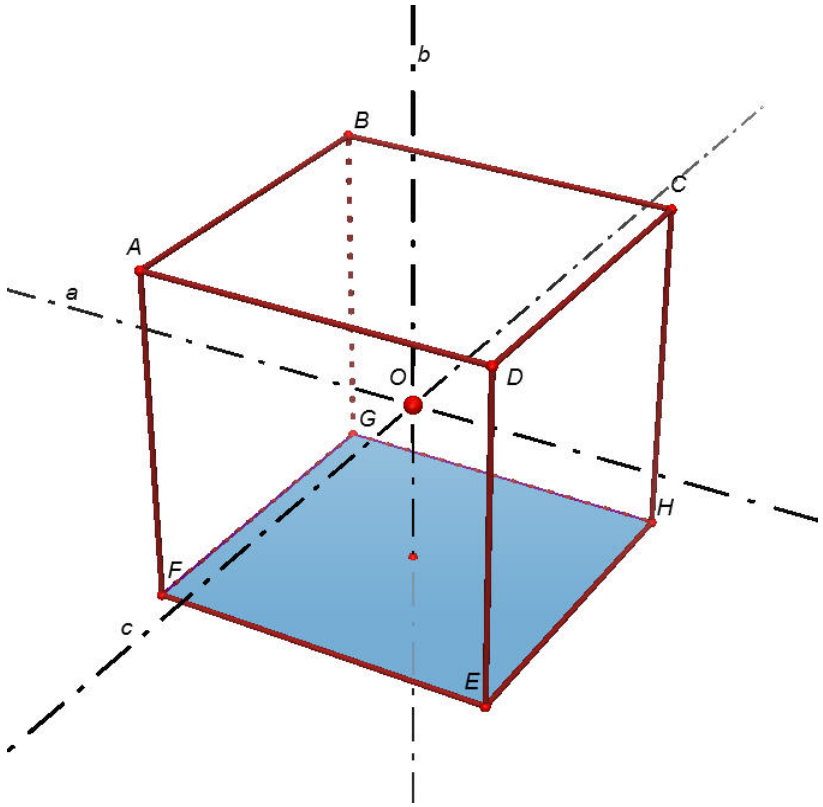


Exemple: image des sommets du cube par la symétrie bilatérale de plan ''1''

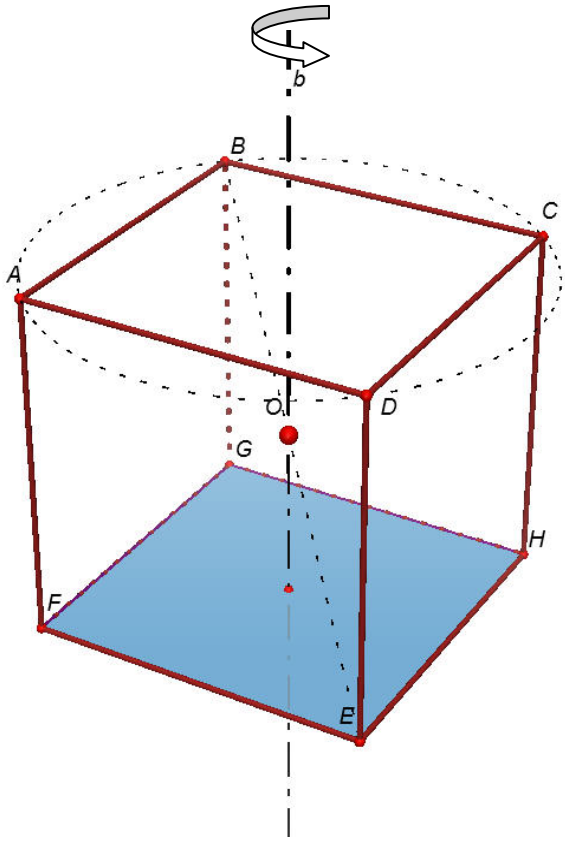


S_1	
Origine	Image
A	D
B	C
C	B
D	A
E	F
F	E
G	H
H	G

- ***Les antirotations liées aux axes d'ordre 4 ($\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$)***

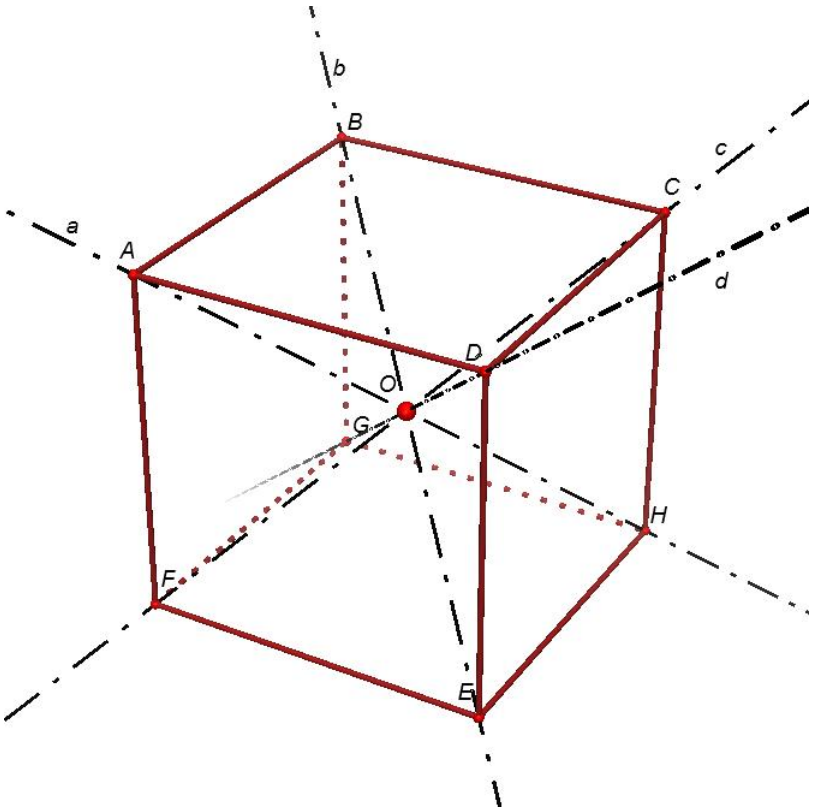


Exemple: image des sommets du cube par l'antirotation d' $\frac{1}{4}$ de tour d'axe b ($b\frac{1}{4}$)

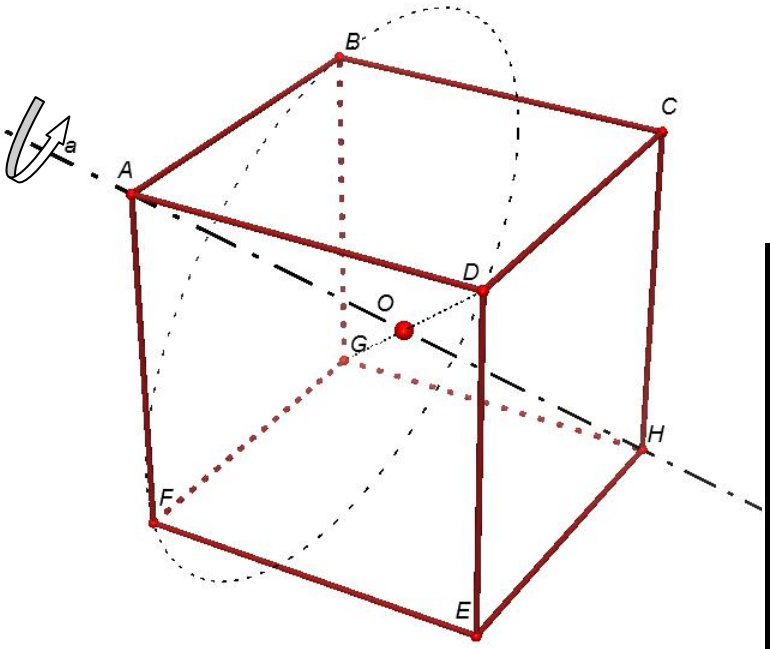


S_O o $b\frac{1}{4}$		
Origine	Image par $b\frac{1}{4}$	Image par S_O o $b\frac{1}{4}$
A	D	G
B	A	H
C	B	E
D	C	F
E	H	A
F	E	B
G	F	C
H	G	D
O	O	O

- ***Les antirotations liées aux axes d'ordre 3 ($\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$)***

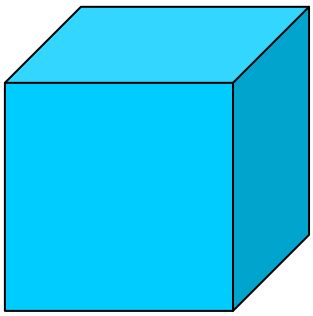


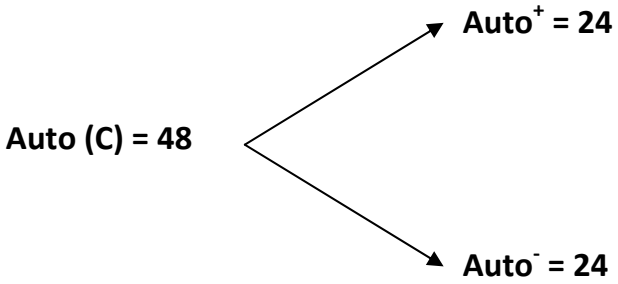
Exemple: image des sommets du cube par l'antirotation d' $\frac{1}{3}$ de tour d'axe a ($a\frac{1}{3}$)



S_O o $a\frac{1}{3}$		
Origine	Image par $a\frac{1}{3}$	Image par S_O o $a\frac{1}{3}$
A	A	H
B	F	C
C	G	D
D	B	E
E	C	F
F	D	G
G	E	B
H	H	A
O	O	O

1.4. Synthèse



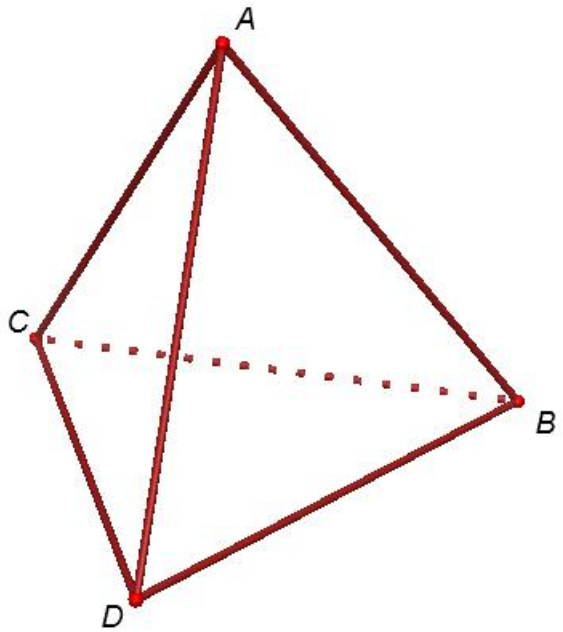


		3 axes d'ordre 4			4 axes d'ordre 3		6 axes d'ordre 2	Total
Auto$^+$	**1_E**	**$r_{1/4}$**	**$r_{2/4}$**	**$r_{3/4}$**	**$r_{1/3}$**	**$r_{2/3}$**	**$r_{1/2}$**	
	1	3	3	3	4	4	6	24
Auto$^-$	**S_c**	**$ar_{1/4}$**	**S_α**	**$ar_{3/4}$**	**$ar_{1/3}$**	**$ar_{2/3}$**	**S_β**	
	1	3	3	3	4	4	6	24
Auto (C)								**48**

α = plans médiaux

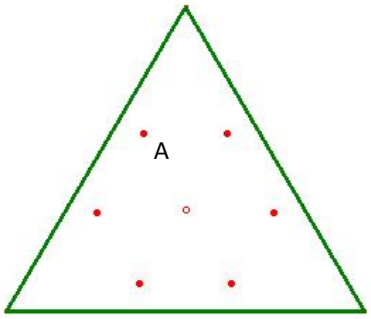
β = plans diagonaux

2. Le tétraèdre régulier



2.1. Orbite d'un point du tétraèdre régulier

Soit A un "point non particulier" d'une face triangulaire (équilatéral) du tétraèdre régulier. Il y a exactement six points de cette face triangulaire qui possèdent les mêmes caractéristiques que le point A (ce sont les 6 points obtenus à partir des 6 automorphismes de ce triangle équilatéral).



Comme un tétraèdre régulier est formé de quatre triangles équilatéraux, il y a donc 24 (6 x 4) points du tétraèdre régulier qui possèdent les mêmes caractéristiques que le point A.

Puisque tout automorphisme superpose le tétraèdre régulier à lui-même tout en appliquant un point sur un point de même caractéristique, on en conclut que le nombre d'automorphismes du tétraèdre régulier est de 24.

2.2. Nombre d'automorphismes du tétraèdre régulier

Grace à la théorie de l'orbite, on sait que le tétraèdre régulier possède 24 automorphismes. On en a déduit donc avec l'aide du théorème de Lagrange qu'il y a 12 d'automorphismes de type déplacement et 12 automorphismes de type retournement car le tétraèdre régulier possède un plan de symétrie.

2.3. Automorphismes du tétraèdre régulier

Voici les différents types de déplacements et de retournements; ils sont développés et illustrés à partir du point 2.4.

- **Les déplacements**

TYPES	CENTRE/AXE/PLAN	NOMBRE ASSOCIÉ AUX TYPES
- L'identité		1
- Les rotations liées aux axes d'ordre 3 ($\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$)	Droite joignant un sommet et le milieu de la face opposée	4 x 2 rotations
- Les rotations liées aux axes d'ordre 2 ($\frac{1}{2}$)	Droite joignant le milieu de deux arêtes opposées	3 x 1 rotation $\Rightarrow$ 12 déplacements

- **Les retournements**

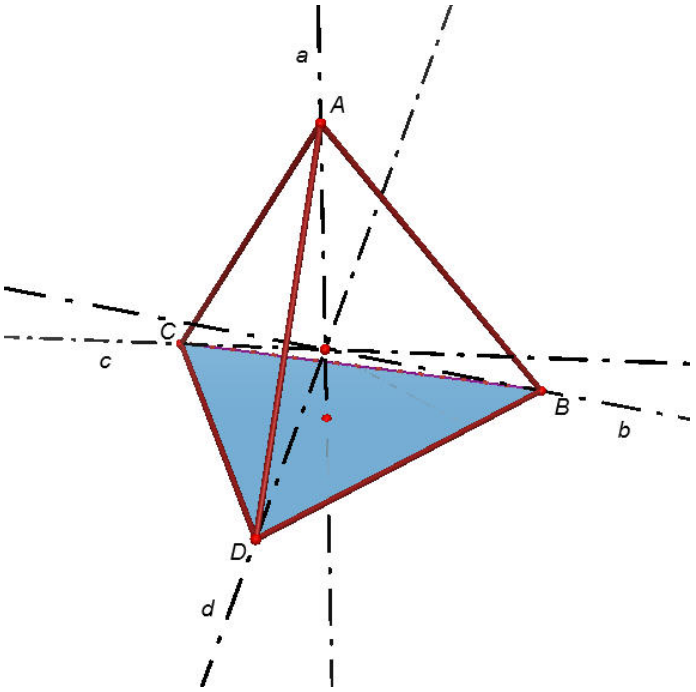
TYPES	CENTRE/AXE/PLAN	NOMBRE ASSOCIÉ AUX TYPES
- Les symétries bilatérales	Plan passant par une arête et le milieu de l'arête opposée	6
- Les antirotations liées aux axes d'ordre 2 mais avec des rotations de $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ de tour.	Droite joignant le milieu de deux arêtes opposées	3 ar $_{1/4}$ et 3 ar $_{3/4}$ $\Rightarrow$ 12 retournements

		4 axes d'ordre 3		3 axes d'ordre 2		Total
Auto$^+$	**1_E**	**$r_{1/3}$**	**$r_{2/3}$**	**$r_{1/2}$**		
	1	4	4	3		12
Auto$^-$		**S_α**		**$ar_{1/4}$**	**$ar_{3/4}$**	
		6		3	3	12
Auto (Tét)						**24**

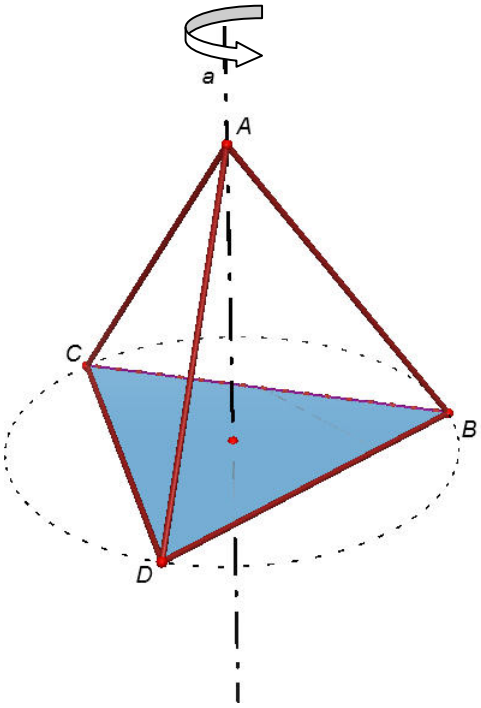
α = plan passant par une arête et le milieu de l'arête opposée

2.4. Illustrations

- ***Les rotations liées aux axes d'ordre 3 ($\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$)***

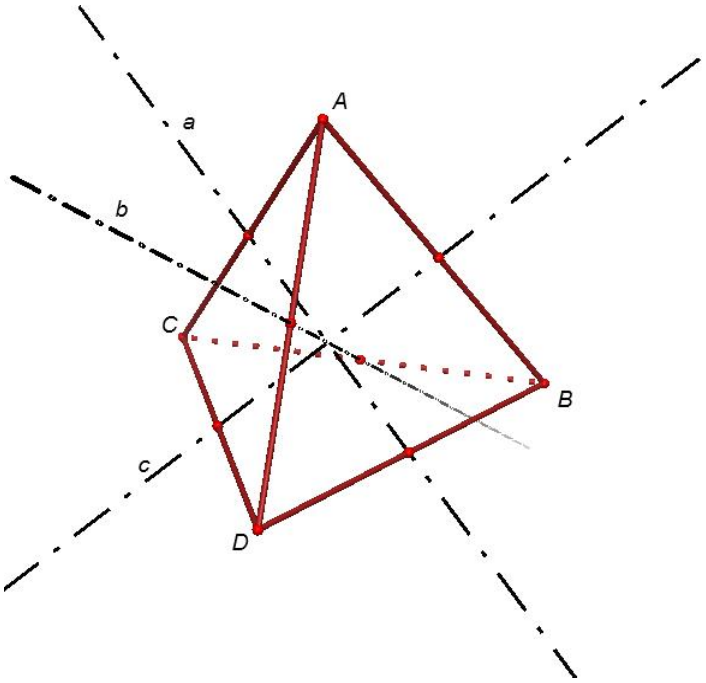


Exemple: image des sommets du tétraèdre régulier par la rotation d' $\frac{1}{3}$ de tour d'axe a

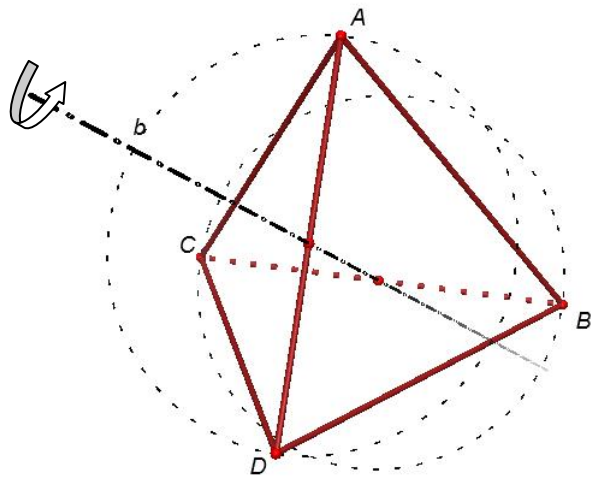


$a\frac{1}{3}$	
Origine	Image
A	A
B	C
C	D
D	B

- ***Les rotations liées aux axes d'ordre 2 ($\frac{1}{2}$)***

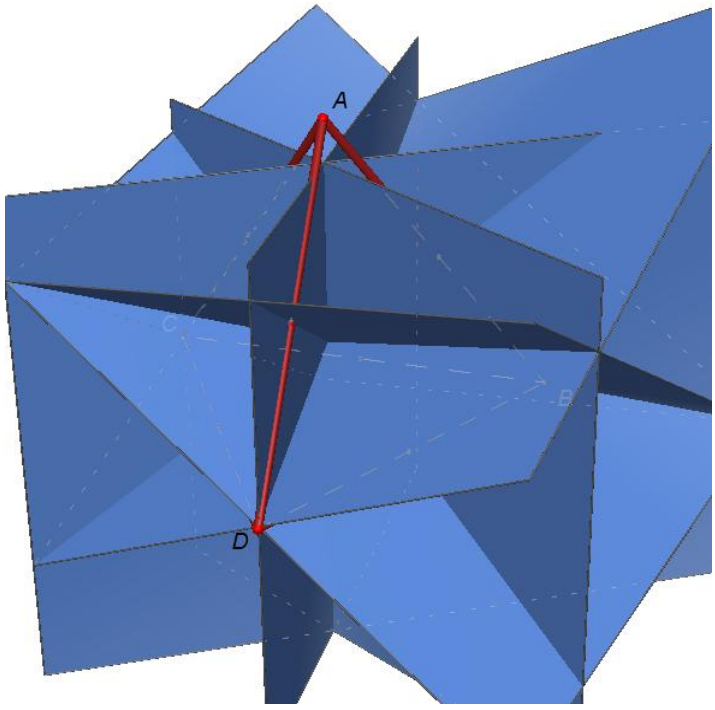


Exemple: image des sommets du tétraèdre régulier par la rotation d' $\frac{1}{2}$ tour d'axe b ($b_{\frac{1}{2}}$)

