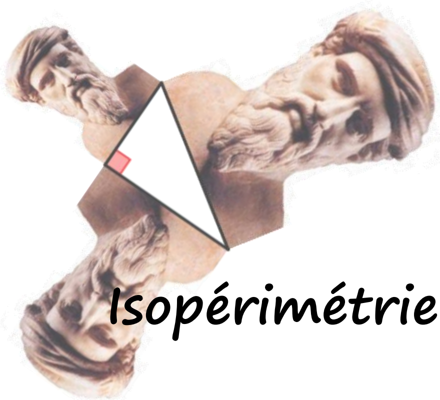
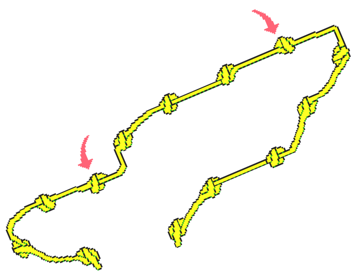
Cellule de Géométrie

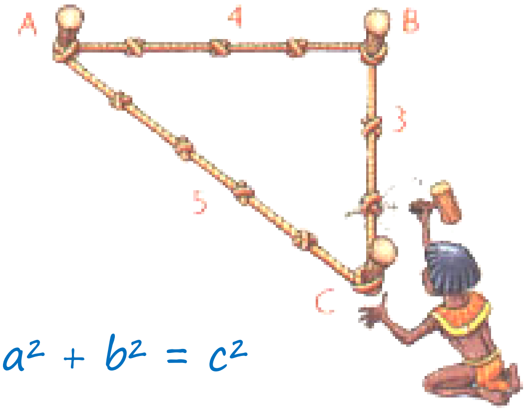
Mathématiques élémentaires

$S_{F1} + S_{F2} = S_{F3}$



Isopérimétrie et le théorème de Pythagore





$a^2 + b^2 = c^2$

Cellule de Géométrie – Catégorie pédagogique de la HEH

DEMAL Michel
demal.michel@skynet.be

DRAMAIX Jérémy
jeremy.dramaix@gmail.com

HIGNY Samuel
higny_samuel@hotmail.com

LAFOT Cindy
lafot.cindy@hotmail.com

MALAGUARNERA Angelo
angelo.malaguarnera@gmail.com

Avec la collaboration de

VERMEIREN N.

Plan de l'exposé: "Isopérimétrie et le théorème de Pythagore

1. Découverte du théorème de Pythagore, avec des élèves

1.1. Enigme: problème de la corde à 13 nœuds (la corde de 12 mètres).

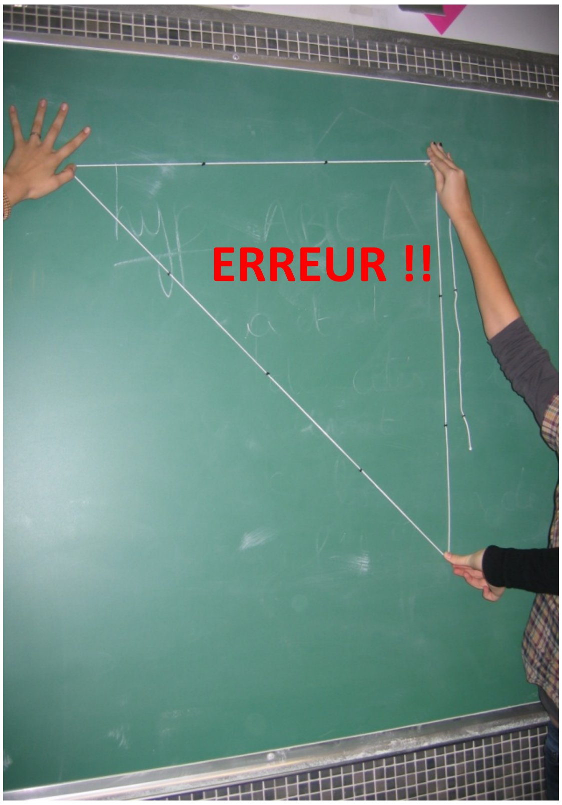
Un fermier désire construire un enclos rectangulaire semblable à celui de la photo.

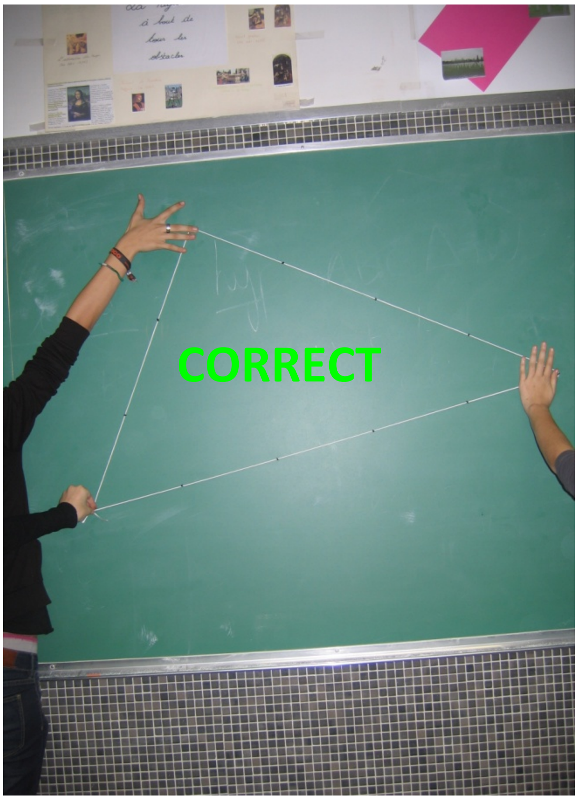
Grâce à une corde à 13 nœuds, le fermier déclare obtenir très facilement un angle droit pour construire sa clôture rectangulaire.

Comment le fermier s'y prend-il pour obtenir facilement un angle droit?

Comment peut-on expliquer mathématiquement la démarche du fermier?

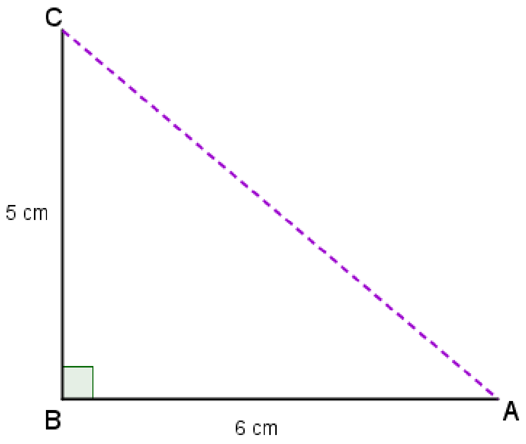
Remarque: mêmes questions avec une corde de 12 mètres?





1.2. Détermination univoque d'un triangle rectangle.

Dans un triangle rectangle, la connaissance des deux côtés de l'angle droit détermine l'hypoténuse (le troisième côté).

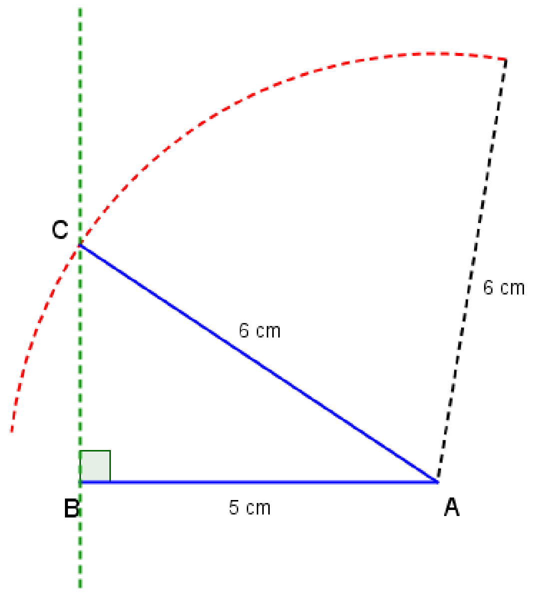


Ex : Traçons le triangle ABC rectangle en B,
avec |BC| = 5 cm et |AB| = 6 cm

L'hypoténuse [AC] (le troisième côté) est univoquement déterminée.

Dans un triangle rectangle, la connaissance de l'hypoténuse et d'un côté de l'angle droit détermine le troisième côté.

Ex: Traçons le triangle ABC rectangle en B, avec |AB| = 5 cm et |AC|= 6 cm

	• *Traçons le côté [AB] de 5 cm.* • Traçons l'angle droit ($\widehat{B}$). *(Traçons la droite BC ⊥ AB en vert.)* • *Traçons un arc de cercle de centre A et de rayon 6 cm.* • L'intersection de l'arc de cercle et du côté vert de l'angle droit nous donne le point C. ⇒ Le troisième côté ([BC]) est donc univoquement déterminé.

Dans un triangle rectangle, la connaissance des deux côtés de l'angle droit détermine l'hypoténuse.

et

Dans un triangle rectangle, la connaissance de l'hypoténuse et d'un côté de l'angle droit détermine le troisième côté.

*On peut en déduire que **la connaissance de deux côtés dans un triangle rectangle détermine univoquement le troisième côté.***

Il existe donc une relation reliant les longueurs des trois côtés.