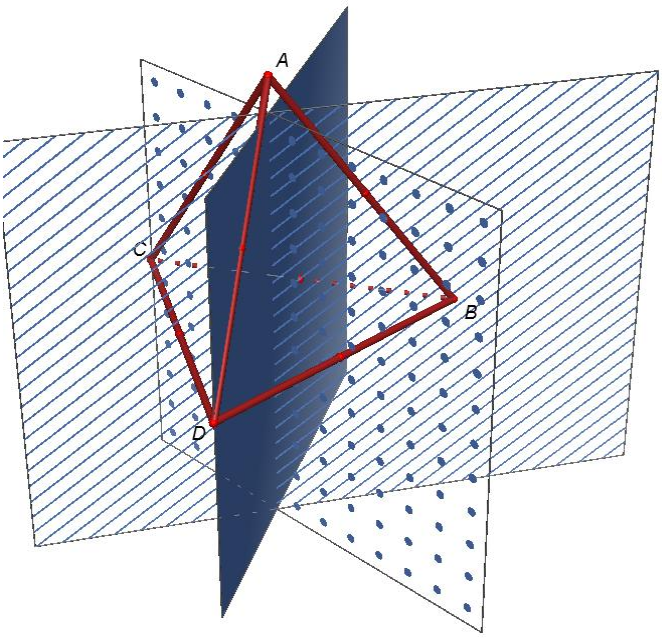


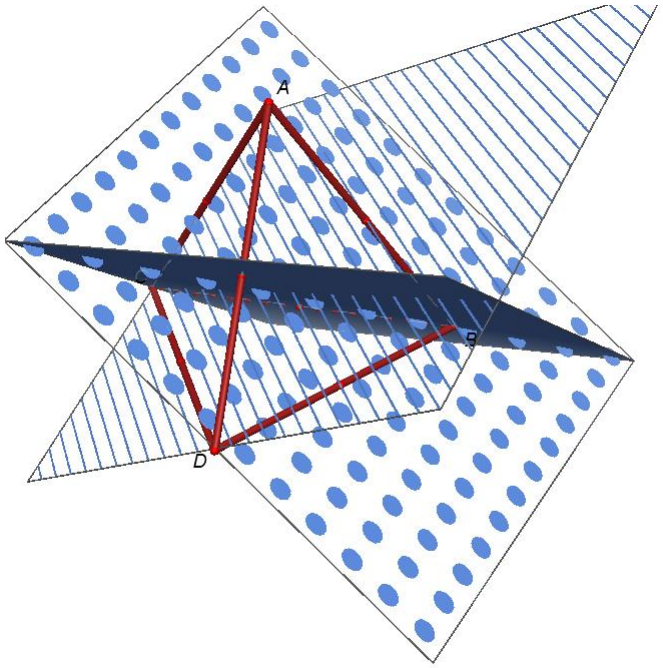
$b_{\frac{1}{2}}$	
Origine	Image
A	D
B	C
C	B
D	A

- ***Les symétries bilatérales***

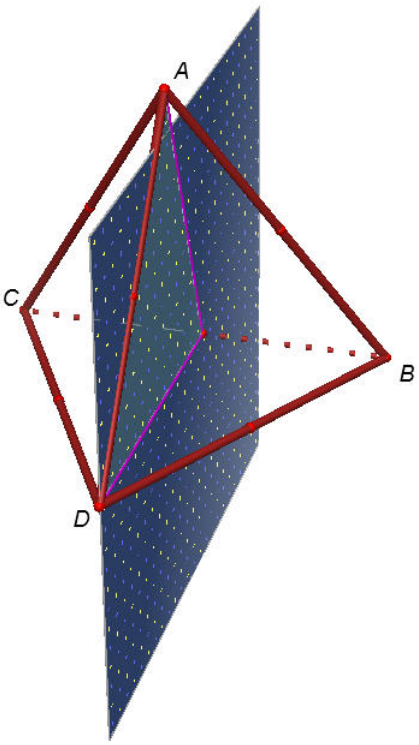


Pour une meilleure visualisation:



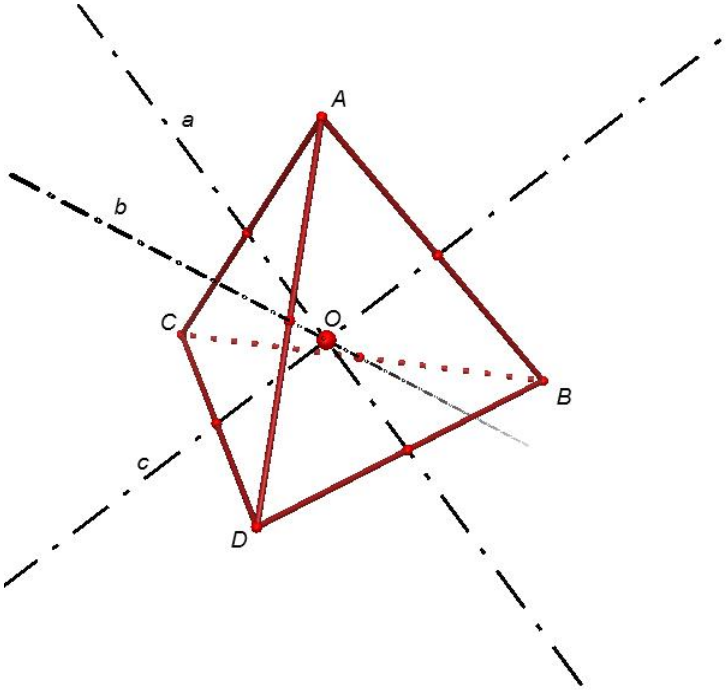


Exemple: image des sommets du cube par la symétrie bilatérale de plan "3"

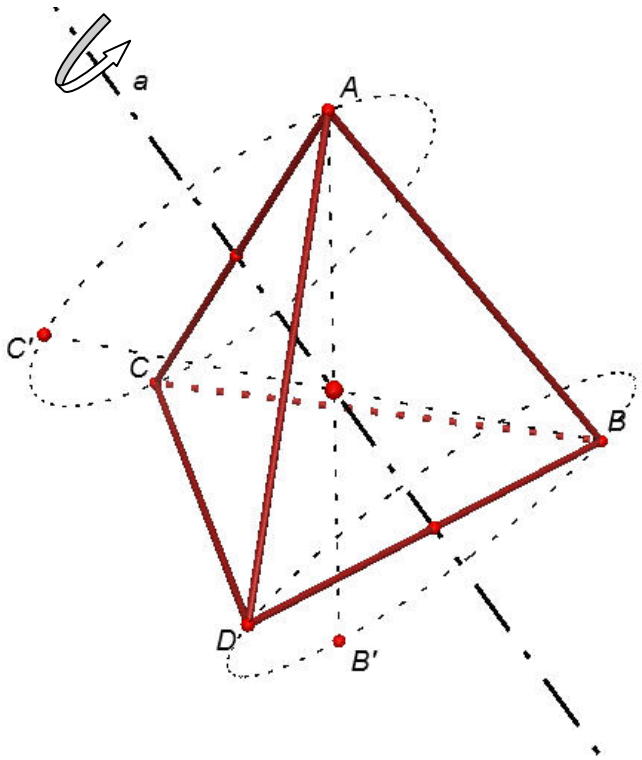


S_3	
Origine	Image
A	A
B	C
C	B
D	D

- ***Les antirotations liées aux axes d'ordre 4 ($\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$)***

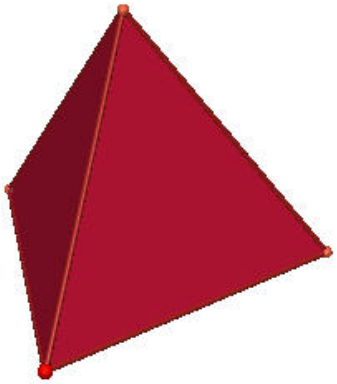


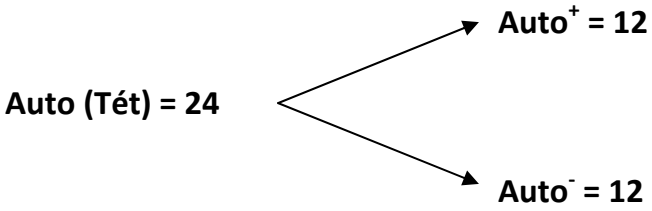
Exemple: image de C par l'antirotation d' $\frac{1}{4}$ de tour d'axe a ($a\frac{1}{4}$)



S_O o $a\frac{1}{4}$		
Origine	Image par $a\frac{1}{4}$	Image par S_O o $a\frac{1}{4}$
A		D
B	B'	A
C	C'	B
D		C

2.5. Synthèse

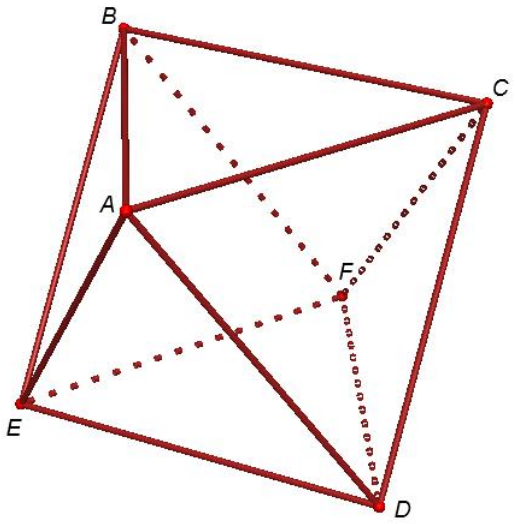




		4 axes d'ordre 3	3 axes d'ordre 2	Total
Auto+	**1_E**	**$r_{1/3}$ $r_{2/3}$**	**$r_{1/2}$**	
	1	4 4	3	12
Auto-		**S_α**	**$ar_{1/4}$ $ar_{3/4}$**	
		6	3 3	12
Auto (Tét)				**24**

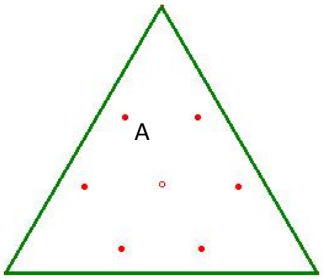
α = plan passant par une arête et le milieu de l'arête opposée

3. L'octaèdre régulier



3.1. Orbite d'un point de l'octaèdre régulier et Nombre d'automorphismes de l'octaèdre régulier

Soit A un "point non particulier" d'une face triangulaire (équilatéral) de l'octaèdre régulier. Il y a exactement six points de cette face triangulaire qui possèdent les mêmes caractéristiques que le point a (ce sont les 6 points obtenus à partir des 6 automorphismes de ce triangle équilatéral).



Comme un octaèdre régulier est formé de huit triangles équilatéraux, il y a donc 48 (6 x 8) points de l'octaèdre régulier qui possèdent les mêmes caractéristiques que le point A.

Puisque tout automorphisme superpose l'octaèdre régulier à lui-même tout en appliquant un point sur un point de même caractéristique, on en conclut que le nombre d'automorphismes de l'octaèdre régulier est de 48. Grâce au théorème de Lagrange il y a 24 automorphismes de type déplacement et 24 automorphismes de type retournement.

3.2. Automorphismes de l'octaèdre régulier

Voici les différents types de déplacements et de retournements; ils sont développés et illustrés à partir du point 3.3.

- **Les déplacements**

TYPES	CENTRE/AXE/PLAN	NOMBRE ASSOCIÉ AUX TYPES
- L'identité		1
- Les rotations liées aux axes d'ordre 4 ($\frac{1}{4}, \frac{2}{4}$ et $\frac{3}{4}$)	Droite joignant deux sommets opposés	3 x 3 rotations
- Les rotations liées aux axes d'ordre 3 ($\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$)	Droite joignant le centre de deux faces opposées.	4 x 2 rotations
- Les rotations liées aux axes d'ordre 2 ($\frac{1}{2}$)	Droite joignant le milieu de deux arêtes opposées	6 x 1 rotation $\Rightarrow$ 24 déplacements

- **Les retournements**

TYPES	CENTRE/AXE/PLAN	NOMBRE ASSOCIÉ AUX TYPES
- Les symétries centrales	Centre du tétraèdre.	1
- Les symétries bilatérales	Plan passant par deux arêtes opposées.	3
- Les symétries bilatérales	Plan passant par deux sommets opposés et le milieu de deux arêtes opposées.	6

- Les antirotations liées aux axes d'ordre 4 ($\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$) - Les antirotations liées aux axes d'ordre 3 ($\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$)	Droite joignant deux sommets opposés Droite joignant le centre de deux faces opposées.	3 $ar_{1/4}$ et 3 $ar_{3/4}$ 4 $ar_{1/3}$ et 4 $ar_{2/3}$ $\Rightarrow$ 24 retournements

		3 axes d'ordre 4	4 axes d'ordre 3	6 axes d'ordre 2	Total
Auto$^+$	**1_E**	**$r_{1/4}$ $r_{2/4}$ $r_{3/4}$**	**$r_{1/3}$ $r_{2/3}$**	**$r_{1/2}$**	
	1	3 3 3	4 4	6	24
Auto$^-$	**S_c**	**$ar_{1/4}$ S_α $ar_{3/4}$**	**$ar_{1/3}$ $ar_{2/3}$**	**S_β**	
	1	3 3 3	4 4	6	24
Auto (Oc)					**48**

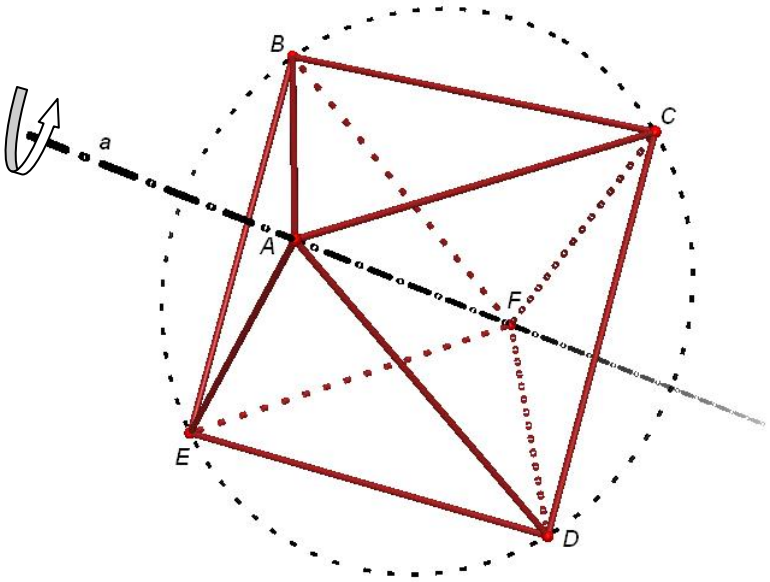
α = plans perpendiculaires aux axes d'ordre 4 et passant par le centre de l'octaèdre

β = plans perpendiculaires aux axes d'ordre 2 et passant par le centre de l'octaèdre

3.3. Illustrations

- ***Exemple de rotation liée aux axes d'ordre 4***:

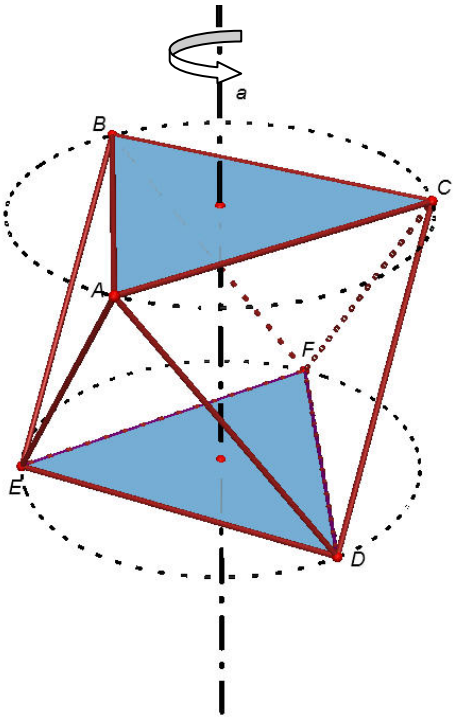
  Image des sommets de l'octaèdre régulier par la rotation d' $\frac{1}{4}$ de tour d'axe a ($a\frac{1}{4}$)



$a\frac{1}{4}$	
Origine	Image
A	A
B	E
C	B
D	C
E	D
F	F

- ***Les rotations liées aux axes d'ordre 3 ($\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$)***

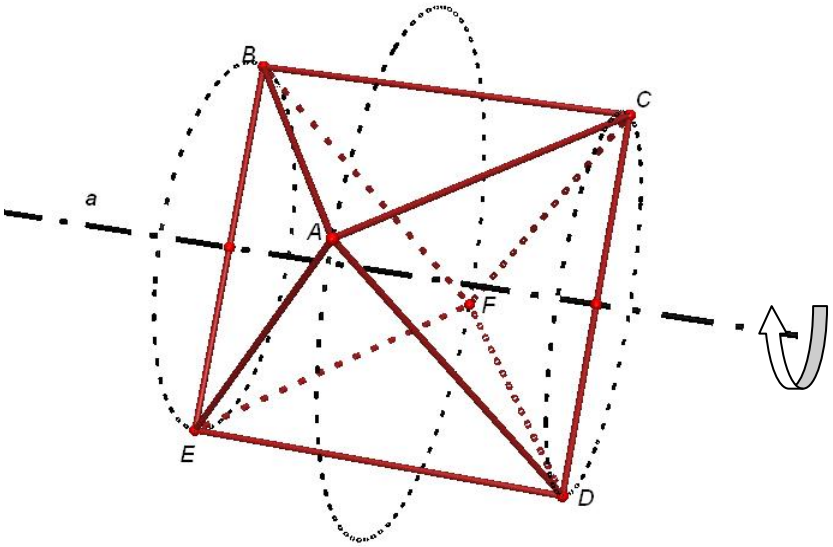
  Image des sommets de l'octaèdre régulier par la rotation d' $\frac{1}{3}$ de tour d'axe a ($a\frac{1}{3}$)



a $\frac{1}{3}$	
Origine	Image
A	C
B	A
C	B
D	F
E	D
F	E

- ***Les rotations liées aux axes d'ordre 2 ($\frac{1}{2}$)***

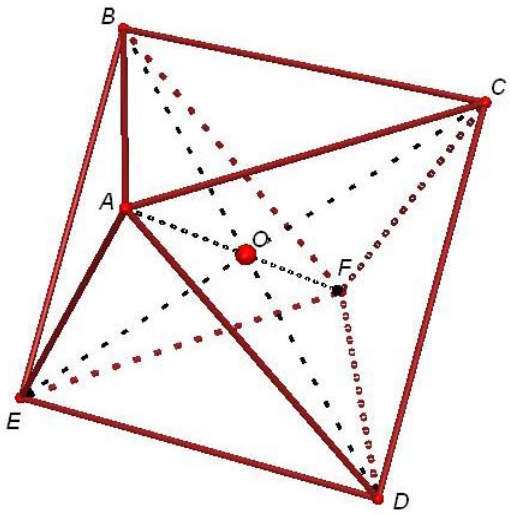
  Image des sommets de l'octaèdre régulier par la rotation d' $\frac{1}{2}$ tour d'axe a ($a\frac{1}{2}$)



a $\frac{1}{2}$	
Origine	Image
A	F
B	E
C	D
D	C
E	B
F	A

- ***La symétrie centrale***

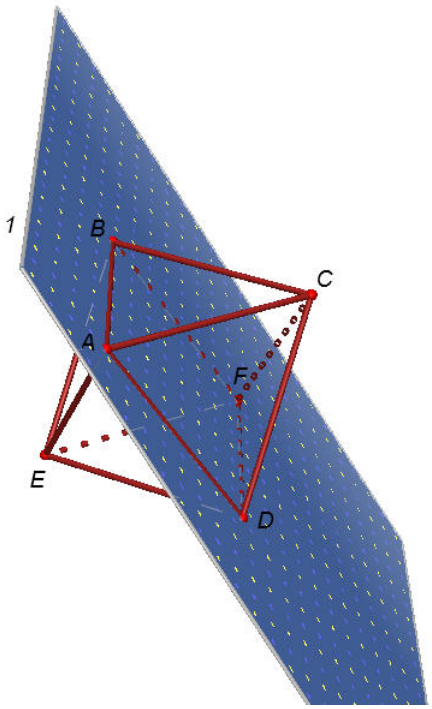
  Image des sommets de l'octaèdre régulier par la symétrie de centre O