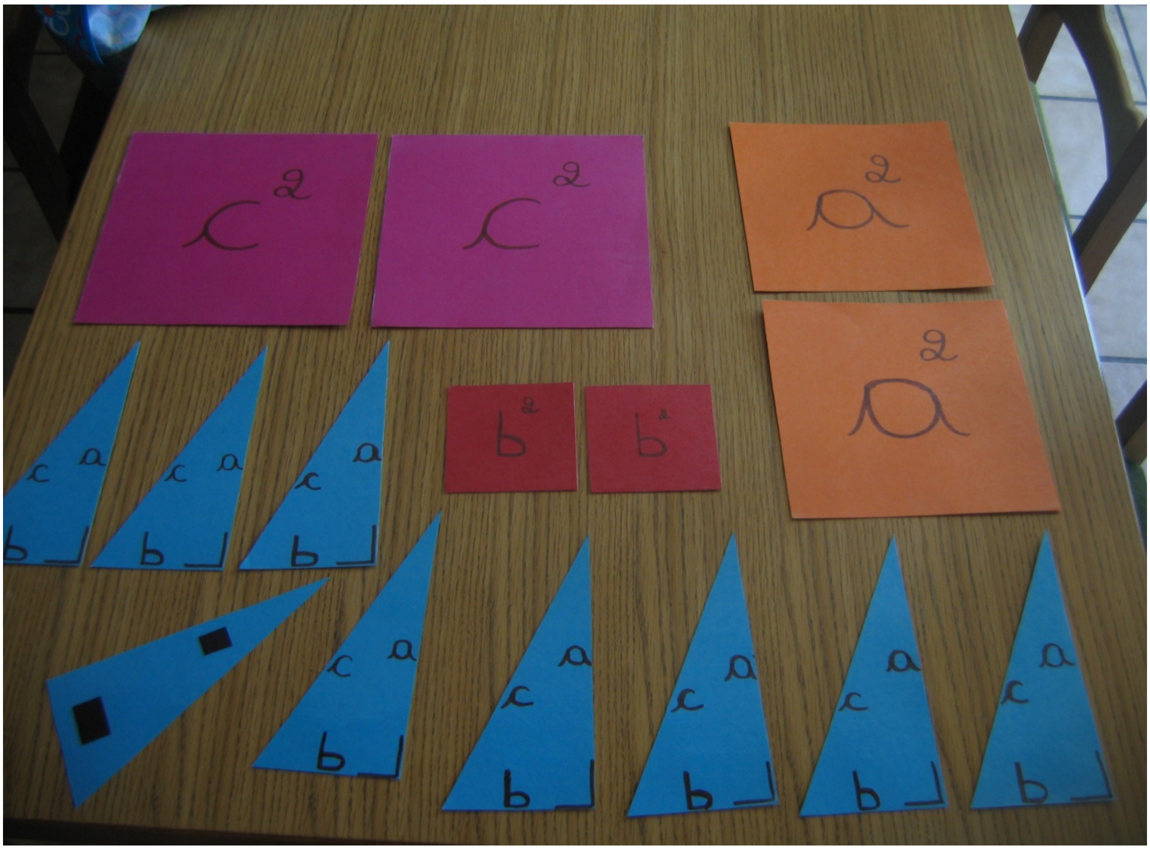
Cette relation est le fameux théorème de Pythagore.

1.3. Illustration du théorème de Pythagore avec de l'eau.

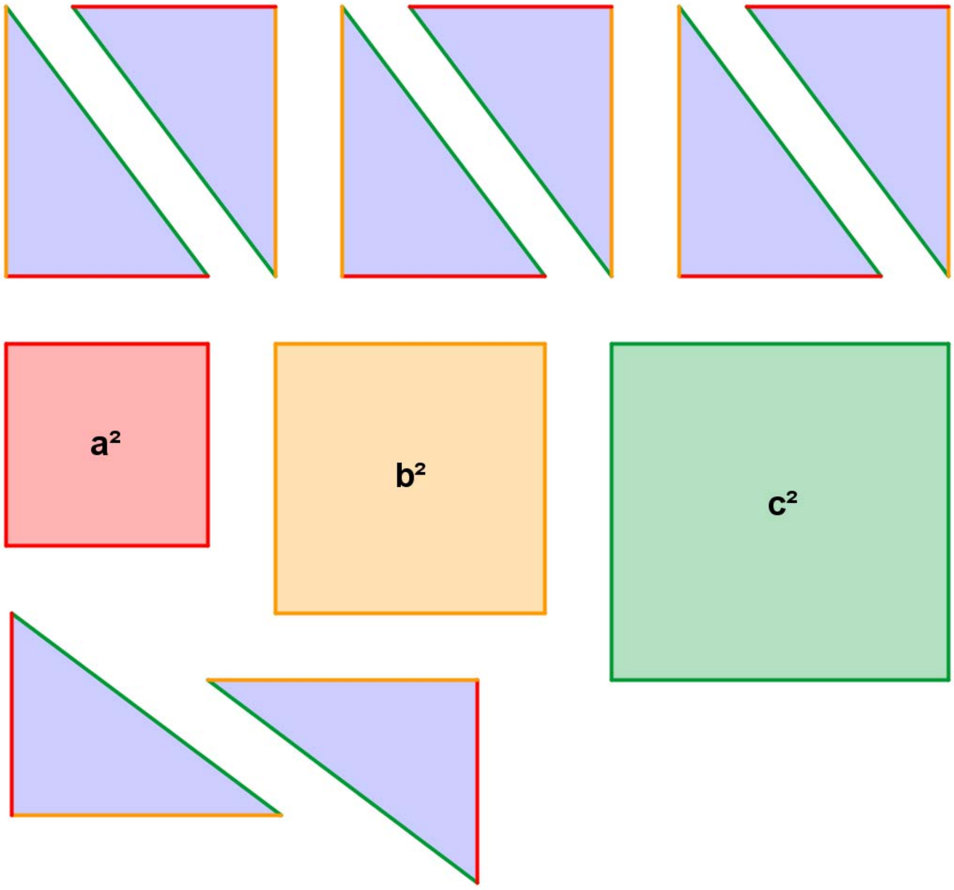
➔ **Voir le support avec l'eau.**

2. Enoncé et démonstration du théorème de Pythagore

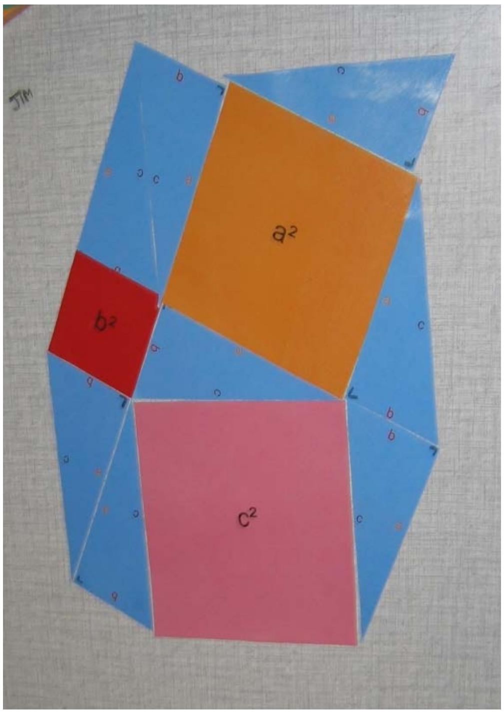
2.1. Puzzle.

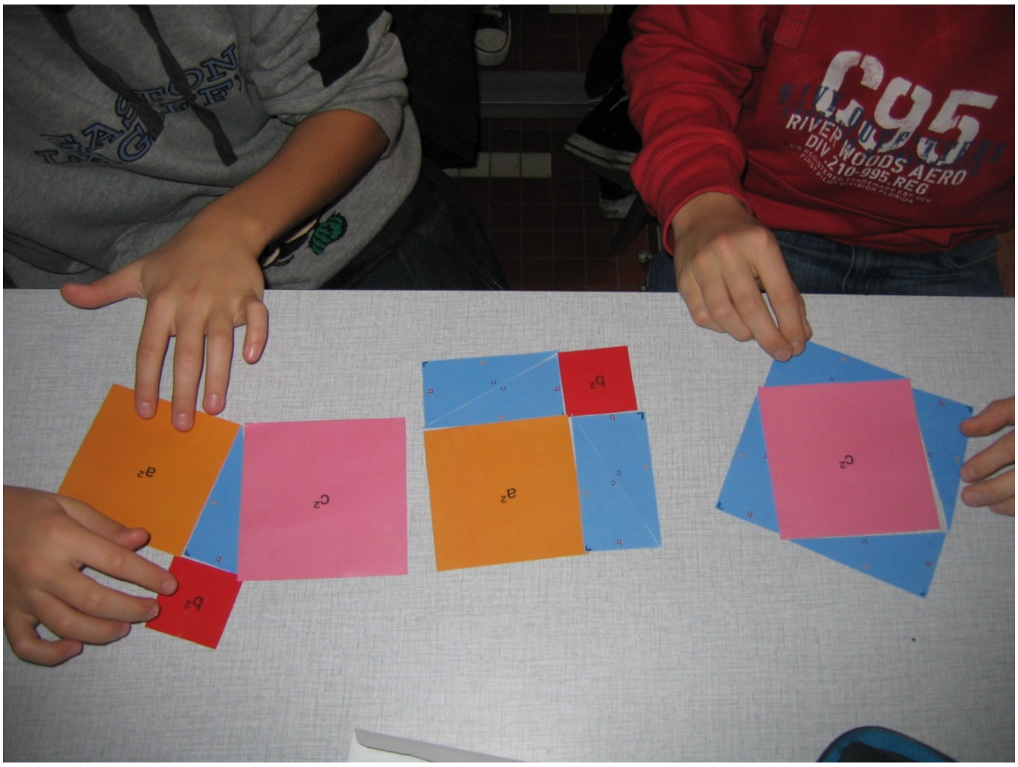


Pièces à découper pour les élèves



En classe:





2.2. Animation informatique.

➔ **Animation de Wendy CONSEQUENCE**

3. Réciproque du théorème de Pythagore et résolution de l'énigme de départ

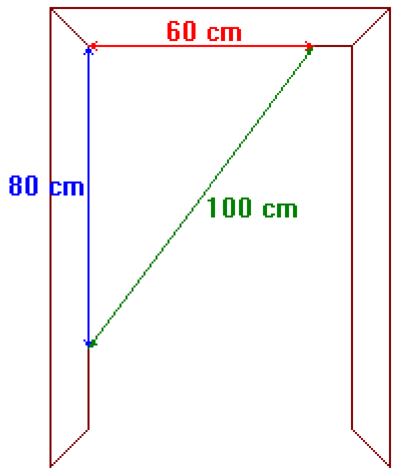
3.1. Activité de départ

Lors de la rénovation d'une maison, un menuisier vérifie si les montants du chambranle sont perpendiculaires entre eux, avant d'y placer une porte.

Ayant oublié son équerre à l'atelier, il procède comme suit: à partir de chaque coin, il trace un trait sur chaque montant, à 60 cm du coin sur l'un et à 80 cm du coin sur l'autre.

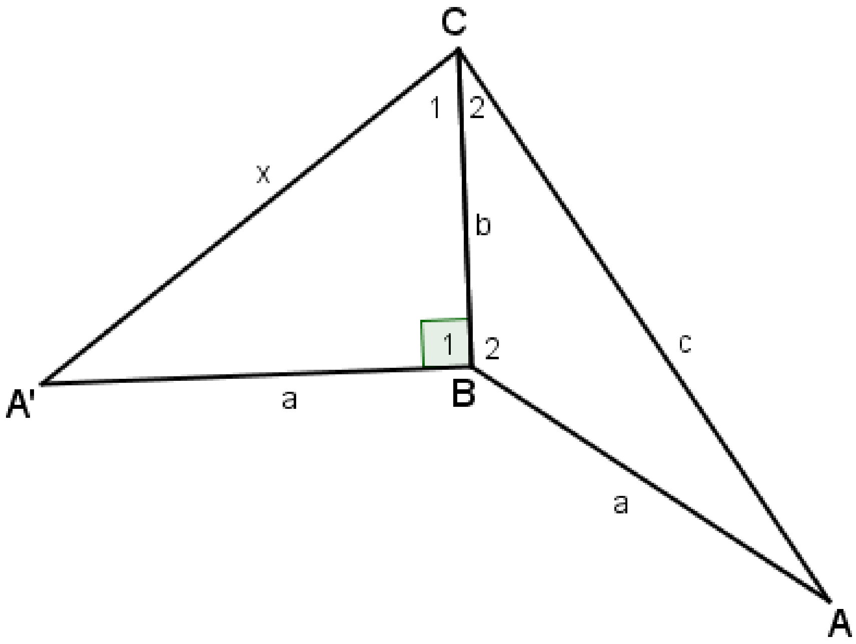
Il mesure ensuite la distance entre les deux traits et affirme que si cette distance est de 100 cm alors, les montants sont perpendiculaires.

Remarque: certains artisans utilisent encore cette technique.



3.2. Si on connait les cas d'isométrie des triangles.

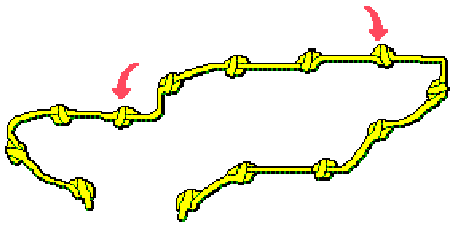
3.3. Si on ne connait pas les cas d'isométrie des triangles.

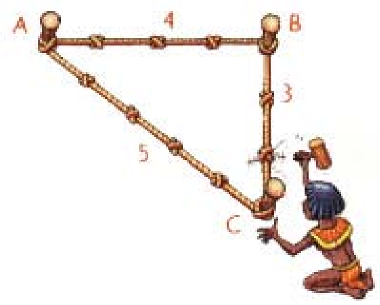


➔ **Voir les démonstrations sur le CD Pythagore.**

3.4. Résolution de l'énigme de départ (corde à 13 nœuds).

Le fermier prend une corde sur laquelle il fait 13 nœuds régulièrement espacés. Il relie le premier et le dernier nœud (au point A). On voit ainsi apparaître 12 intervalles.





Il tend la corde de façon à former un triangle ABC tel que:

- |AB| = 4 intervalles;
- |BC| = 3 intervalles;
- |AC| = 5 intervalles.

Nous obtenons: $3^2 + 4^2 = 5^2$.
Par la réciproque du théorème de Pythagore, le fermier forme bien un triangle rectangle.

Remarque: Le principe est le même pour la corde de 12 mètres.