S_o	
Origine	Image
A	F
B	D
C	E
D	B
E	C
F	A
O	O

- ***Les symétries bilatérales (Plan passant par deux arêtes opposées)***

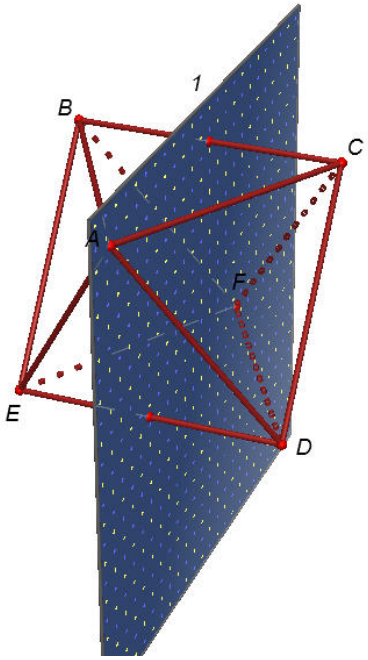
  Image des sommets de l'octaèdre régulier par la symétrie bilatérale de plan "1"



S_1	
Origine	Image
A	A
B	B
C	E
D	D
E	C
F	F

- ***Les symétries bilatérales (Plan passant par deux sommets opposés et le milieu de deux arêtes opposées)***

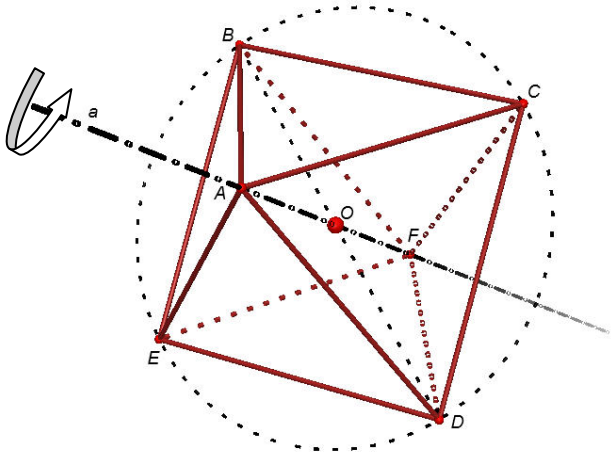
  Image des sommets de l'octaèdre régulier par la symétrie bilatérale de plan "1"



S_1	
Origine	Image
A	A
B	C
C	B
D	E
E	D
F	F

- ***Les antirotations liées aux axes d'ordre 4 ($\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$)***

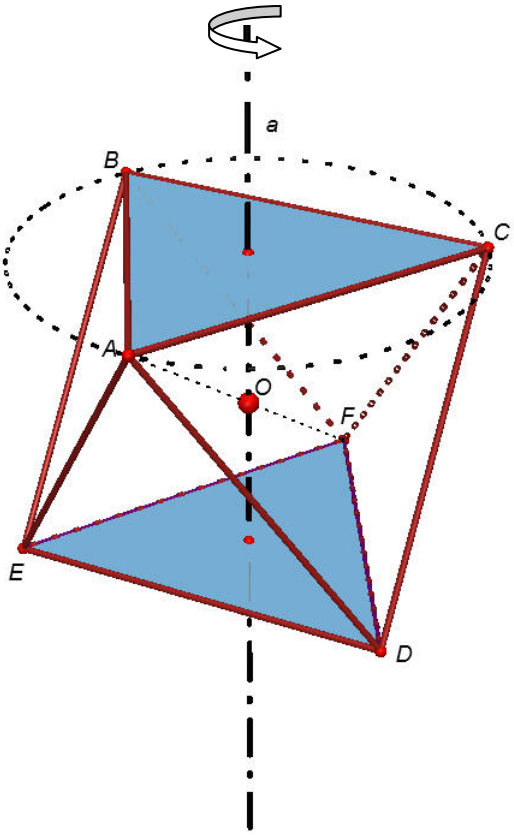
  Image des sommets de l'octaèdre régulier par l'antirotation d' $\frac{1}{4}$ de tour d'axe a (S_o o $a\frac{1}{4}$)



S_O o $a\frac{1}{4}$		
Origine	Image par $a\frac{1}{4}$	Image par S_O o $a\frac{1}{4}$
A	A	F
B	E	C
C	B	D
D	C	E
E	D	B
F	F	A

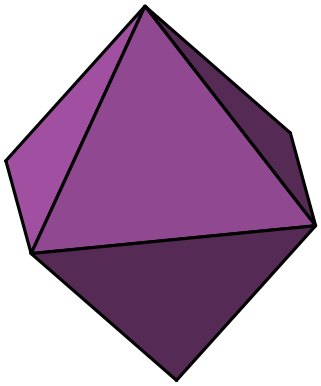
- ***Les antirotations liées aux axes d'ordre 3 ($\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$)***

  Image des sommets de l'octaèdre régulier par l'antirotation d' $\frac{1}{3}$ de tour d'axe a (S_o o $a\frac{1}{3}$)



S_O o $a\frac{1}{3}$		
Origine	Image par $a\frac{1}{3}$	Image par S_O o $a\frac{1}{3}$
A	C	E
B	A	F
C	B	D
D	F	A
E	D	B
F	E	C

3.4. Synthèse



Auto (Oc) = 48

Auto$^+$ = 24

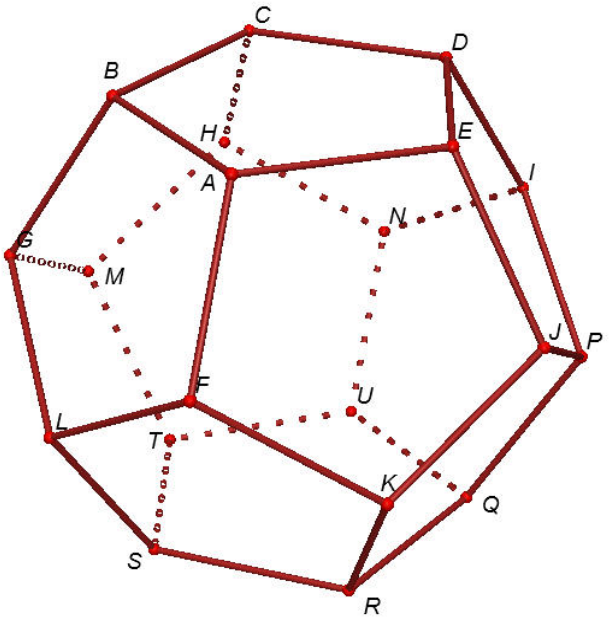
Auto$^-$ = 24

		3 axes d'ordre 4			4 axes d'ordre 3		6 axes d'ordre 2	Total
Auto$^+$	**1_E**	**$r_{1/4}$**	**$r_{2/4}$**	**$r_{3/4}$**	**$r_{1/3}$**	**$r_{2/3}$**	**$r_{1/2}$**	
	1	3	3	3	4	4	6	24
Auto$^-$	**S_c**	**$ar_{1/4}$**	**S_α**	**$ar_{3/4}$**	**$ar_{1/3}$**	**$ar_{2/3}$**	**S_β**	
	1	3	3	3	4	4	6	24
Auto (Oc)								**48**

α = plans perpendiculaires aux axes d'ordre 4 et passant par le centre de l'octaèdre (c)

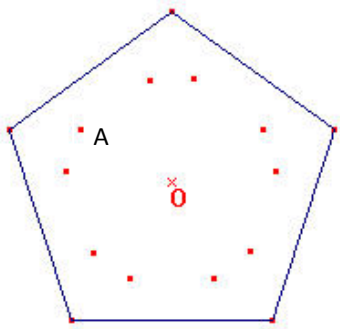
β = plans perpendiculaires aux axes d'ordre 2 et passant par le centre de l'octaèdre (c)

4. Le dodécaèdre régulier



4.1. Orbite d'un point du dodécaèdre régulier et nombre d'automorphismes du dodécaèdre régulier

Soit A un "point non particulier" d'une face pentagonale (régulier) du dodécaèdre régulier. Il y a exactement dix points de cette face pentagonale qui possèdent les mêmes caractéristiques que le point « a » (ce sont les 10 points obtenus à partir des 10 automorphismes de ce pentagone régulier).



Comme un dodécaèdre régulier est formé de douze pentagones réguliers, il y a donc 120 (12 x 10) points du dodécaèdre régulier qui possèdent les mêmes caractéristiques que le point A.

Puisque tout automorphisme superpose le dodécaèdre régulier à lui-même tout en appliquant un point sur un point de même caractéristique, on en conclut que le nombre d'automorphismes du dodécaèdre régulier est de 120. Du théorème de Lagrange il y a 60 automorphismes de type déplacement et 60 automorphismes de type retournement.

4.2. Automorphismes du dodécaèdre régulier

Voici les différents types de déplacements et de retournements; ils sont développés et illustrés à partir du point 4.3.

- **Les déplacements**

TYPES	CENTRE/AXE/PLAN	NOMBRE ASSOCIÉ AUX TYPES
- L'identité		1
- Les rotations liées aux axes d'ordre 5 ($\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ et $\frac{4}{5}$)	Droite joignant le centre de deux faces opposées	6 x 4 rotations

- Les rotations liées aux axes d'ordre 3 ($\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$)	Droite joignant deux sommets opposés	10 x 2 rotations
- Les rotations liées aux axes d'ordre 2 ($\frac{1}{2}$)	Droite joignant le milieu de deux arêtes opposées	15 x 1 rotation $\Rightarrow$ 60 déplacements

- **Les retournements**

TYPES	CENTRE/AXE/PLAN	NOMBRE ASSOCIÉ AUX TYPES
- Les symétries centrales	Centre du dodécaèdre.	1
- Les symétries bilatérales	Plan passant par deux arêtes opposées.	15
- Les antirotations liées aux axes d'ordre 5 ($\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ et $\frac{4}{5}$)	Droite joignant le centre de deux faces opposées.	6 ar $_{1/5}$, 6 ar $_{2/5,}$ 6 ar $_{3/5}$ et 6 ar $_{4/5}$
- Les antirotations liées aux axes d'ordre 3 ($\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$)	Droite joignant deux sommets opposés	10 ar $_{1/3}$ et 10 ar $_{2/3}$ $\Rightarrow$ 60 retournements

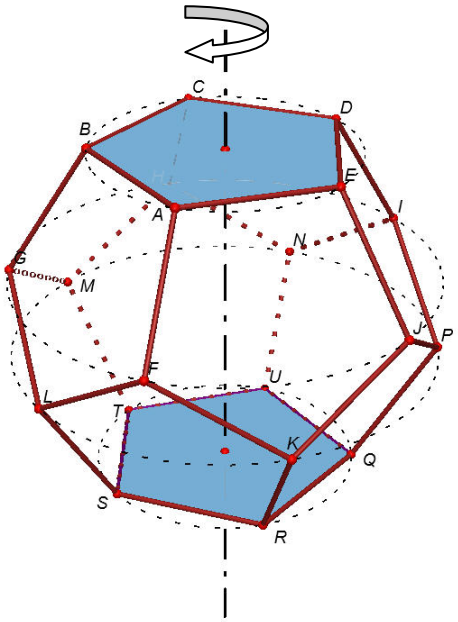
		6 axes d'ordre 5				10 axes d'ordre 3		15 axes d'ordre 2	Total
Auto$^+$	**1_E**	**$r_{1/5}$**	**$r_{2/5}$**	**$r_{3/5}$**	**$r_{4/5}$**	**$r_{1/3}$**	**$r_{2/3}$**	**$r_{1/2}$**	
	1	6	6	6	6	10	10	15	60
Auto$^-$	**S_c**	**$ar_{1/5}$**	**$ar_{2/5}$**	**$ar_{3/5}$**	**$ar_{4/5}$**	**$ar_{1/3}$**	**$ar_{2/3}$**	**S_α**	
	1	6	6	6	6	10	10	15	60
Auto (Do)									**120**

α = plans bissecteurs ou plans passant par deux arêtes opposées

4.3. Illustrations

- ***Les rotations liées aux axes d'ordre 5 ($\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ et $\frac{4}{5}$)***

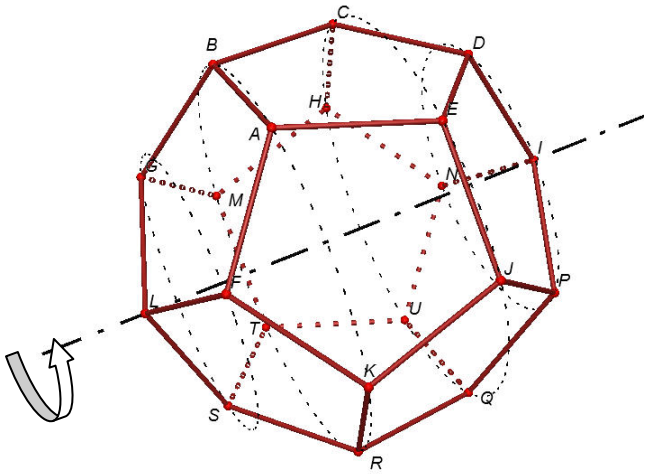
Image des sommets du dodécaèdre régulier par la rotation d'$\frac{1}{5}$ de tour d'axe a ($a\frac{1}{5}$)



$a\frac{1}{5}$	
Origine	Image
A	B
B	C
C	D
D	E
E	A
F	G
G	H
H	I
I	J
J	F
K	L
L	M
M	N
N	P
P	K
Q	R
R	S
S	T
T	U
U	Q

- ***Les rotations liées aux axes d'ordre 3 ($\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$)***

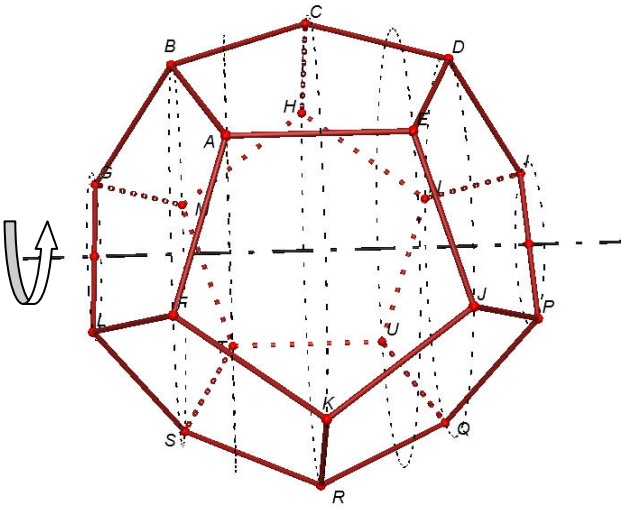
Image des sommets du dodécaèdre régulier par la rotation d'$\frac{1}{3}$ de tour d'axe a ($a\frac{1}{3}$)



$a\frac{1}{3}$	
Origine	Image
A	M
B	T
C	U
D	N
E	H
F	G
G	S
H	Q
I	I
J	C
K	B
L	L
M	R
N	P
P	D
Q	E
R	A
S	F
T	K
U	J

- ***Les rotations liées aux axes d'ordre 2 ($\frac{1}{2}$)***

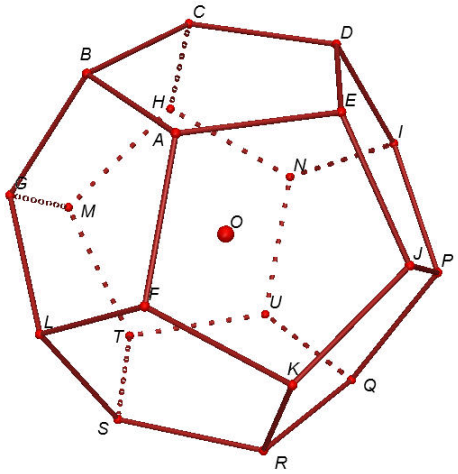
Image des sommets du dodécaèdre régulier par la rotation d'$\frac{1}{2}$ tour d'axe a ($a\frac{1}{2}$)



$a\frac{1}{2}$	
Origine	Image
A	T
B	S
C	R
D	Q
E	U
F	M
G	L
H	K
I	P
J	N
K	H
L	G
M	F
N	J
P	I
Q	D
R	C
S	B
T	A
U	E

- ***La symétrie centrale***

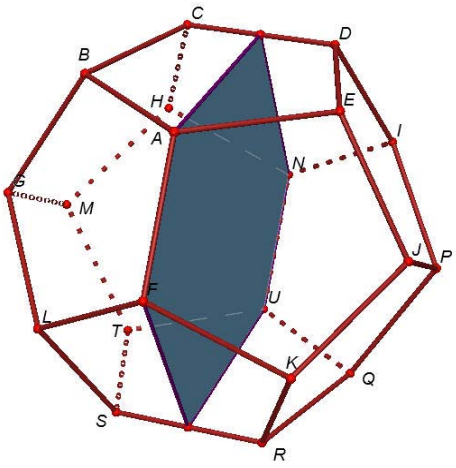
Image des sommets du dodécaèdre régulier par la symétrie de centre O



S_o	
Origine	Image
A	U
B	Q
C	R
D	S
E	T
F	N
G	P
H	K
I	L
J	M
K	H
L	I
M	J
N	F
P	G
Q	B
R	C
S	D
T	E
U	A

- ***Les symétries bilatérales (Plan passant par deux arêtes opposées)***

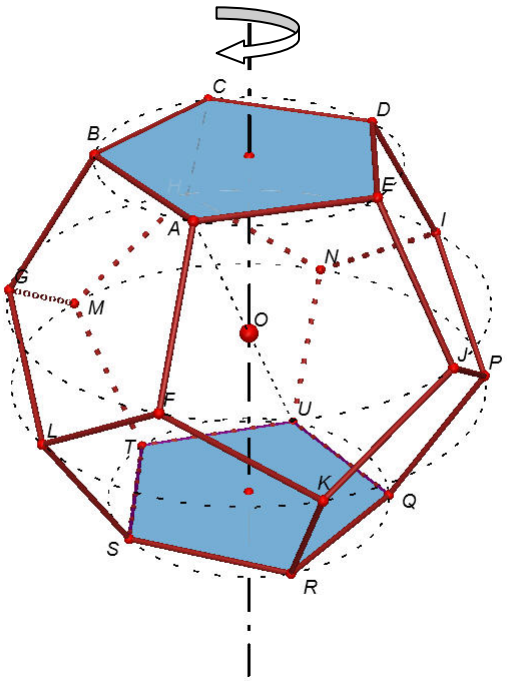
Image des sommets du dodécaèdre régulier par la symétrie bilatérale de plan "1"



S_1	
Origine	Image
A	A
B	E
C	D
D	C
E	B
F	F
G	J
H	I
I	H
J	G
K	L
L	K
M	P
N	N
P	M
Q	T
R	S
S	R
T	Q
U	U

- ***Les antirotations liées aux axes d'ordre 5 ($\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ et $\frac{4}{5}$)***

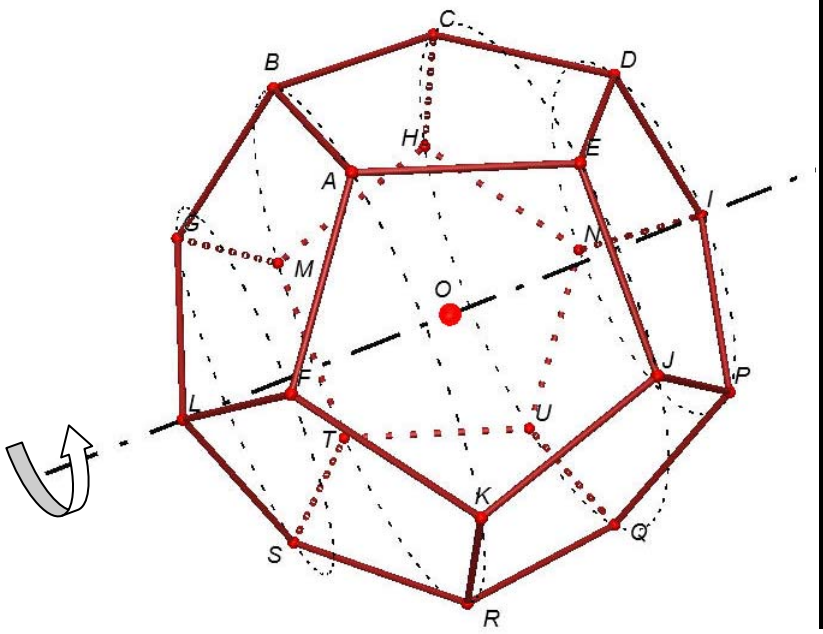
Image des sommets du dodécaèdre régulier par l'antirotation d'$\frac{1}{5}$ tour d'axe a (S_o o $a_{\frac{1}{5}}$)



S_o o $a_{\frac{1}{5}}$		
Origine	Image par $a_{\frac{1}{5}}$	Image par S_o o $a_{\frac{1}{5}}$
A	B	Q
B	C	R
C	D	S
D	E	T
E	A	U
F	G	P
G	H	K
H	I	L
I	J	M
J	F	N
K	L	I
L	M	J
M	N	F
N	P	G
P	K	H
Q	R	C
R	S	D
S	T	E
T	U	A
U	Q	B

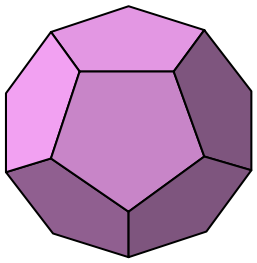
- ***Les antirotations liées aux axes d'ordre 3 ($\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$)***

Image des sommets du dodécaèdre régulier par l'antirotation d' $\frac{1}{3}$ tour d'axe a (S_o o $a\frac{1}{3}$)



S_o o $a\frac{1}{3}$		
Origine	Image par $a\frac{1}{3}$	Image par S_o o $a\frac{1}{3}$
A	M	J
B	T	E
C	U	A
D	N	F
E	H	K
F	G	P
G	S	D
H	Q	B
I	I	L
J	C	R
K	B	Q
L	L	I
M	R	C
N	P	G
P	D	S
Q	E	T
R	A	U
S	F	N
T	K	H
U	J	M

4.4. Synthèse



Auto (Do) = 120

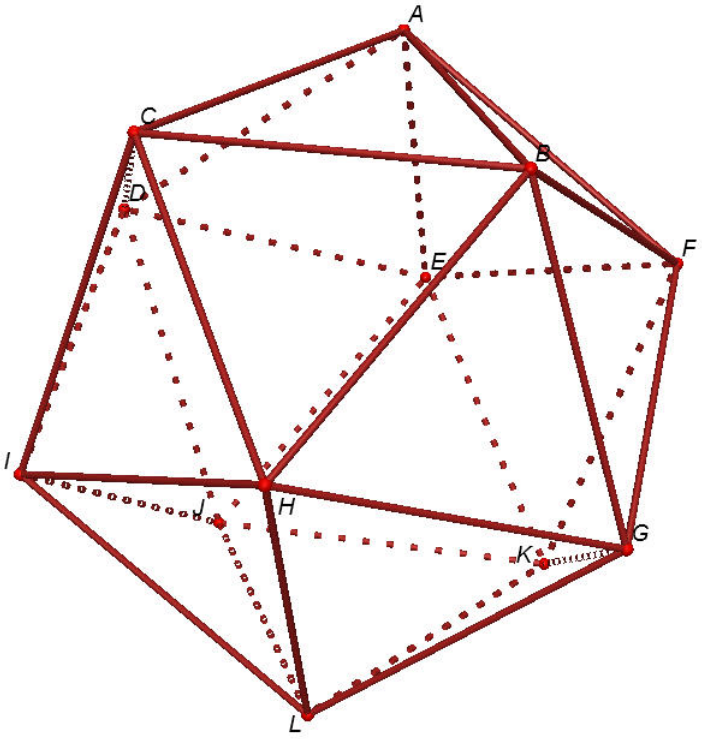
Auto$^+$ = 60

Auto$^-$ = 60

		6 axes d'ordre 5				10 axes d'ordre 3		15 axes d'ordre 2	Total
Auto$^+$	**1_E**	**$r_{1/5}$**	**$r_{2/5}$**	**$r_{3/5}$**	**$r_{4/5}$**	**$r_{1/3}$**	**$r_{2/3}$**	**$r_{1/2}$**	
	1	6	6	6	6	10	10	15	60
Auto$^-$	**S_c**	**$ar_{1/5}$**	**$ar_{2/5}$**	**$ar_{3/5}$**	**$ar_{4/5}$**	**$ar_{1/3}$**	**$ar_{2/3}$**	**S_α**	
	1	6	6	6	6	10	10	15	60
Auto (Do)									**120**

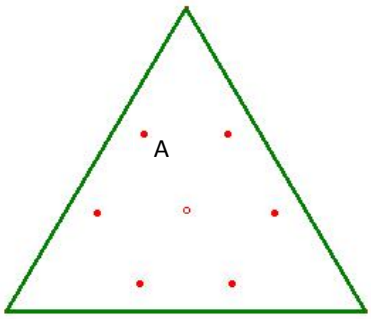
α = plans bissecteurs ou plans passant par deux arêtes opposées

5. L'icosaèdre régulier



5.1. Orbite d'un point de l'icosaèdre régulier et nombre d'automorphismes de l'icosaèdre régulier

Soit A un "point non particulier" d'une face triangulaire (équilatéral) de l'icosaèdre régulier. Il y a exactement six points de cette face triangulaire qui possèdent les mêmes caractéristiques que le point » a » (ce sont les 6 points obtenus à partir des 6 automorphismes de ce triangle équilatéral).



Comme un icosaèdre régulier est formé de vingt triangles équilatéraux, il y a donc 120 (6 x 20) points de l'icosaèdre régulier qui possèdent les mêmes caractéristiques que le point A.

Puisque tout automorphisme superpose l'icosaèdre régulier à lui-même tout en appliquant un point sur un point de même caractéristique, on en conclut que le nombre d'automorphismes de l'icosaèdre régulier est de 120. Du théorème de Lagrange il y a 60 d'automorphismes de type déplacement et 60 automorphismes de type retournement.

5.2. Automorphismes de l'icosaèdre régulier

Voici les différents types de déplacements et de retournements; ils sont développés et illustrés à partir du point 5.3.

- **Les déplacements**

TYPES	CENTRE/AXE/PLAN	NOMBRE ASSOCIÉ AUX TYPES
- L'identité		1
- Les rotations liées aux axes d'ordre 5 ($\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ et $\frac{4}{5}$)	Droite joignant deux sommets opposés	6 x 4 rotations
- Les rotations liées aux axes d'ordre 3 ($\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$)	Droite joignant le centre de deux faces opposées	10 x 2 rotations
- Les rotations liées aux axes d'ordre 2 ($\frac{1}{2}$)	Droite joignant le milieu de deux arêtes opposées	15 x 1 rotation $\Rightarrow$ 60 déplacements

- **Les retournements**

TYPES	CENTRE/AXE/PLAN	NOMBRE ASSOCIÉ AUX TYPES
- Les symétries centrales	Centre de l'icosaèdre.	1
- Les symétries bilatérales	Plan passant par deux arêtes opposées.	15
- Les antirotations liées aux axes d'ordre 5 ($\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ et $\frac{4}{5}$)	Droite joignant deux sommets opposés	6 $ar_{1/5}$, 6 $ar_{2/5}$, 6 $ar_{3/5}$ et 6 $ar_{4/5}$
- Les antirotations liées aux axes d'ordre 3 ($\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$)	Droite joignant le centre de deux faces opposées.	10 $ar_{1/3}$ et 10 $ar_{2/3}$ $\Rightarrow$ 60 retournements

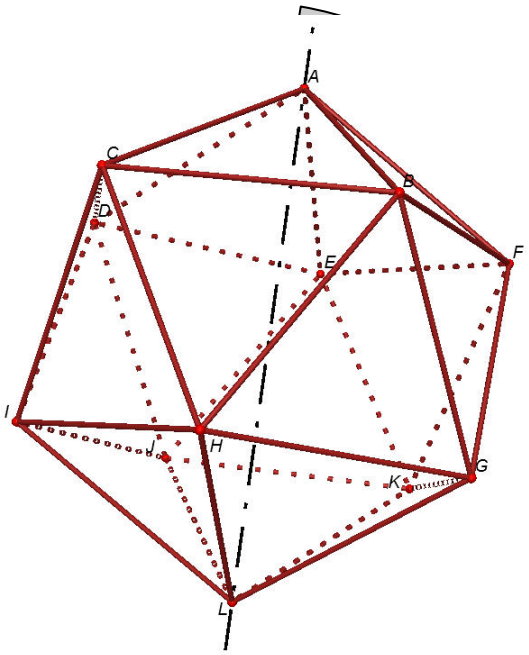
		6 axes d'ordre 5				10 axes d'ordre 3		15 axes d'ordre 2	Total
Auto$^+$	1_E	$r_{1/5}$	$r_{2/5}$	$r_{3/5}$	$r_{4/5}$	$r_{1/3}$	$r_{2/3}$	$r_{1/2}$	
	1	6	6	6	6	10	10	15	60
Auto$^-$	S_c	$ar_{1/5}$	$ar_{2/5}$	$ar_{3/5}$	$ar_{4/5}$	$ar_{1/3}$	$ar_{2/3}$	S_α	
	1	6	6	6	6	10	10	15	60
Auto (Ico)									**120**

α = plans passant par deux arêtes opposées

5.3. Illustrations

- ***Les rotations liées aux axes d'ordre 5 ($\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ et $\frac{4}{5}$)***

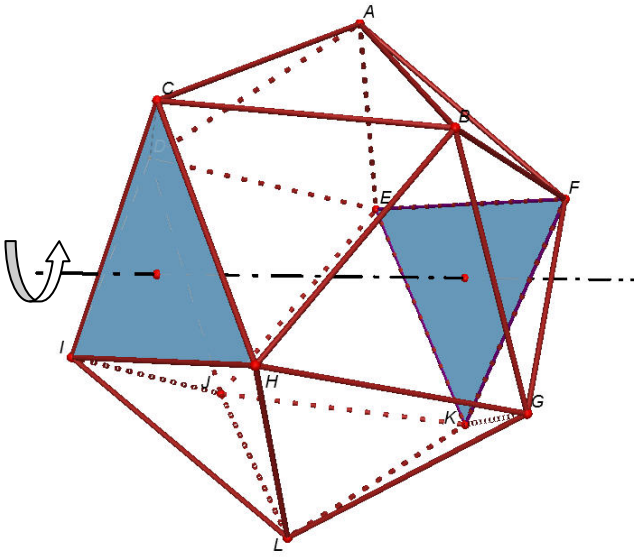
  Image des sommets de l'icosaèdre régulier par la rotation d' $\frac{1}{5}$ tour d'axe a ($a_{\frac{1}{5}}$)



$a_{\frac{1}{5}}$	
Origine	Image
A	A
B	C
C	D
D	E
E	F
F	B
G	H
H	I
I	J
J	K
K	G
L	L

- ***Les rotations liées aux axes d'ordre 3 ($\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$)***

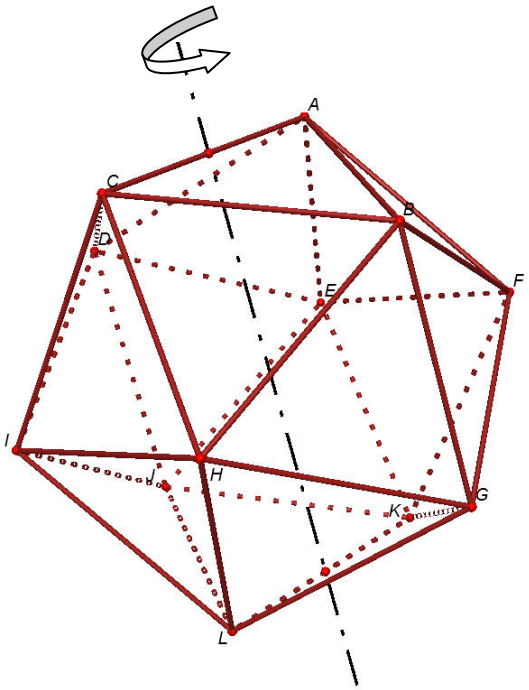
  Image des sommets de l'icosaèdre régulier par la rotation d' $\frac{1}{3}$ de tour d'axe a ($a_{\frac{1}{3}}$)



$a_{\frac{1}{3}}$	
Origine	Image
A	J
B	D
C	I
D	L
E	K
F	E
G	A
H	C
I	H
J	G
K	F
L	B

- ***Les rotations liées aux axes d'ordre 2 ($\frac{1}{2}$)***

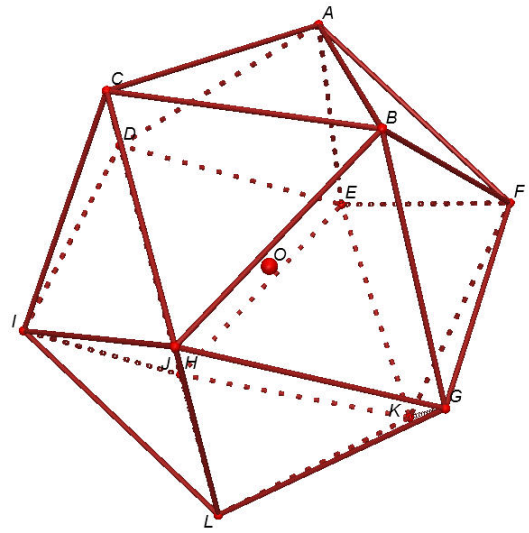
  Image des sommets de l'icosaèdre régulier par la rotation d' $\frac{1}{2}$ tour d'axe a ($a\frac{1}{2}$)



$a\frac{1}{2}$	
Origine	Image
A	C
B	D
C	A
D	B
E	H
F	I
G	J
H	E
I	F
J	G
K	L
L	K

- ***La symétrie centrale***

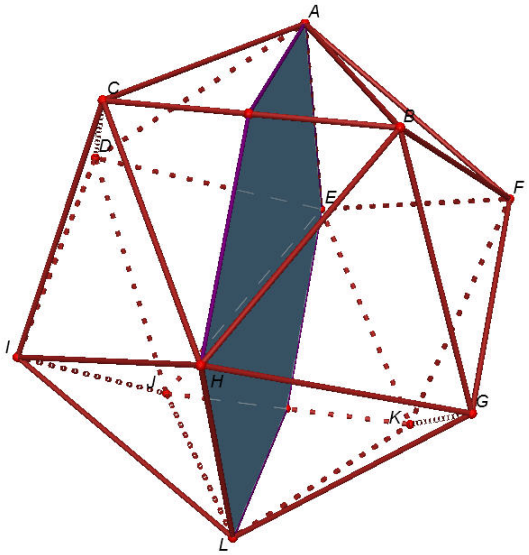
  Image des sommets de l'icosaèdre régulier par la symétrie de centre O



S_o	
Origine	Image
A	L
B	J
C	K
D	G
E	H
F	I
G	D
H	H
I	F
J	B
K	C
L	A

- ***Les symétries bilatérales (Plan passant par deux arêtes opposées)***

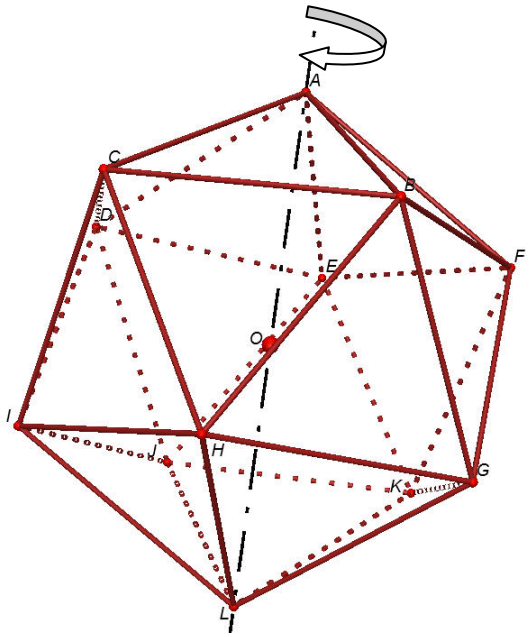
  Image des sommets de l'icosaèdre régulier par la symétrie bilatérale de plan "1"



S_1	
Origine	Image
A	A
B	C
C	B
D	F
E	E
F	D
G	I
H	H
I	G
J	K
K	J
L	L

- ***Les antirotations liées aux axes d'ordre 5 ($\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ et $\frac{4}{5}$)***

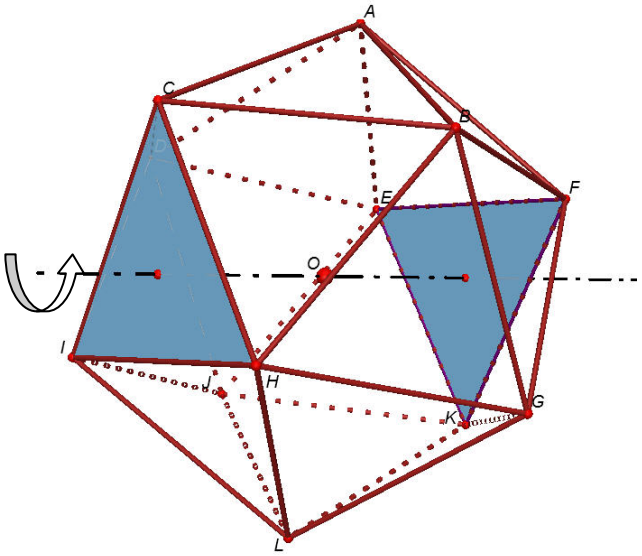
  Image des sommets de l'icosaèdre régulier par l'antirotation d' $\frac{1}{5}$ tour d'axe a (S_o o $a\frac{1}{5}$)



S_o o $a\frac{1}{5}$		
Origine	Image par $a\frac{1}{5}$	Image par S_o o $a\frac{1}{5}$
A	A	L
B	C	K
C	D	G
D	E	H
E	F	I
F	B	J
G	H	E
H	I	F
I	J	B
J	K	C
K	G	D
L	L	A

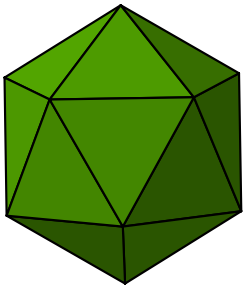
- ***Les antirotations liées aux axes d'ordre 3 ($\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$)***

  Image des sommets de l'icosaèdre régulier par l'antirotation d' $\frac{1}{3}$ tour d'axe a (S_o o $a\frac{1}{3}$)



S_o o $a\frac{1}{3}$		
Origine	Image par $a\frac{1}{3}$	Image par S_o o $a\frac{1}{3}$
A	J	B
B	D	G
C	I	F
D	L	A
E	K	C
F	E	H
G	A	L
H	C	K
I	H	E
J	G	D
K	F	I
L	B	J

5.4. Synthèse



Auto (Ico) = 120

→ **Auto$^+$ = 60**

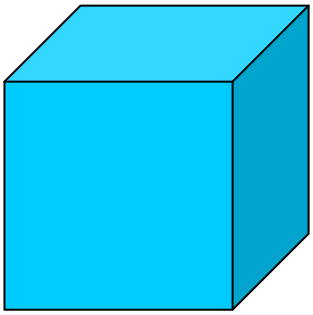
→ **Auto$^-$ = 60**

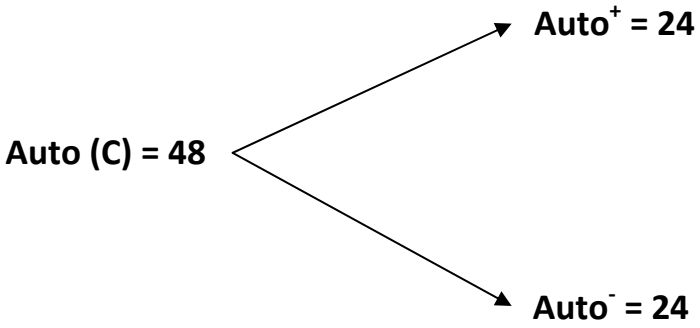
		6 axes d'ordre 5	10 axes d'ordre 3	15 axes d'ordre 2	Total
Auto$^+$	**1_E**	**$r_{1/5}$ $r_{2/5}$ $r_{3/5}$ $r_{4/5}$**	**$r_{1/3}$ $r_{2/3}$**	**$r_{1/2}$**	
	1	6 6 6 6	10 10	15	60
Auto$^-$	**S_c**	**$ar_{1/5}$ $ar_{2/5}$ $ar_{3/5}$ $ar_{4/5}$**	**$ar_{1/3}$ $ar_{2/3}$**	**S_α**	
	1	6 6 6 6	10 10	15	60
Auto (Ico)					**120**