3.5. Triplets pythagoriciens

1. Définition

Le triplet (a, b, c) est un triplet pythagoricien

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ a, b, c \in \mathbb{N}_0 \\ 2)\ a^2 + b^2 = c^2 \end{cases}$$

Exemples:

(3, 4, 5) car $3^2 + 4^2 = 5^2$, $3 \in \mathbb{N}_0$, $4 \in \mathbb{N}_0$ et $5 \in \mathbb{N}_0$
(5, 12, 13) ; (8, 15, 17) ; (7, 24, 25)

Contre-exemples:

Bien que $1^2 + 1^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$, $(1, 1, \sqrt{2})$ n'est pas un triplet pythagoricien car $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}_0$
(3, 4, 6) n'est pas un triplet pythagoricien car $3^2 + 4^2 \neq 6^2$

2. Détermination de triplets pythagoriciens à partir d'un triplet pythagoricien

> Si (a, b, c) est un triplet pythagoricien,
> alors $\forall n \in \mathbb{N}_0$: (na ; nb ; nc) est aussi un triplet pythagoricien.

Preuve:

Hypothèse

Soit (a, b, c) un triplet pythagoricien ($a, b, c \in \mathbb{N}_0$ et $a^2 + b^2 = c^2$).

Thèse

(na, nb, nc) est un triplet pythagoricien ($na, nb, nc \in \mathbb{N}_0$ et $(na)^2 + (nb)^2 = (nc)^2$).

Démonstration

$\bullet_1$ $a, b, c \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow na, nb, nc \in \mathbb{N}_0$ (car tout nombre naturel multiplié par un second nombre naturel n est encore un nombre naturel)

$\bullet_2$
$$\begin{aligned}(na)^2 + (nb)^2 &= n^2a^2 + n^2b^2\\ &= n^2 \,.\, (a^2 + b^2)\\ &= n^2 \,.\, c^2 \qquad \text{(car } a^2 + b^2 = c^2\text{)}\\ &= (nc)^2\end{aligned}$$

$\bullet_3$ De $\bullet_1$ et $\bullet_2$, il vient que (na, nb, nc) est bel et bien un triplet pythagoricien. □

3. Détermination de tous les triplets pythagoriciens

$\forall m, n \in \mathbb{N}_0$ avec $m > n$,

Si $a = m^2 - n^2$
$b = 2\,mn$
$c = m^2 + n^2$

alors (a, b, c) est un triplet pythagoricien.

Preuve:

Hypothèses

$\forall m, n \in \mathbb{N}_0$ avec $m > n$,
$a = m^2 - n^2 \in \mathbb{N}_0$
$b = 2\,mn \in \mathbb{N}_0$
$c = m^2 + n^2 \in \mathbb{N}_0$

Thèse

(a, b, c) est un triplet pythagoricien ($a, b, c \in \mathbb{N}_0$ et $a^2 + b^2 = c^2$).

Démonstration

•$_1$ $a^2 + b^2 \overset{?}{=} c^2$

$\Leftrightarrow$

$(m^2 - n^2)^2 + (2\,mn)^2 \overset{?}{=} (m^2 + n^2)^2$ (par hypothèse)

$\Leftrightarrow$

$(m^4 - 2\,m^2n^2 + n^4) + 4\,m^2n^2 \overset{?}{=} m^4 + 2\,m^2n^2 + n^4$ (par les produits remarquables)

$\Leftrightarrow$

$m^4 + 2\,m^2n^2 + n^4 = m^4 + 2\,m^2n^2 + n^4$

$\square$

Remarque: on peut montrer que si (a, b, c) est un triplet pythagoricien alors il existe m et $n \in \mathbb{N}_0$ avec $m > n$ tels que $a = m^2 - n^2$, $b = 2\,mn$ et $c = m^2 + n^2$