α = plans passant par deux arêtes opposées

6. Synthèse des automorphismes des cinq polyèdres platoniciens

6.1. Le cube

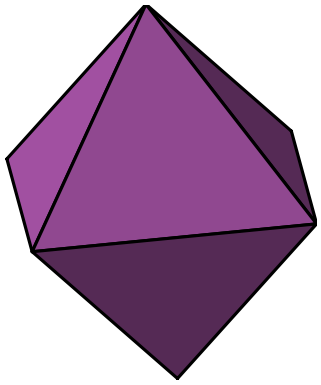


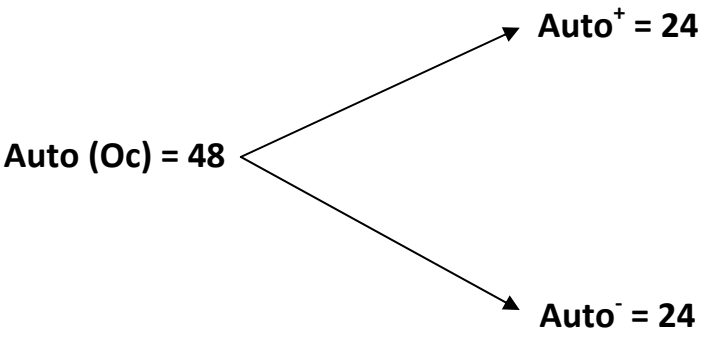


		3 axes d'ordre 4			4 axes d'ordre 3		6 axes d'ordre 2	Total
Auto+	**1_E**	**$r_{1/4}$**	**$r_{2/4}$**	**$r_{3/4}$**	**$r_{1/3}$**	**$r_{2/3}$**	**$r_{1/2}$**	
	1	3	3	3	4	4	6	24
Auto-	**Sc**	**$ar_{1/4}$**	**S_α**	**$ar_{3/4}$**	**$ar_{1/3}$**	**$ar_{2/3}$**	**S_β**	
	1	3	3	3	4	4	6	24
Auto (C)								**48**

α = plans médiaux β = plans diagonaux

6.2. L'octaèdre régulier



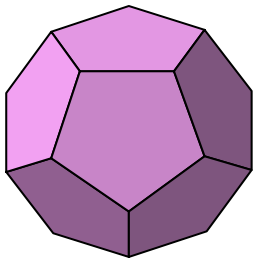


		3 axes d'ordre 4			4 axes d'ordre 3		6 axes d'ordre 2	Total
Auto$^+$	**1_E**	**$r_{1/4}$**	**$r_{2/4}$**	**$r_{3/4}$**	**$r_{1/3}$**	**$r_{2/3}$**	**$r_{1/2}$**	
	1	3	3	3	4	4	6	24
Auto$^-$	**Sc**	**$ar_{1/4}$**	**S_α**	**$ar_{3/4}$**	**$ar_{1/3}$**	**$ar_{2/3}$**	**S_β**	
	1	3	3	3	4	4	6	24
Auto (Oc)								**48**

α = plans perpendiculaires aux axes d'ordre 4 et passant par le centre de l'octaèdre

β = plans perpendiculaires aux axes d'ordre 2 et passant par le centre de l'octaèdre

6.3. Le dodécaèdre régulier



Auto (Do) = 120

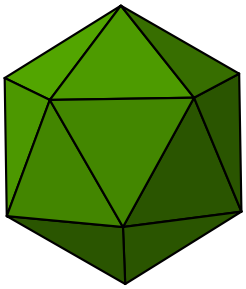
Auto$^+$ = 60

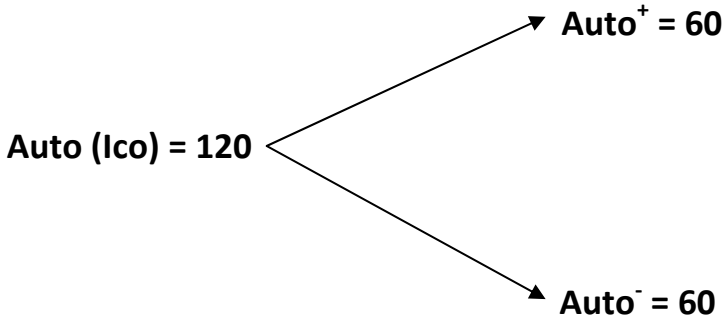
Auto$^-$ = 60

		6 axes d'ordre 5				10 axes d'ordre 3		15 axes d'ordre 2	Total
Auto$^+$	**1_E**	**$r_{1/5}$**	**$r_{2/5}$**	**$r_{3/5}$**	**$r_{4/5}$**	**$r_{1/3}$**	**$r_{2/3}$**	**$r_{1/2}$**	
	1	6	6	6	6	10	10	15	60
Auto$^-$	**Sc**	**$ar_{1/5}$**	**$ar_{2/5}$**	**$ar_{3/5}$**	**$ar_{4/5}$**	**$ar_{1/3}$**	**$ar_{2/3}$**	**S_α**	
	1	6	6	6	6	10	10	15	60
Auto (Do)									**120**

α = plans bissecteurs ou plans passant par deux arêtes opposées

6.4. L'icosaèdre régulier

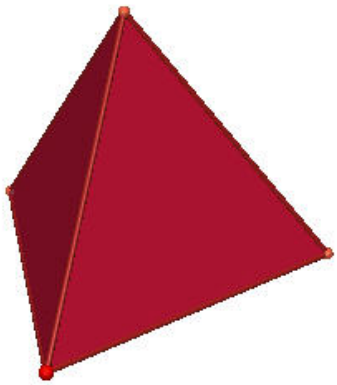


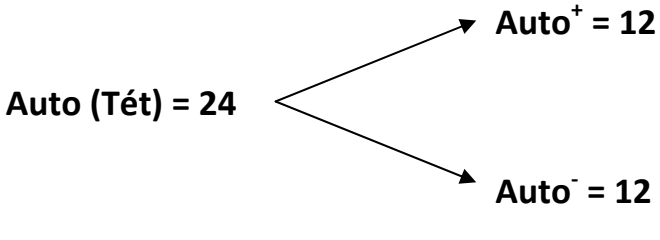


		6 axes d'ordre 5				10 axes d'ordre 3		15 axes d'ordre 2	Total
Auto+	1_E	$r_{1/5}$	$r_{2/5}$	$r_{3/5}$	$r_{4/5}$	$r_{1/3}$	$r_{2/3}$	$r_{1/2}$	
	1	6	6	6	6	10	10	15	60
Auto-	Sc	$ar_{1/5}$	$ar_{2/5}$	$ar_{3/5}$	$ar_{4/5}$	$ar_{1/3}$	$ar_{2/3}$	Sα	
	1	6	6	6	6	10	10	15	60
Auto (Ico)									**120**

α = plans passant par deux arêtes opposées

6.5. Le tétraèdre régulier





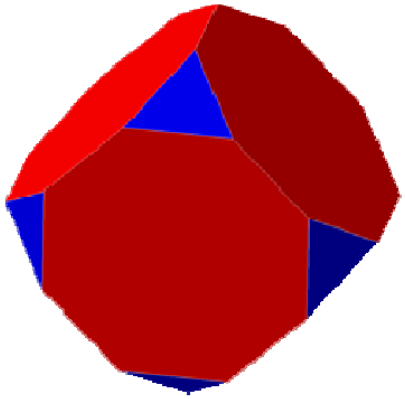
		4 axes d'ordre 3		3 axes d'ordre 2		Total
Auto+	1_E	$r_{1/3}$	$r_{2/3}$	$r_{1/2}$		
	1	4	4	3		12
Auto-		S_α		$ar_{1/4}$	$ar_{3/4}$	
		6		3	3	12
Auto (Tét)						**24**

α = plan passant par une arête et le milieu de l'arête opposée

III. Automorphismes de solides particuliers

Dans le cas des polyèdres (solides) constitués de plusieurs types de faces, la détermination du nombre d'automorphismes se fait encore à partir d'un point non particulier, tout en tenant compte de la position relative de ce point par rapport à la configuration des faces environnantes.

1. Le cube tronqué



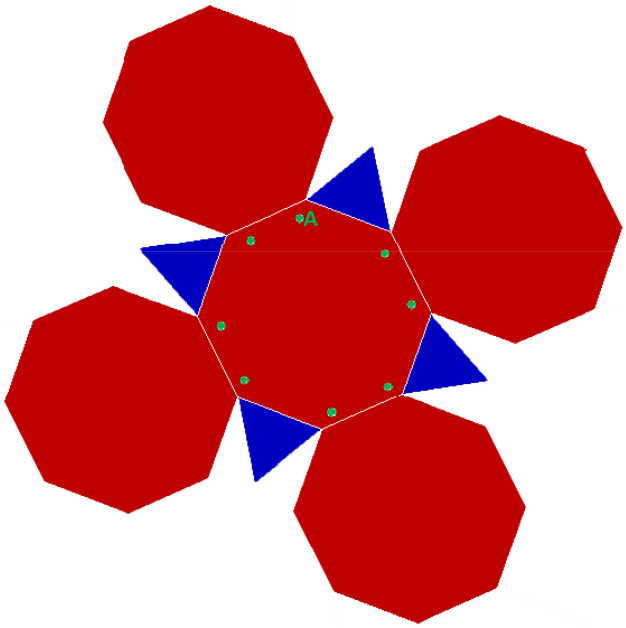
6 octogones réguliers; **8** triangles équilatéraux;

36 arêtes $\left(\frac{6 \cdot 8 + 8 \cdot 3}{2}\right)$ dont **24** arêtes adjacentes à un octogone et un triangle et **12** arêtes adjacentes à deux octogones; **24** sommets $\left(\frac{6 \cdot 8 + 8 \cdot 3}{3}\right)$.

Le nombre d'automorphismes peut, dans le cas du cube tronqué, être déterminé soit via les octogones, soit via les triangles.

1.1. Orbite d'un point d'un octogone du cube tronqué et nombre d'automorphismes du cube tronqué

À partir d'un "point non particulier A" d'un des octogones du cube tronqué, on constate qu'il y a, sur ce même octogone, 8 points (et non 16) qui possèdent les mêmes caractéristiques que le point A si on tient compte de sa position relative par rapport aux autres faces environnantes. En effet, le point A est adjacent à deux octogones et non pas adjacent à un triangle et un octogone, d'où les 8 points de mêmes caractéristiques sur la face octogonale (et non 16).

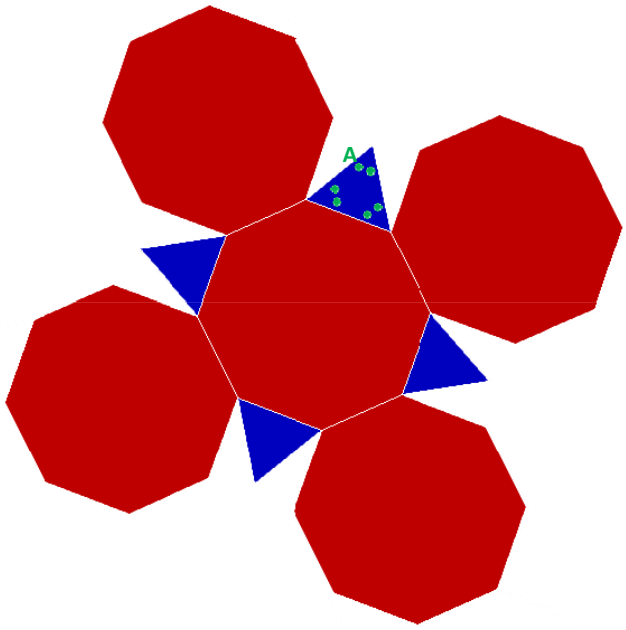


(vue partielle du développement du cube tronqué)

Etant donné qu'il y a 6 octogones dans un cube tronqué, nous pouvons déduire que celui-ci possède 6 . 8 = **48 automorphismes**.

1.2. Orbite d'un point d'un triangle du cube tronqué et nombre d'automorphismes du cube tronqué

À partir d'un "point non particulier A" d'un des triangles du cube tronqué, on constate qu'il y a, sur ce même triangle, 6 points qui possèdent les mêmes caractéristiques que le point A si on tient compte de sa position relative par rapport aux autres faces environnantes. Dans ce cas ci, l'environnement du triangle est le même; chaque côté du triangle est adjacent à un octogone.



(vue partielle du développement du cube tronqué)

Etant donné qu'il y a 8 triangles dans un cube tronqué, nous pouvons déduire que celui-ci possède 8 . 6 = **48 automorphismes**.

On pourrait penser qu'il faut additionner les automorphismes découverts "par les triangles" et ceux découverts "par les octogones". Cependant, on peut montrer que ces automorphismes sont les mêmes et que, dès lors, le cube tronqué en compte bien 48 (et non pas 96).

- **Les déplacements**

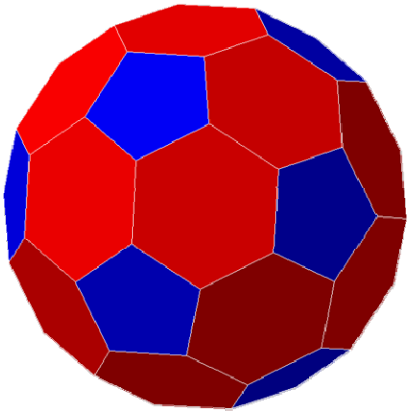
TYPES	CENTRE/AXE/PLAN	NOMBRE ASSOCIÉ AUX TYPES
- L'identité		1
- Les rotations liées aux axes d'ordre 4 ($\frac{1}{4}, \frac{2}{4}$ et $\frac{3}{4}$)	Droite joignant le centre de deux octogones opposés	3 x 3 rotations
- Les rotations liées aux axes d'ordre 3 ($\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$)	Droite joignant le centre de deux triangles opposés	4 x 2 rotations
- Les rotations liées aux axes d'ordre 2 ($\frac{1}{2}$)	Droite joignant le milieu de deux arêtes "adjacentes à deux octogones" et opposées	6 x 1 rotation $\Rightarrow$ 24 déplacements

- **Les retournements**

TYPES	CENTRE/AXE/PLAN	NOMBRE ASSOCIÉ AUX TYPES
- Les symétries centrales	Centre du cube tronqué.	1
- Les symétries bilatérales	Plan passant par deux arêtes "adjacentes à deux octogones" et opposées.	6 S_β
- Les symétries bilatérales	Plan parallèle à deux octogones opposés.	3 S_α
- Les antirotations liées aux axes d'ordre 4 ($\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$)	Droite joignant le centre de deux octogones opposés.	3 $ar_{1/4}$ et 3 $ar_{3/4}$
- Les antirotations liées aux axes d'ordre 3 ($\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$)	Droite joignant le centre de deux triangles opposés	4 $ar_{1/3}$ et 4 $ar_{2/3}$ $\Rightarrow$ 24 retournements

		3 axes d'ordre 4			4 axes d'ordre 3		6 axes d'ordre 2	Total
Auto$^+$	1_E	$r_{1/4}$	$r_{2/4}$	$r_{3/4}$	$r_{1/3}$	$r_{2/3}$	$r_{1/2}$	
	1	3	3	3	4	4	6	24
Auto$^-$	S_c	$ar_{1/4}$	S_α	$ar_{3/4}$	$ar_{1/3}$	$ar_{2/3}$	S_β	
	1	3	3	3	4	4	6	24
Auto (C)								**48**

2. L'icosaèdre tronqué (ballon de football)



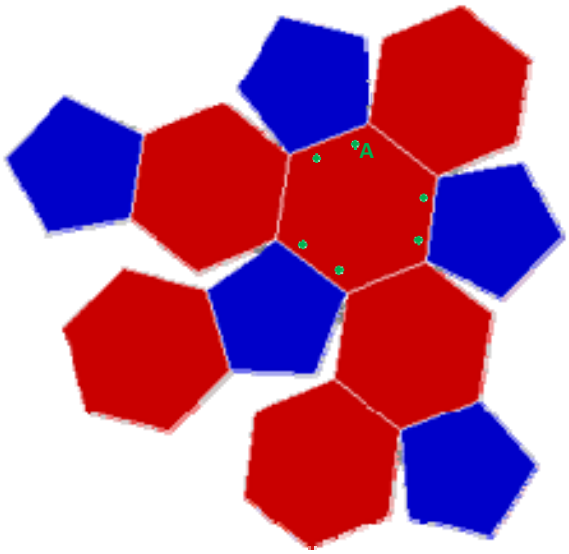
12 pentagones réguliers; **20** hexagones réguliers;

90 arêtes $\left(\frac{12 \cdot 5 + 20 \cdot 6}{2}\right)$ dont **60** arêtes adjacentes à un hexagone et un pentagone et **30** arêtes adjacentes à deux hexagones; **60** sommets $\left(\frac{12 \cdot 5 + 20 \cdot 6}{3}\right)$.

Le nombre d'automorphismes peut, dans le cas de l'icosaèdre tronqué, être déterminé soit via les hexagones, soit via les pentagones.

2.1. Orbite d'un point d'un hexagone de l'icosaèdre tronqué et nombre d'automorphismes de l'icosaèdre tronqué

À partir d'un "point non particulier A" d'un des hexagones de l'icosaèdre tronqué, on constate qu'il y a, sur ce même hexagone, 6 points (et non 12) qui possèdent les mêmes caractéristiques que le point A si on tient compte de sa position relative par rapport aux autres faces environnantes. En effet, le point A est adjacent à un hexagone et à un pentagone et non pas adjacent à deux hexagones, d'où les 6 points de mêmes caractéristiques sur la face octogonale (et non 12).

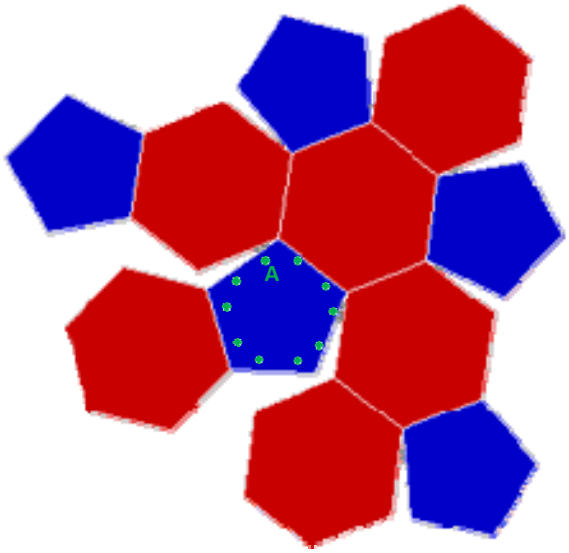


(vue partielle du développement de l'icosaèdre tronqué)

Etant donné qu'il y a 20 hexagones dans un icosaèdre tronqué, nous pouvons déduire que celui-ci possède 20 . 6 = **120 automorphismes**.

2.2. Orbite d'un point d'un pentagone de l'icosaèdre tronqué et nombre d'automorphismes de l'icosaèdre tronqué

À partir d'un "point non particulier A" d'un des pentagones de l'icosaèdre tronqué, on constate qu'il y a, sur ce même pentagone, 10 points qui possèdent les mêmes caractéristiques que le point A si on tient compte de sa position relative par rapport aux autres faces environnantes. Dans ce cas ci, l'environnement du pentagone est le même; chaque côté du pentagone est adjacent à un hexagone.



(vue partielle du développement de l'icosaèdre tronqué)

Etant donné qu'il y a 12 pentagones dans un icosaèdre tronqué, nous pouvons déduire que celui-ci possède 12 . 10 = **120 automorphismes**.

On pourrait penser qu'il faut additionner les automorphismes découverts "par les pentagones" et ceux découverts "par les hexagones". Cependant, on peut montrer que ces automorphismes sont les mêmes et que, dès lors, l'icosaèdre tronqué en compte bien 120 (et non pas 240).