4. Recherche les triplets pythagoriciens

n	m (m>n)	a = m² - n²	b = 2 mn	c = m² + n²	(a, b, c)
1	2	3	4	5	(3, 4, 5)
2	3	5	12	13	(5, 12, 13)
3	4	7	24	25	(7, 24, 25)
4	5	9	40	41	(9, 40, 41)
5	6	11	60	61	(11, 60, 61)
6	7	13	84	85	(13, 84, 85)
7	8	15	112	113	(15, 112, 113)
8	9	17	144	145	(17, 144, 145)
9	10	19	180	181	(19, 180, 181)
1	4	15	8	17	(15, 8, 17)
1	5	24	10	26	(24, 10, 26)
2	6	32	24	40	(32, 24, 40)
2	9	77	36	85	(77, 36, 85)
2	7	45	28	53	(45, 28, 53)
3	8	55	48	73	(55, 48, 73)
3	7	40	42	58	(40, 42, 58)
3	5	16	30	34	(16, 30, 34)
3	10	91	60	109	(91, 60, 109)
4	6	20	48	52	(20, 48, 52)
4	9	65	72	97	(65, 72, 97)
5	10	75	100	125	(75, 100, 125)
5	12	119	120	169	(119, 120, 169)
5	8	39	80	89	(39, 80, 89)
6	11	85	132	157	(85, 132, 157)
6	8	28	96	100	(28, 96, 100)
6	23	493	276	565	(493, 276, 565)
7	10	51	140	149	(51, 140, 149)
8	14	132	224	260	(132, 224, 260)
9	15	144	270	306	(144, 270, 306)
5	13	144	130	194	(144, 130, 194)
12	17	145	408	433	(145, 408, 433)
13	45	1856	1170	2194	(1856, 1170, 2194)
17	26	387	884	965	(387, 884, 965)
24	46	1540	2208	2692	(1540, 2208, 2692)
8	42	1700	672	1828	(1700, 672, 1828)
4	17	273	136	305	(273, 136, 305)
6	36	1260	432	1332	(1260, 432, 1332)
3	17	280	102	298	(280, 102, 298)
6	19	325	228	397	(325, 228, 397)
8	30	836	480	964	(836, 480, 964)
18	25	301	900	949	(301, 900, 949)
41	52	1023	4264	4385	(1023, 4264, 4385)
32	33	65	2112	2113	(65, 2112, 2113)
15	16	31	480	481	(31, 480, 481)
6	41	1645	492	1717	(1645, 492, 1717)
91	98	1323	17836	17885	(1323, 17836, 17885)
45	54	891	4860	4941	(891, 4860, 4941)
63	78	2115	9828	10053	(2115, 9828, 10053)

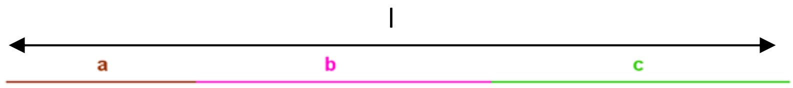
71	103	5568	14626	15650	(5568, 14626, 15650)
42	200	38236	16800	41764	(38236, 16800, 41764)
38	83	5445	6308	8333	(5445, 6308, 8333)
45	52	679	4680	4729	(679, 4680, 4729)
73	100	4671	14600	15329	(4671, 14600, 15329)
74	89	2445	13172	13397	(2445, 13172, 13397)
26	33	413	1716	1765	(413, 1716, 1765)
29	35	384	2030	2066	(384, 2030, 2066)
20	70	4500	2800	5300	(4500, 2800, 5300)
30	32	124	1920	1924	(124, 1920, 1924)
32	33	65	2112	2113	(65, 2112, 2113)
54	67	1573	7236	7405	(1573, 7236, 7405)
21	42	1323	1764	2205	(1323, 1764, 2205)
3	28	775	168	793	(775, 168, 793)
5	36	1271	360	1321	(1271, 360, 1321)
15	53	2584	1590	3034	(2584, 1590, 3034)
43	45	176	3870	3874	(176, 3870, 3874)
45	46	91	4140	4141	(91, 4140, 4141)
62	63	125	7812	7813	(125, 7812, 7813)
13	17	120	442	458	(120, 442, 458)
17	73	5040	2482	5618	(5040, 2482, 5618)
32	54	1892	3456	3940	(1892, 3456, 3940)
43	56	1287	4816	4985	(1287, 4816, 4985)
25	74	4851	3700	6101	(4851, 3700, 6101)
35	45	800	3150	3250	(800, 3150, 3250)
212	235	10281	99640	100169	(10281, 99640, 100169)
276	321	26865	177192	179217	(26865, 177192, 179217)
353	601	236592	424306	485810	(236592, 424306, 485810)
673	732	82895	985272	988753	(82895, 985272, 988753)
127	544	279807	138176	312065	(279807, 138176, 312065)
107	121	3192	25894	26090	(3192, 25894, 26090)
500	582	88724	582000	588724	(88724, 582000, 588724)
341	678	343403	462396	575965	(343403, 462396, 575965)
143	432	166175	123552	207073	(166175, 123552, 207073)
126	165	11349	41580	43101	(11349, 41580, 43101)
455	620	177375	564200	591425	(177375, 564200, 591425)
624	705	107649	879840	886401	(107649, 879840, 886401)
176	234	23780	82368	85732	(23780, 82368, 85732)
824	927	180353	1527696	1538305	(180353, 1527696, 1538305)
125	225	35000	56250	66250	(35000, 56250, 66250)
118	124	1452	29264	29300	(1452, 29264, 29300)
436	437	873	381064	381065	(873, 381064, 381065)
493	519	26312	511734	512410	(26312, 511734, 512410)
521	780	336959	812760	879841	(336959, 812760, 879841)
248	263	7665	130448	130673	(7665, 130448, 130673)
2224	2624	1939200	11671552	11831552	(1939200, 11671552, 11831552)
1080	1264	431296	2730240	2764096	(431296, 2730240, 2764096)

4. Recherche des triangles rectangles isopérimétriques

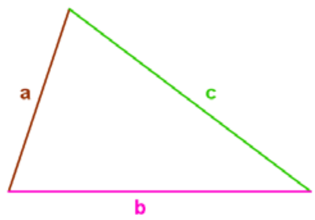
4.1. Triangles isopérimétriques.