- **<u>Les déplacements</u>**

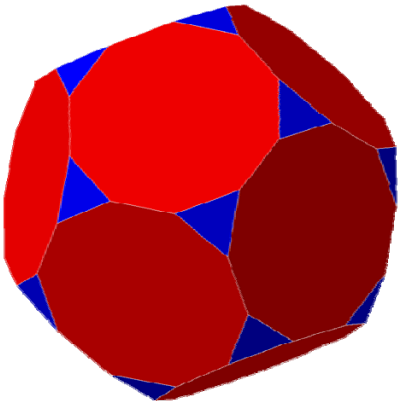
TYPES	CENTRE/AXE/PLAN	NOMBRE ASSOCIÉ AUX TYPES
- L'identité		1
- Les rotations liées aux axes d'ordre 5 ($\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ et $\frac{4}{5}$)	Droite joignant le centre de deux pentagones opposés	6 x 4 rotations
- Les rotations liées aux axes d'ordre 3 ($\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$)	Droite joignant le centre de deux hexagones opposés	10 x 2 rotations
- Les rotations liées aux axes d'ordre 2 ($\frac{1}{2}$)	Droite joignant le milieu de deux arêtes "adjacentes à deux hexagones" et opposées	15 x 1 rotation $\Rightarrow$ 60 déplacements

- **Les retournements**

TYPES	CENTRE/AXE/PLAN	NOMBRE ASSOCIÉ AUX TYPES
- Les symétries centrales	Centre de l'icosaèdre tronqué.	1
- Les symétries bilatérales	Plan passant par deux arêtes "adjacentes à deux hexagones" et opposées.	15 S_α
- Les antirotations liées aux axes d'ordre 5 ($\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ et $\frac{4}{5}$)	Droite joignant le centre de deux pentagones opposés	6 ar $_{1/5}$, 6 ar $_{2/5}$, 6 ar $_{3/5}$ et 6 ar $_{4/5}$
- Les antirotations liées aux axes d'ordre 3 ($\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$)	Droite joignant le centre de deux hexagones opposés.	10 ar $_{1/3}$ et 10 ar $_{2/3}$ $\Rightarrow$ 60 retournements

		6 axes d'ordre 5				10 axes d'ordre 3		15 axes d'ordre 2	Total
Auto$^+$	**1_E**	**$r_{1/5}$**	**$r_{2/5}$**	**$r_{3/5}$**	**$r_{4/5}$**	**$r_{1/3}$**	**$r_{2/3}$**	**$r_{1/2}$**	
	1	6	6	6	6	10	10	15	60
Auto$^-$	**S_c**	**$ar_{1/5}$**	**$ar_{2/5}$**	**$ar_{3/5}$**	**$ar_{4/5}$**	**$ar_{1/3}$**	**$ar_{2/3}$**	**S_α**	
	1	6	6	6	6	10	10	15	60
Auto (Ico)									**120**

3. Le dodécaèdre tronqué



12 décagones réguliers; **20** triangles équilatéraux;

90 arêtes $\left(\frac{12 \cdot 10 + 20 \cdot 3}{2}\right)$ dont **60** arêtes adjacentes

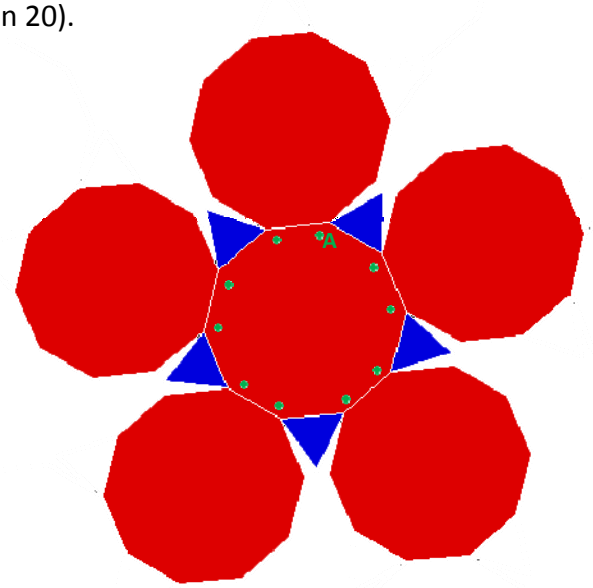
à un décagone et un triangle et **30** arêtes adjacentes à

deux décagones; **60** sommets $\left(\frac{12 \cdot 10 + 20 \cdot 3}{3}\right)$.

Le nombre d'automorphismes peut, dans le cas du dodécaèdre tronqué, être déterminé soit via les décagones, soit via les triangles équilatéraux.

3.1. Orbite d'un point d'un décagone du dodécaèdre tronqué et nombre d'automorphismes du dodécaèdre tronqué

À partir d'un "point non particulier A" d'un des décagones du dodécaèdre tronqué, on constate qu'il y a, sur ce même décagone, 10 points (et non 20) qui possèdent les mêmes caractéristiques que le point A si on tient compte de sa position relative par rapport aux autres faces environnantes. En effet, le point A est adjacent à deux décagones et non pas adjacent à un décagone et à un triangle, d'où les 10 points de mêmes caractéristiques sur la face octogonale (et non 20).

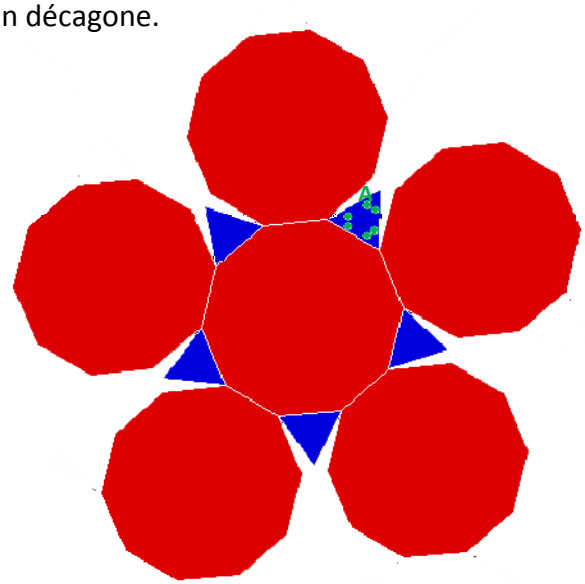


(vue partielle du développement du dodécaèdre tronqué)

Etant donné qu'il y a 12 décagones dans un dodécaèdre tronqué, nous pouvons déduire que celui-ci possède 12 . 10 = **120 automorphismes**.

3.2. Orbite d'un point d'un triangle du dodécaèdre tronqué et nombre d'automorphismes du dodécaèdre tronqué

À partir d'un "point non particulier A" d'un des triangles du dodécaèdre tronqué, on constate qu'il y a, sur ce même triangle, 6 points qui possèdent les mêmes caractéristiques que le point A si on tient compte de sa position relative par rapport aux autres faces environnantes. Dans ce cas ci, l'environnement du triangle est le même; chaque côté du triangle est adjacent à un décagone.



(vue partielle du développement du dodécaèdre tronqué)

Etant donné qu'il y a 20 triangles dans un dodécaèdre tronqué, nous pouvons déduire que celui-ci possède 20 . 6 = **120 automorphismes**.

On pourrait penser qu'il faut additionner les automorphismes découverts "par les triangles" et ceux découverts "par les décagones". Cependant, on peut montrer que ces automorphismes sont les mêmes et que, dès lors, le dodécaèdre tronqué en compte bien 120 (et non pas 240).

- **Les déplacements**

TYPES	CENTRE/AXE/PLAN	NOMBRE ASSOCIÉ AUX TYPES
- L'identité		1
- Les rotations liées aux axes d'ordre 5 ($\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ et $\frac{4}{5}$)	Droite joignant le centre de deux décagones opposés	6 x 4 rotations
- Les rotations liées aux axes d'ordre 3 ($\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$)	Droite joignant deux triangles opposés	10 x 2 rotations
- Les rotations liées aux axes d'ordre 2 ($\frac{1}{2}$)	Droite joignant le milieu de deux arêtes "adjacentes à deux décagones" et opposées	15 x 1 rotation
		$\Rightarrow$ 60 déplacements

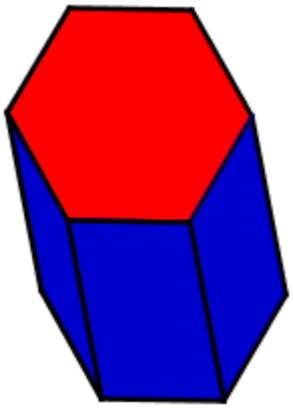
- **Les retournements**

TYPES	CENTRE/AXE/PLAN	NOMBRE ASSOCIÉ AUX TYPES
- Les symétries centrales	Centre du dodécaèdre tronqué.	1
- Les symétries bilatérales	Plan passant par deux arêtes "adjacentes à deux décagones" et opposées.	15
- Les antirotations liées aux axes d'ordre 5 ($\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ et $\frac{4}{5}$)	Droite joignant le centre de deux décagones opposés.	6 ar $_{1/5}$, 6 ar $_{2/5}$, 6 ar $_{3/5}$ et 6 ar $_{4/5}$
- Les antirotations liées aux axes d'ordre 3 ($\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$)	Droite joignant deux triangles opposés	10 ar $_{1/3}$ et 10 ar $_{2/3}$
		$\Rightarrow$ 60 retournements

		6 axes d'ordre 5				10 axes d'ordre 3		15 axes d'ordre 2	Total
Auto$^+$	**1_E**	**$r_{1/5}$**	**$r_{2/5}$**	**$r_{3/5}$**	**$r_{4/5}$**	**$r_{1/3}$**	**$r_{2/3}$**	**$r_{1/2}$**	
	1	6	6	6	6	10	10	15	60
Auto$^-$	**S_c**	**$ar_{1/5}$**	**$ar_{2/5}$**	**$ar_{3/5}$**	**$ar_{4/5}$**	**$ar_{1/3}$**	**$ar_{2/3}$**	**S_α**	
	1	6	6	6	6	10	10	15	60
Auto (Do)									**120**

α = plans bissecteurs ou plans passant par deux arêtes opposées

4. Le prisme droit à bases hexagonales



Auto (P_6) = 24

Auto$^+$ = 12

Auto$^-$ = 12

		1 axe d'ordre 6					6 axes d'ordre 2	Total
Auto$^+$	**1_E**	**$r_{1/6}$**	**$r_{2/6}$**	**$r_{3/6}$**	**$r_{4/6}$**	**$r_{5/6}$**	**$r_{1/2}$**	
	1	1	1	1	1	1	6	12
Auto$^-$	**Sc**	**$ar_{1/6}$**	**$ar_{2/6}$**	**S_α**	**$ar_{4/6}$**	**$ar_{5/6}$**	**S_β**	
	1	1	1	1	1	1	6	12
Auto (P_6)								**24**

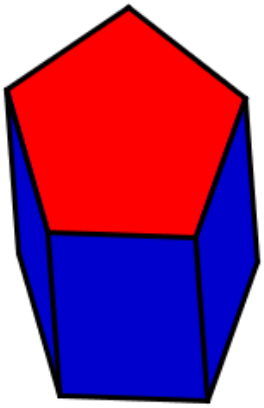
α = plans parallèles aux bases et passant par le centre du prisme à bases hexagonales

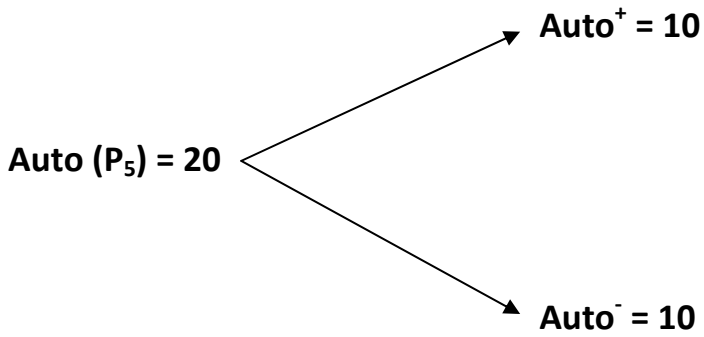
β = plans médiaux et plans diagonaux perpendiculaires aux bases.

Axe d'ordre 6 = axe passant par le milieu des deux hexagones.

Axes d'ordre 2 = axes passant par le milieu de deux rectangles opposés ou par deux arêtes latérales opposées.

5. Le prisme droit à bases pentagonales





		1 axe d'ordre 5					5 axes d'ordre 2	Total
Auto$^+$	**1_E**	**$r_{1/5}$**	**$r_{2/5}$**	**$r_{3/5}$**		**$r_{4/5}$**	**$r_{1/2}$**	
	1	1	1	1		1	5	10
Auto$^-$		**$ar_{1/10}$**	**$ar_{3/10}$**	**S_α**	**$ar_{7/10}$**	**$ar_{9/10}$**	**S_β**	
		1	1	1	1	1	5	10
Auto (P_5)								**20**

Axe d'ordre 5 = axe passant par le milieu des deux pentagones.

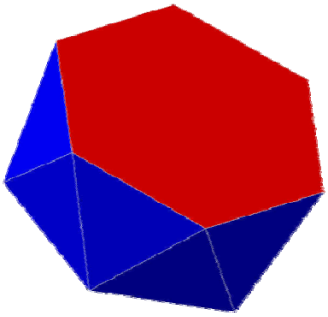
Axes d'ordre 2 = axes passant par le milieu de deux rectangles opposés ou par deux arêtes latérales opposées.

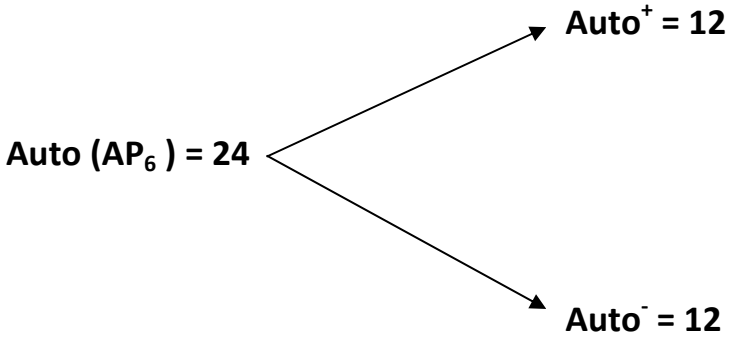
$ar_{1/10} = r_{1/10}$ o Sc où c est sur l'axe d'ordre 5 à mi-hauteur du prisme à bases pentagonales.

α = plans parallèles aux bases et passant à mi-hauteur du prisme à bases pentagonales.

β = plans bissecteurs et perpendiculaires aux bases.

6. L'antiprisme droit à bases hexagonales





		1 axe d'ordre 6						6 axes d'ordre 2		Total
Auto$^+$	**1_E**	**$r_{1/6}$**	**$r_{2/6}$**	**$r_{3/6}$**	**$r_{4/6}$**	**$r_{5/6}$**		**$r_{1/2}$**		
	1	1	1	1	1	1		6		12
Auto$^-$		**$ar_{1/12}$**	**$ar_{3/12}$**	**$ar_{5/12}$**	**$ar_{7/12}$**	**$ar_{9/12}$**	**$ar_{11/12}$**	**S_α**	**S_β**	
		1	1	1	1	1	1	3	3	12
Auto (P_6)										**24**

Axe d'ordre 6 = axe passant par le milieu des deux hexagones.

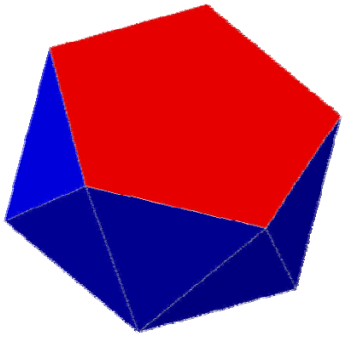
Axes d'ordre 2 = axes passant par le milieu de deux arêtes latérales opposées.

$ar_{1/12} = r_{1/12}$ o Sc où c est sur l'axe d'ordre 6 à mi-hauteur de l'antiprisme à bases hexagonales

α = plans médiateurs des hexagones.

β = plans bissecteurs des hexagones.

7. L'antiprisme droit à bases pentagonales



Auto (AP_5) = 20

$Auto^+$ = 10

$Auto^-$ = 10

		1 axe d'ordre 5				5 axes d'ordre 2	Total
$Auto^+$	**1_E**	**$r_{1/5}$**	**$r_{2/5}$**	**$r_{3/5}$**	**$r_{4/5}$**	**$r_{1/2}$**	
	1	1	1	1	1	5	10
$Auto^-$	**S_c**	**$ar_{1/5}$**	**$ar_{2/5}$**	**$ar_{3/5}$**	**$ar_{4/5}$**	**S_α**	
	1	1	1	1	1	5	10
Auto (P_5)							**20**

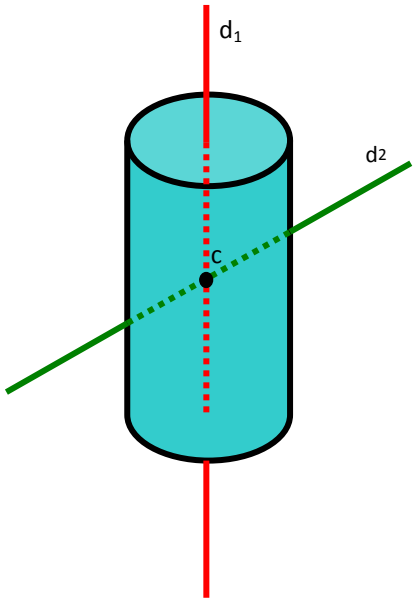
Axe d'ordre 5 = axe passant par le milieu des deux pentagones.

Axes d'ordre 2 = axes passant par le milieu de deux arêtes latérales opposées.

$ar_{1/5} = r_{1/5}$ o Sc où c est le centre de symétrie.

α = plans médiateurs(ou bissecteurs) des pentagones.

8. Le cylindre fini



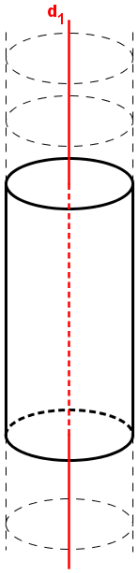
Auto (Cy) = ∞

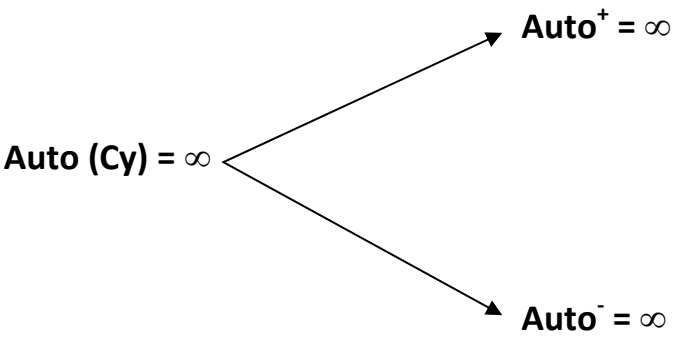
Auto$^+$ = ∞

Auto$^-$ = ∞

Auto$^+$ = ∞	**Auto$^-$ = ∞**
• 1_E • un axe de révolution: $r_{d_1,\alpha}$ où **0° < α < 360°** • une infinité d'axes d'ordre 2: $r_{d_2,1/2}$ où d_2 est perpendiculaire à d_1 et passe par le centre du cylindre.	• Symétrie centrale (Sc) • Symétrie bilatérale de plan perpendiculaire à l'axe de révolution et passant par le centre c • Symétries bilatérales de plans contenant l'axe de révolution • Antirotations d'axe de révolution et d'amplitudes variant de 0° à 360° excepté 180°

9. Le cylindre infini



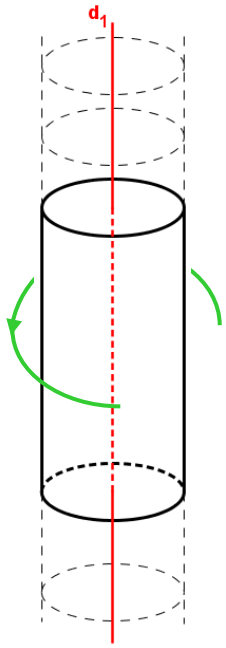


Auto$^+$ = ∞	Auto$^-$ = ∞
• 1_E • un axe de révolution: $r_{d_1,\alpha}$ où $0° < \alpha < 360°$ • une infinité d'axes d'ordre 2: $r_{d_2,1/2}$ où $d_2 \perp d_1$ • une infinité de translations: $t_{\vec{u}}$ où $\vec{u}$ // d_1 • une infinité de vissages: $v_{r(d_1,\alpha),\vec{u}}$ où $0° \leq \alpha < 360°$ et $\vec{u}$ // d_1 **Remarque:** $v_{r(d_1,\alpha),\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ r_{d_1,\alpha}$	• une infinité de symétries centrales: S_c où $c \in d_1$ • une infinité de symétries bilatérales de plans perpendiculaires à l'axe de révolution: S_α où $\alpha \perp d_1$ • une infinité de symétries bilatérales de plans contenant l'axe de révolution: S_β où $\beta \supset d_1$ • une infinité d'antirotations: $ar_{s_c,r(d_1,\alpha)}$ où $c \in d_1$ et $\alpha \in [0°;360°[\backslash\{180°\}$ **Remarque:** $ar_{s_c,\, r(d_1,\alpha)} = r_{d_1,\alpha} \circ S_c$ • une infinité de symétries bilatérales glissées: $S_{\beta,\vec{u}}$ où $\beta \supset d_1$ et $\vec{u}$ // d_1

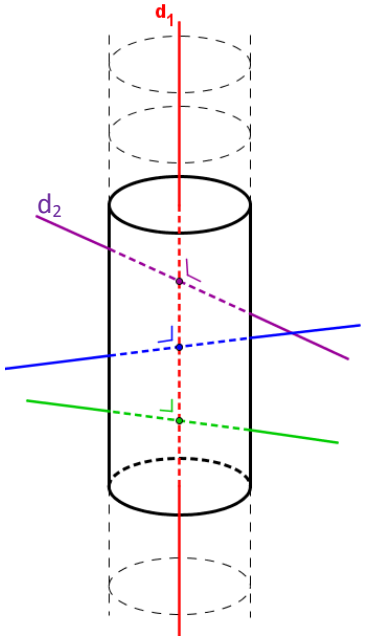
9.1. Illustration des auto$^+$

Remarque: L'identité ne sera pas illustrée.

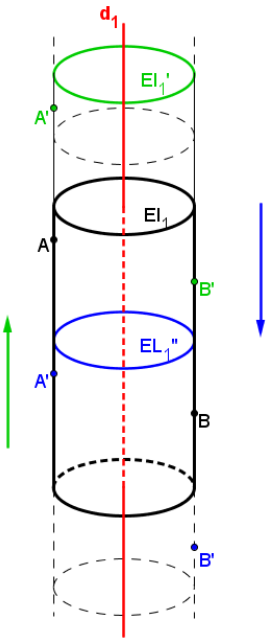
9.1.1. $r_{d_1,\alpha}$ où $0° \leq \alpha < 360°$



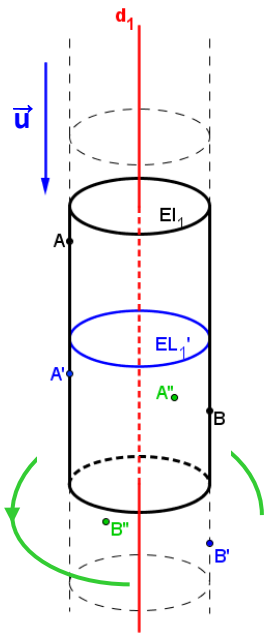
9.1.2. $r_{d_2,1/2}$ où $d_2 \perp d_1$



9.1.3. $t_{\vec{u}}$ où $\vec{u}$ // d_1

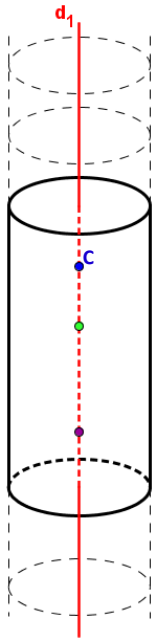


9.1.4. $v_{r(d_1,\alpha),\vec{u}}$ où $0° \leq \alpha < 360°$ et $\vec{u}$ // d_1

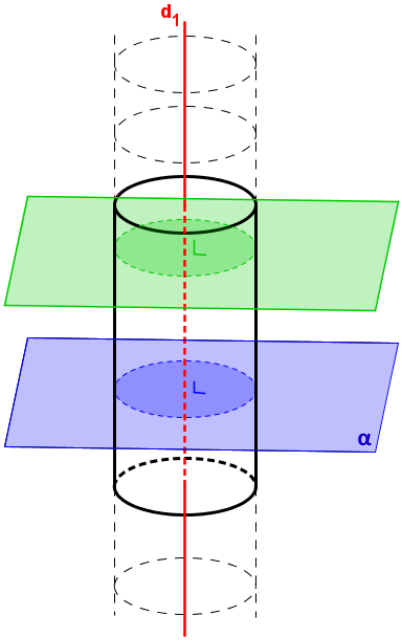


9.2. Illustration des auto

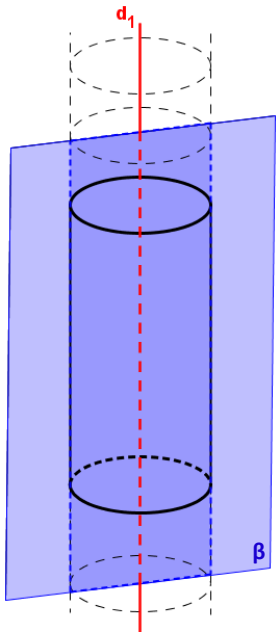
9.2.1. S_c où $c \in d_1$



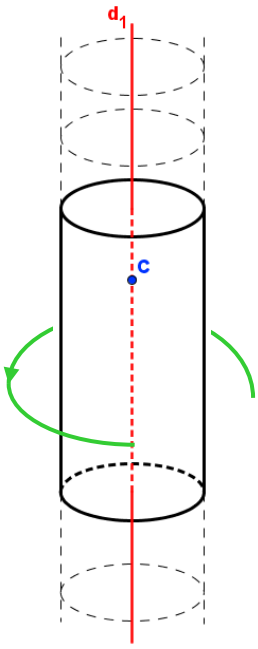
9.2.2. S_α où $\alpha \perp d_1$



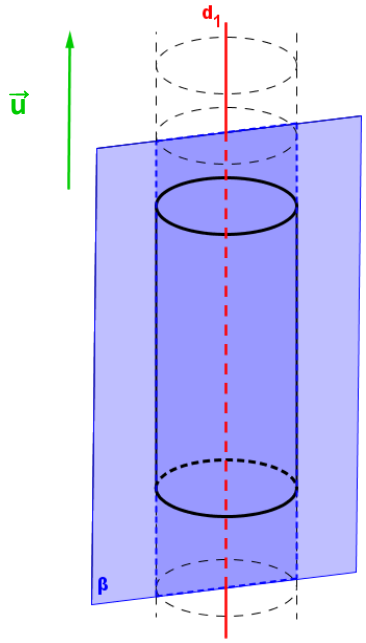
9.2.3. S_β où $\beta \supset d_1$



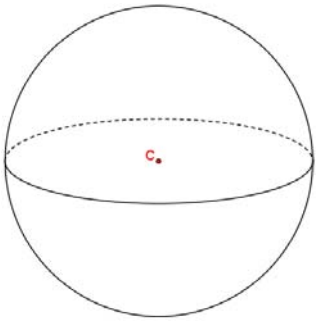
9.2.4. $ar_{s_c,r(d_1,\alpha)}$ où $c \in d_1$ et $\alpha \in [0°;360°[\setminus \{180°\}$



9.2.5. $S_{\beta,\vec{u}}$ où $\beta \supset d_1$ et $\vec{u}$ // d_1



10. La sphère



Auto (Sph) = ∞

Auto$^+$ = ∞

Auto$^-$ = ∞

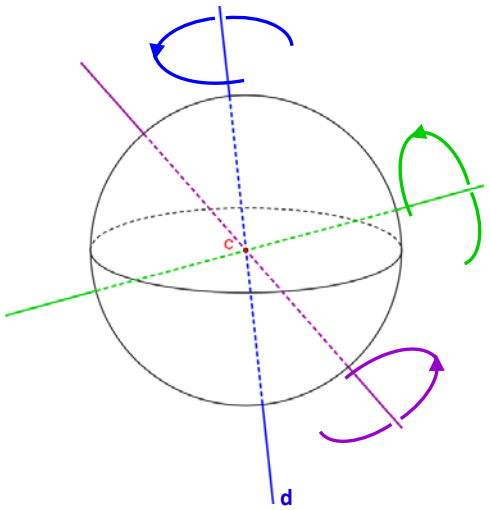
Auto$^+$ = ∞	**Auto$^-$ = ∞**
• 1_E • Une infinité d'axes de révolutions: $r_{d,\alpha}$ où $d \ni C$ et $0° < \alpha < 360°$	• une symétrie centrale: S_c où c est le centre de la sphère • une infinité de symétries bilatérales de plans comprenant le centre C de la sphère: S_α où $\alpha \ni C$

	• une infinité d'antirotations: $ar_{s_c,r(d,\alpha)}$ où c est le centre de la sphère, d ∋ C, et $\alpha \in [0°;360°[\setminus \{180°\}$

10.1. Illustration des auto$^+$

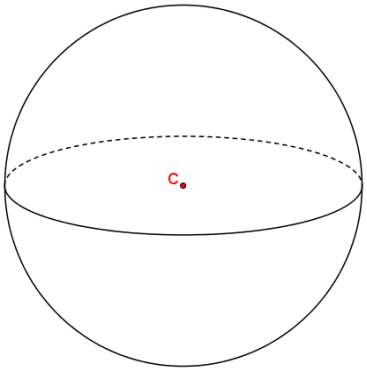
Remarque: L'identité ne sera pas illustrée.

10.1.1. $r_{d,\alpha}$ où $0° \leq \alpha < 360°$ et $d \ni C$

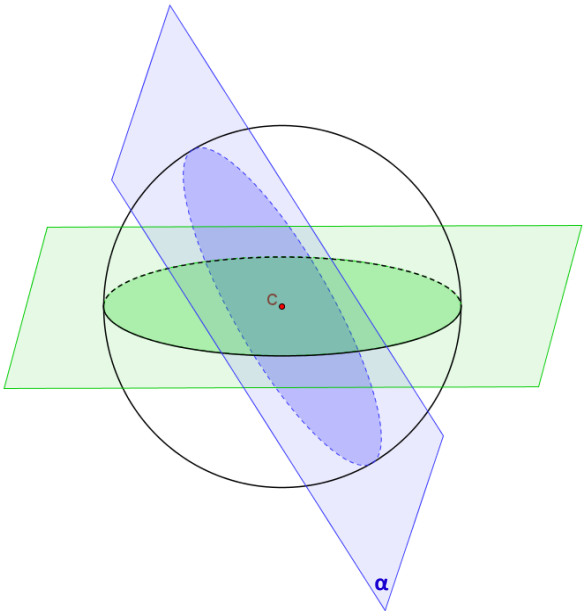


10.2. Illustration des auto

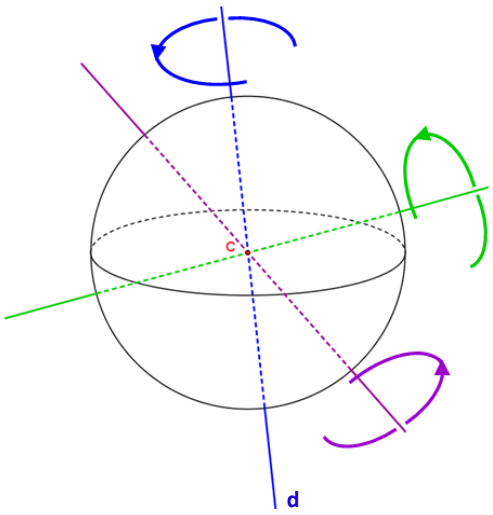
10.2.1. S_c



10.2.2. S_α où $\alpha \ni C$



10.2.3. $ar_{s_c,\, r(d,\alpha)}$ où $\alpha \in [0°;360°[\setminus \{180°\}$ et $d \ni C$

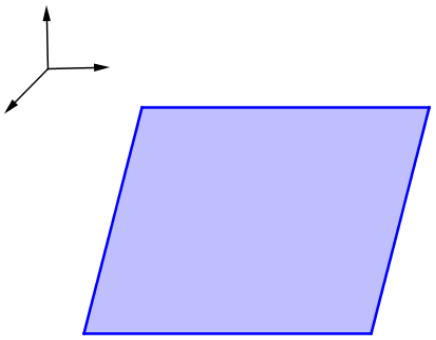


11. Le carré plongé dans E^3

Il est bien connu que, en géométrie plane (dans E^2), un carré admet 8 automorphismes:

- 4 "déplacements" ou 4 auto$^+$: les rotations de $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$ et $\frac{4}{4}$ de tour de centre O;
- 4 "retournements" ou 4 auto$^-$: les symétries orthogonales dont les droites de points fixes sont les médianes et les diagonales.

Est-ce le même quand le carré est plongé dans l'espace E^3? Nous allons montrer que non. En fait, un carré plongé dans l'espace possède 16 automorphismes.



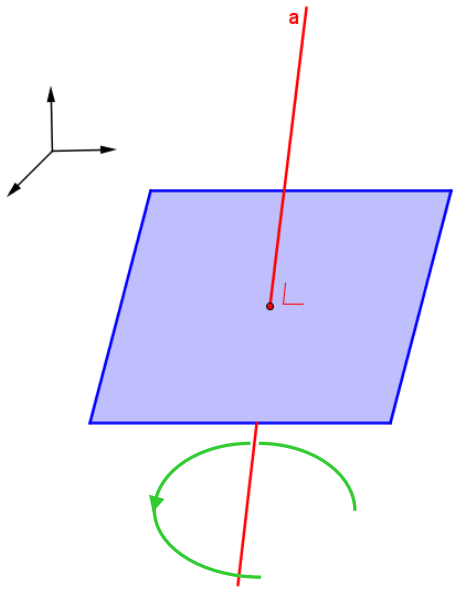
Auto (Ca) = 16 → **Auto$^+$** = 8 ; **Auto$^-$** = 8

Auto$^+$ = 8	**Auto$^-$ = 8**
• 1_E • trois rotations autour de l'axe perpendiculaire au carré et passant par le centre: $r_{a,1/4}$; $r_{a,2/4}$; $r_{a,3/4}$ où a ⊥ au carré et passe par son centre • quatre axes d'ordre 2: $r_{d_1,1/2}$; $r_{d_2,1/2}$ où d_1 et d_2 sont les droites diagonales du carré $r_{m_1,1/2}$; $r_{m_2,1/2}$ où m_1 et m_2 sont les droites médianes du carré	• une symétrie centrale: S_c où c est le centre du carré • quatre symétries bilatérales de plans perpendiculaires au carré et comprenant les droites diagonales ou les droites médianes: S_α où $\alpha \supset d_1$ ou d_2 S_β où $\beta \supset m_1$ ou m_2 • une symétrie bilatérale de plan comprenant le carré: S_Υ où $\Upsilon \supset$ le carré • deux antirotations: $ar_{S_c,r(a,1/4)}$ et $ar_{S_c,r(a,3/4)}$

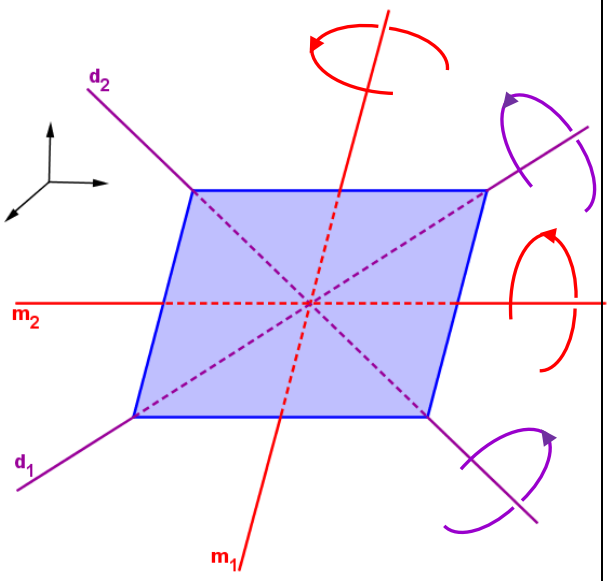
11.1. Illustration des auto$^+$

Remarque: L'identité ne sera pas illustrée.

11.1.1. $r_{a,1/4}$; $r_{a,2/4}$; $r_{a,3/4}$ où a ⊥ au carré

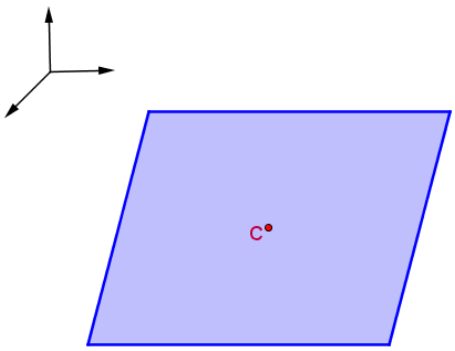


11.1.2. $r_{d_1,1/2}$; $r_{d_2,1/2}$; $r_{m_1,1/2}$; $r_{m_2,1/2}$

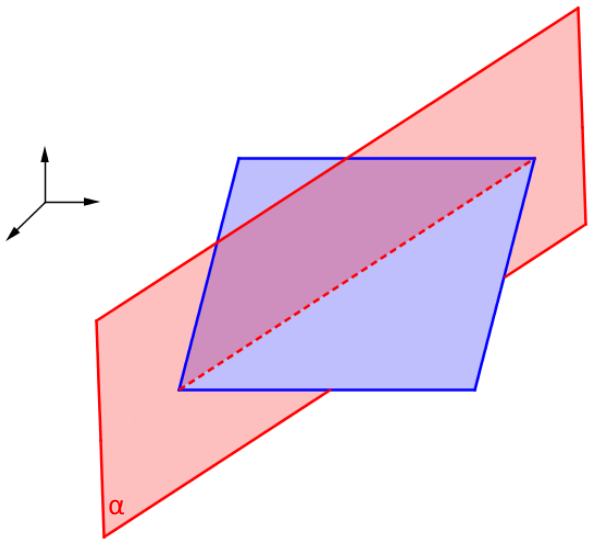


11.2. Illustration des auto$^-$

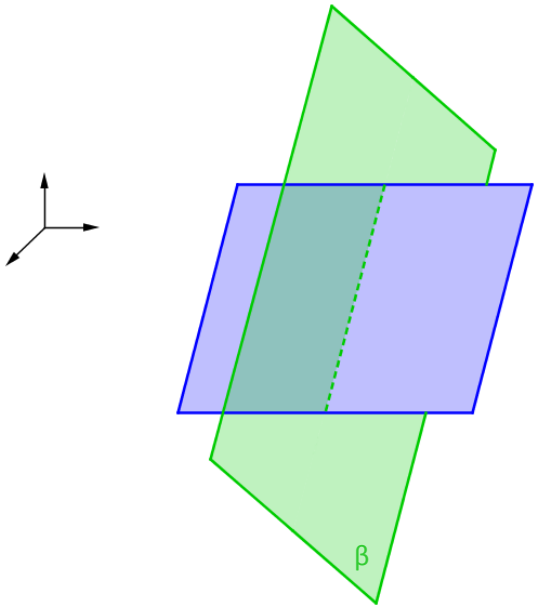
11.2.1. S_c



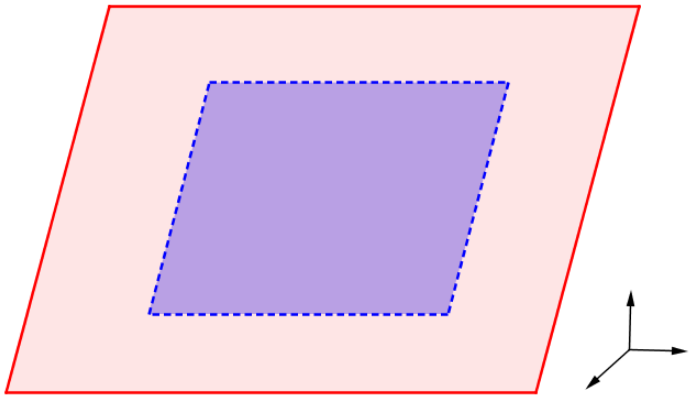
11.2.2. S_α où $\alpha \supset d_1$ ou d_2



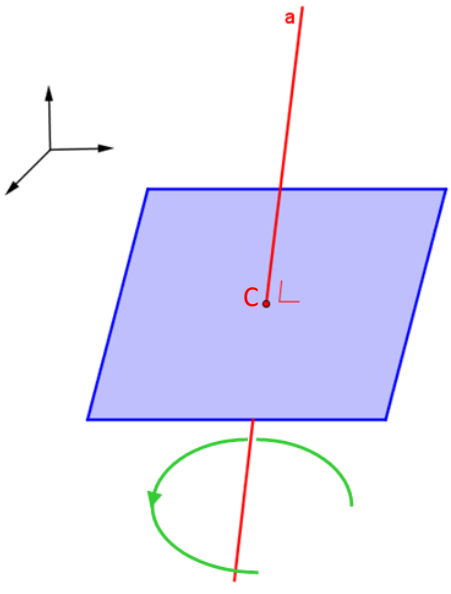
S_β où $\beta \supset m_1$ ou m_2



11.2.2. S_Υ où $\Upsilon \supset$ le carré

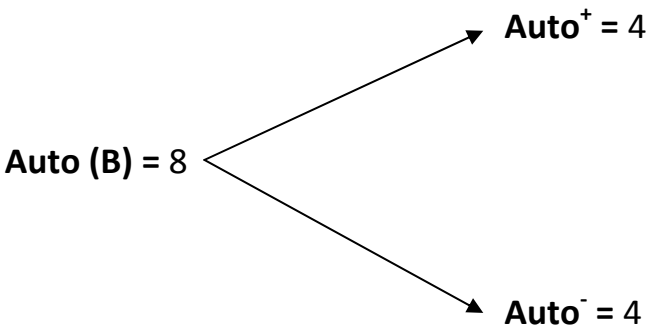


11.2.3. $ar_{S_C,\ r(a,\ 1/4)}$ et $ar_{S_C,\ r(a,\ 3/4)}$



Remarque: Semblablement au carré, tout n-gone régulier plongé dans l'espace E^3 possède "4n" automorphismes ("2n" déplacements et "2n" retournements) alors que, en géométrie plane (dans E^2), il n'en possède que "2n" ("n" déplacements et "n" retournements).

12. La balle de tennis

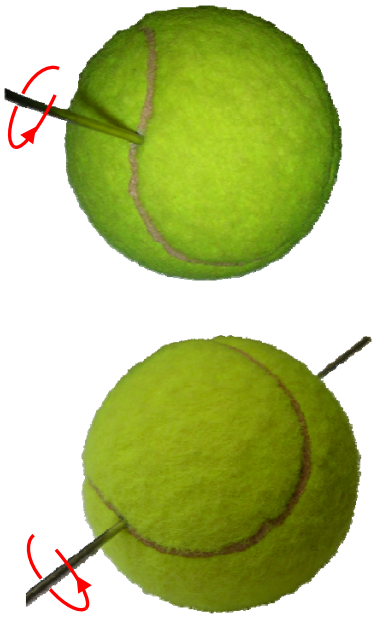


Auto$^+$ = 4	Auto$^-$ = 4
• 1_E • deux axes d'ordre 2 passant par deux points d'inflexion opposés de l'arête: $r_{d_1,1/2}$ et $r_{d_2,1/2}$ où d_1 et d_2 passent par deux points d'inflexion opposés • un axe d'ordre 2 passant par le centre de chaque face $r_{a,1/2}$ où a passe par le centre de chaque face.	• deux symétries bilatérales de plans comprenant le centre de chaque face (voir illustration): S_α où $\alpha \ni C_1$ et C_2 • deux antirotations: $ar_{S_C,r(a,\,1/4)}$ et $ar_{S_C,r(a,\,3/4)}$ où C est le centre de la balle

12.1. Illustration des auto$^+$

Remarque: L'identité ne sera pas illustrée.

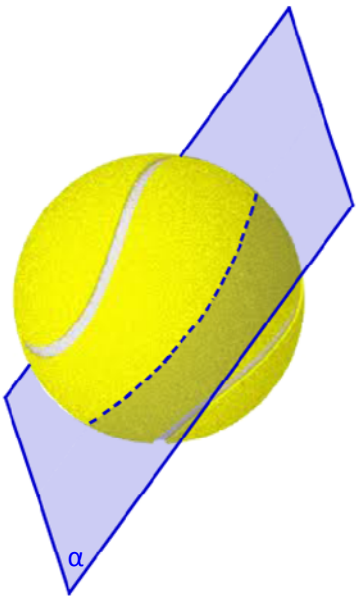
12.1.1. $r_{d_1,1/2}$ et $r_{d_2,1/2}$ où d_1 et d_2 passent par deux points d'inflexion opposés



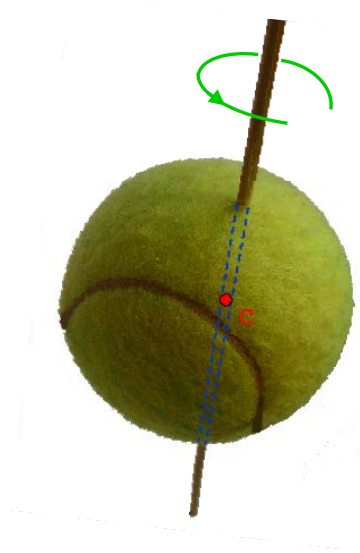
12.1.2. $r_{a,1/2}$ où a passe par le centre de chaque face.

12.2. Illustration des auto$^-$

12.2.1. S_α où $\alpha \ni C_1$ et C_2



12.2.2. $ar_{s_C,\, r(a,\, 1/4)}$ et $ar_{s_C,\, r(a,\, 3/4)}$ où C est le centre de la balle



13. La balle de volley-ball

Auto (B) = 24

Auto$^+$ = 12

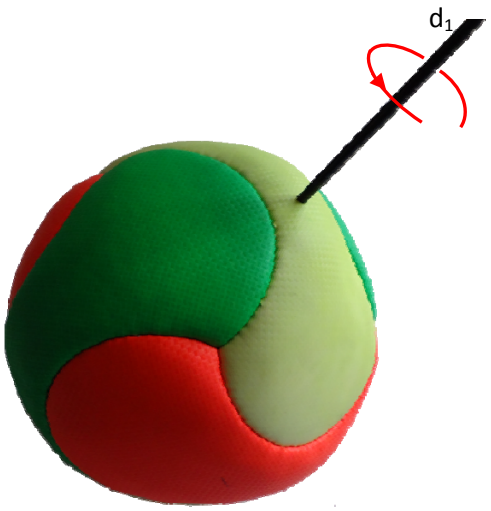
Auto$^-$ = 12

Auto$^+$ = 12	**Auto$^-$ = 12**
• 1_E • trois axes d'ordre 2 passant par le centre de deux faces opposées: $r_{d_1,1/2}$, $r_{d_2,1/2}$ et $r_{d_3,1/2}$ où d_1, d_2 et d_3 passent par le centre de deux faces opposées • quatre axes d'ordre 3 passant par deux sommets opposés $r_{a,1/3}$, $r_{a,2/3}$, $r_{b,1/3}$, $r_{b,2/3}$, $r_{c,1/3}$, $r_{c,2/3}$, $r_{d,1/3}$ et $r_{d,2/3}$ où a, b, c et d passent par deux sommets opposés	• une symétrie centrale: S_c où c est le centre de la balle • trois symétries bilatérales de plans comprenant le milieu de deux faces opposées et celui d'une des faces comprises entre-elles (voir illustration): S_α où $\alpha \ni C_1$, C_2 et C_3 • quatre antirotations: $ar_{S_c,r(a,\,1/3)}$, $ar_{S_c,r(a,\,2/3)}$, $ar_{S_c,r(b,\,1/3)}$, $ar_{S_c,r(b,\,2/3)}$, $ar_{S_c,r(c,\,1/3)}$, $ar_{S_c,r(c,\,2/3)}$, $ar_{S_c,r(d,\,1/3)}$, $ar_{S_c,r(d,\,2/3)}$ où C est le centre de la balle

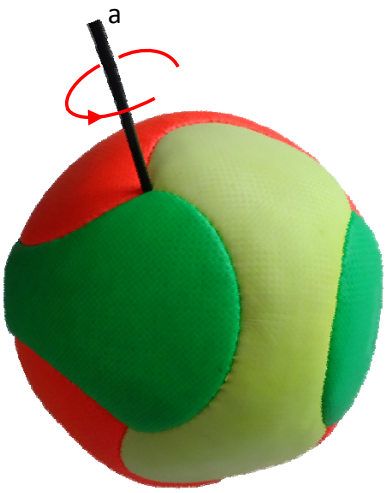
13.1. Illustration des auto$^+$

Remarque: L'identité ne sera pas illustrée.

13.1.1. $r_{d_1,1/2}$, $r_{d_2,1/2}$ et $r_{d_3,1/2}$



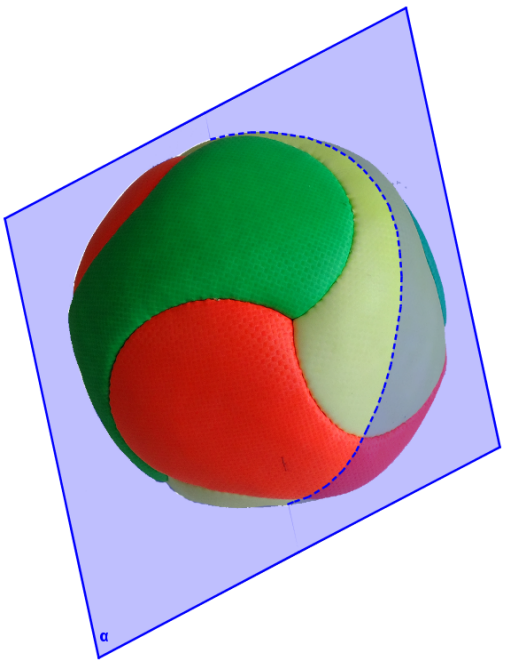
13.1.2. $r_{a,1/3}$, $r_{a,2/3}$, $r_{b,1/3}$, $r_{b,2/3}$, $r_{c,1/3}$, $r_{c,2/3}$, $r_{d,1/3}$ et $r_{d,2/3}$



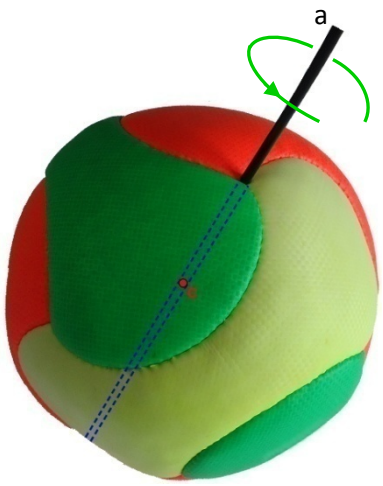
13.2. Illustration des auto$^-$

13.2.1. S_c où c est le centre de la balle

13.2.2. S_α où $\alpha \ni C_1$, C_2 et C_3

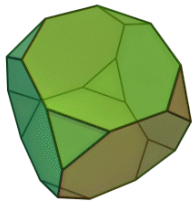
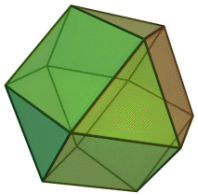
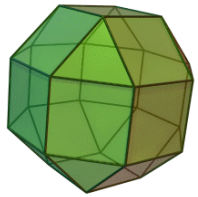


13.2.3. $ar_{s_C,r(a,\,1/3)}$, $ar_{s_C,r(a,\,2/3)}$, $ar_{s_C,r(b,\,1/3)}$, $ar_{s_C,r(b,\,2/3)}$, $ar_{s_C,r(c,\,1/3)}$, $ar_{s_C,r(c,\,2/3)}$, $ar_{s_C,r(d,\,1/3)}$, $ar_{s_C,r(d,\,2/3)}$

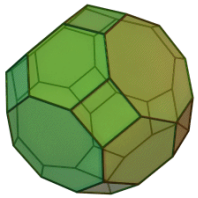


IV. Automorphismes des polyèdres archimédiens

1. Automorphismes d'Archimédiens analogues à ceux du cube (ou de l'octaèdre régulier)

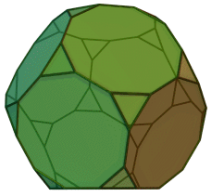
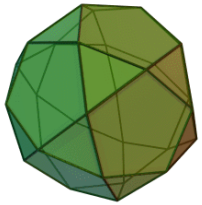
Nom	*Solide*	*Faces*		*Arêtes*	*Sommets*	*Configuration sommet*	*Méthode d'obtention*	*Automorphismes*
Cube tronqué (ou hexaèdre tronqué)		14	8 triangles 6 octogones	36	24	3,8,8	Cube faiblement tronqué	Comme ces polyèdres sont inscrits "symétriquement" dans le cube, il est naturel qu'ils possèdent aussi les **48** mêmes automorphismes que celui-ci (voir page II – 26)
Cuboctaèdre		14	8 triangles 6 carrés	24	12	3,4,3,4	Cube fortement tronqué	
Petit rhombicuboctaèdre		26	8 triangles 18 carrés	48	24	3,4,4,4	Cube chanfreiné[1]	

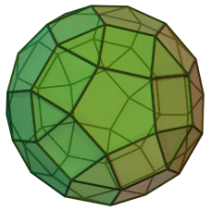
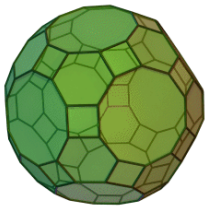
[1] Chaque sommet de degré *d* est remplacé par un polygone d'ordre *d*, et chaque arête par un quadrilatère. Les anciennes faces restent du même ordre. Si le polyèdre de départ a F_0 faces, S_0 sommets de degrés d_i et A_0 arêtes, un polyèdre chanfreiné a alors: "somme(d_i)" sommets, "$F_0 + S_0 + A_0$" faces et "somme(d_i) $+ 2A_0$" arêtes.

Cuboctaèdre tronqué		26	12 carrés 8 hexagones 6 octogones	72	48	4,6,8	Cube à arêtes et sommets tronqués	Comme ces polyèdres sont inscrits "symétriquement" dans le cube, il est naturel qu'ils possèdent aussi les **48** mêmes automorphismes que celui-ci (voir page II – 26).

Remarque: Le cuboctaèdre, le petit rhombicuboctaèdre, le cuboctaèdre tronqué et le cube adouci peuvent également être obtenus à partir de l'octaèdre (qui possède également 48 automorphismes)

2. Automorphismes d'Archimédiens analogues à ceux du dodécaèdre régulier (ou de l'icosaèdre régulier)

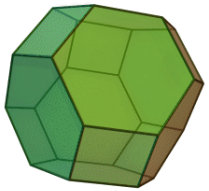
Nom	Solide	Faces		Arêtes	Sommets	Configuration sommet	Méthode d'obtention	Automorphismes
Dodécaèdre tronqué		32	20 triangles 12 décagones	90	60	3,10,10	Dodécaèdre faiblement tronqué	Comme ces polyèdres sont inscrits "symétriquement" dans le dodécaèdre, il est naturel qu'ils possèdent aussi les **120** mêmes automorphismes que celui-ci (voir page II – 45).
Icosidodécaèdre		32	20 triangles 12 pentagones	60	30	3,5,3,5	Dodécaèdre fortement tronqué	

Petit Rhombicosi-dodécaèdre		62	20 triangles 30 carrés 12 pentagones	120	60	3,4,5,4	Dodécaèdre chanfreiné[2]	Comme ces polyèdres sont inscrits "symétriquement" dans le dodécaèdre, il est naturel qu'ils possèdent aussi les **120** mêmes automorphismes que celui-ci (voir page II – 45).
Icosidodéca-èdre tronqué		62	30 carrés 20 hexagones 12 décagones	180	120	4,6,10	Dodécaèdre à arêtes et sommets tronqués	

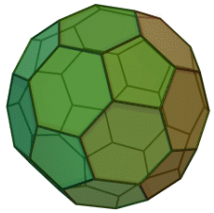
Remarque: L'icosidodécaèdre, le petit petit rhombicosidodécaèdre, l'icosidodécaèdre tronqué et le dodécaèdre adouci peuvent également être obtenus à partir de l'icosaèdre (qui possède également 120 automorphismes)

[2] Chaque sommet de degré d est remplacé par un polygone d'ordre d, et chaque arête par un quadrilatère. Les anciennes faces restent du même ordre. Si le polyèdre de départ a F_0 faces, S_0 sommets de degrés d_i et A_0 arêtes, un polyèdre chanfreiné a alors: "somme(d_i)" sommets, "$F_0 + S_0 + A_0$" faces et "somme(d_i) $+ 2A_0$" arêtes.

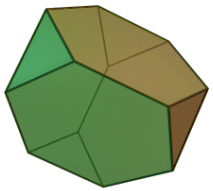
3. Automorphismes d'Archimédiens analogues à ceux de l'octaèdre

Nom	Solide	Faces		Arêtes	Sommets	Configuration sommet	Méthode d'obtention	Automorphismes
Octaèdre tronqué		14	6 carrés 8 hexagones	36	24	4,6,6	Octaèdre faiblement tronqué	Comme ces polyèdres sont inscrits "symétriquement" dans l'octaèdre, il est naturel qu'ils possèdent aussi les **48** mêmes automorphismes que celui-ci (voir page II–39).

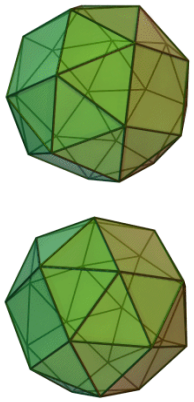
4. Automorphismes d'Archimédiens analogues à ceux de l'icosaèdre

Nom	Solide	Faces		Arêtes	Sommets	Configuration sommet	Méthode d'obtention	Automorphismes
Icosaèdre tronqué (ballon de football)		32	12 pentagones 20 hexagones	90	60	5,6,6	Icosaèdre faiblement tronqué	Comme ces polyèdres sont inscrits "symétriquement" dans l'icosaèdre, il est naturel qu'ils possèdent aussi les **120** mêmes automorphismes que celui-ci (voir page II – 51).

5. Automorphismes d'Archimédiens analogues à ceux du tétraèdre

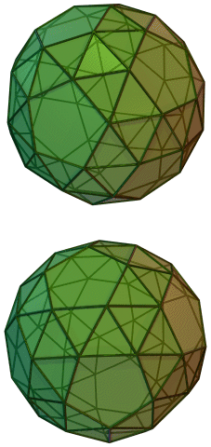
Nom	Solide	Faces		Arêtes	Sommets	Configuration sommet	Méthode d'obtention	Automorphismes
Tétraèdre tronqué		8	4 hexagones 4 triangles	18	12	3,6,6	Tétraèdre faiblement tronqué	Comme ces polyèdres sont inscrits "symétriquement" dans le tétraèdre, il est naturel qu'ils possèdent aussi les **24** mêmes automorphismes que celui-ci (voir page II – 33).

6. Obtenus "à partir" des déplacements du cube

Nom	Solide	Faces		Arêtes	Sommets	Configuration sommet	Méthode d'obtention	Automorphismes
Cube adouci ou Snub-cube (deux formes chirales)		38	32 triangles 6 carrés	60	24	3,3,3,3,4	Cube adouci[3]	Ce polyèdre est obtenu en recherchant l'orbite d'un point du cube "bien choisi" par les 24 auto$^+$ de ce dernier. Il ne possède donc que ***24*** auto$^+$ comme automorphismes (les 24 mêmes que ceux du cube). Il en résulte qu'il ne possède aucun plan ni centre de symétrie.

[3] Chaque sommet de degré d est remplacé par un polygone d'ordre d, et chaque arête par 2 triangles. Les faces issues des anciennes faces restent du même ordre. Si le polyèdre de départ a F_0 faces, S_0 sommets de degrés d_i et A_0 arêtes, un polyèdre adouci a alors: "somme(d_i)" sommets, "$F_0 + S_0 + 2\ A_0$" faces et "somme(d_i) + $3A_0$" arêtes.

7. Obtenus "à partir" des déplacements du dodécaèdre

Nom	Solide	Faces		Arêtes	Sommets	Configuration sommet	Méthode d'obtention	Automorphismes
Dodécaèdre adouci ou Snub-dodécaèdre (deux formes chirales)		92	80 triangles 12 pentagones	150	60	3,3,3,3,5	Dodécaèdre adouci[4]	Ce polyèdre est obtenu en recherchant l'orbite d'un point du dodécaèdre "bien choisi" par les 60 auto$^+$ de ce dernier. Il ne possède donc que ***60*** auto$^+$ comme automorphismes (les 60 mêmes que ceux du dodécaèdre). Il en résulte qu'il ne possède aucun plan ni centre de symétrie.

[4] Chaque sommet de degré d est remplacé par un polygone d'ordre d, et chaque arête par 2 triangles. Les faces issues des anciennes faces restent du même ordre. Si le polyèdre de départ a F_0 faces, S_0 sommets de degrés d_i et A_0 arêtes, un polyèdre adouci a alors: "somme(d_i)" sommets, "$F_0 + S_0 + 2\ A_0$" faces et "somme(d_i) + $3A_0$" arêtes.