A. Énoncé

À l’aide d’une paille de longueur "l", on souhaite construire un triangle de côtés "a", "b", "c".



$a + b + c = l$



De plus, on souhaite déterminer les longueurs possibles des côtés "a", "b", "c".

Remarque: Le problème de la recherche de tous les triangles réalisés à l’aide d’une corde fermée de longueur "l" est identique au problème des triangles obtenus avec une paille de longueur "l".

B. Solution

- *Idée 1:* $a + b + c = l$

  On a donc:

  $$b + c = l - a$$
  $$a + c = l - b$$
  $$a + b = l - c$$

- *Idée 2:* Dans un triangle, la longueur d’un côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés. C’est ce que l’on appelle l’inégalité triangulaire.

  C’est-à-dire:

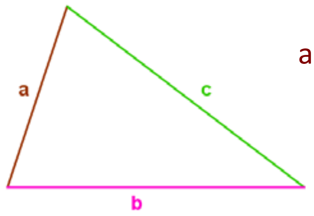
  $$a < b + c$$
  $$b < a + c$$
  $$c < a + b$$

D’où:

$$\begin{matrix} a < b + c \\ b < a + c \\ c < a + b \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a < l - a \\ b < l - b \\ c < l - c \end{matrix} \Rightarrow a < \frac{l}{2} \ ; \ b < \frac{l}{2} \ ; \ c < \frac{l}{2}$$

Donc, chaque côté du triangle doit avoir une longueur inférieure au demi-périmètre $(\frac{l}{2})$.

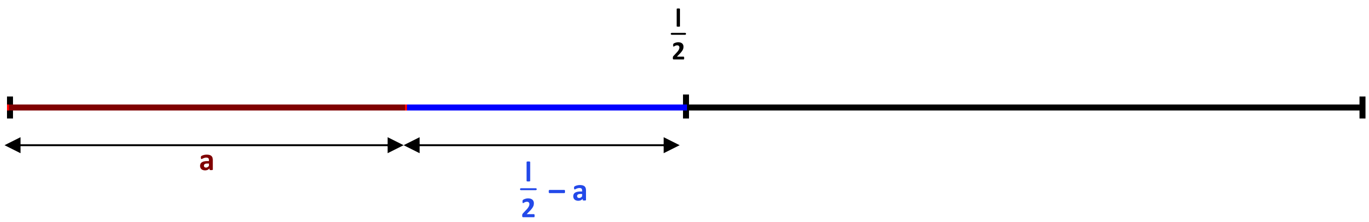
- *Idée 3:* Détermination des longueurs de deux côtés en fonction de la longueur d'un premier côté.



$a + b + c = l$

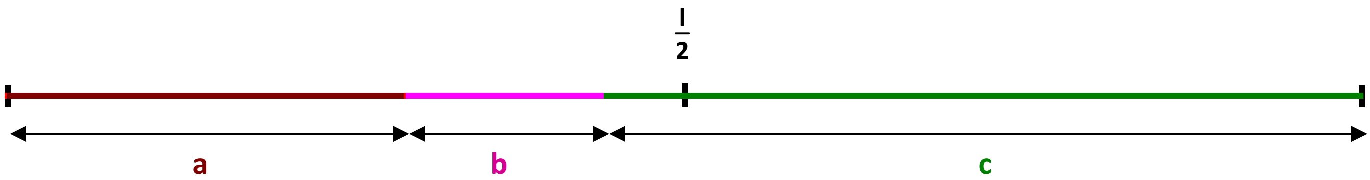
✓ Soit "a" tel que $0 < a < \frac{l}{2}$.

Montrons que "b" est tel que: $\frac{l}{2} - a < b < \frac{l}{2}$



Par dessin:

Par l'absurde, si $b \leq \frac{l}{2} - a$, alors nous arrivons à une contradiction : $c \geq \frac{l}{2}$.



Preuve algébrique:

Par l'absurde, supposons que $b \leq \frac{l}{2} - a$, alors $b + a \leq \frac{l}{2}$.

Or, $b + a = l - c$.

Dès lors, on aurait $l - c \leq \frac{l}{2} \Leftrightarrow l - \frac{l}{2} \leq c \Rightarrow \frac{l}{2} \leq c$

Ce qui est impossible puisque "c" doit être inférieur à $\frac{l}{2}$.

C. Exemple

Soit une paille de 90 cm.

Soit a = 40 cm, alors b est tel que: 5 cm < b < 45 cm et c = 90 cm – (40 cm + b)

A titre d'exemple: a = 40 cm, b = 20 cm, c = 90 cm – (40 cm + 20 cm) = 30 cm

4.2. Triangles rectangles isopérimétriques.

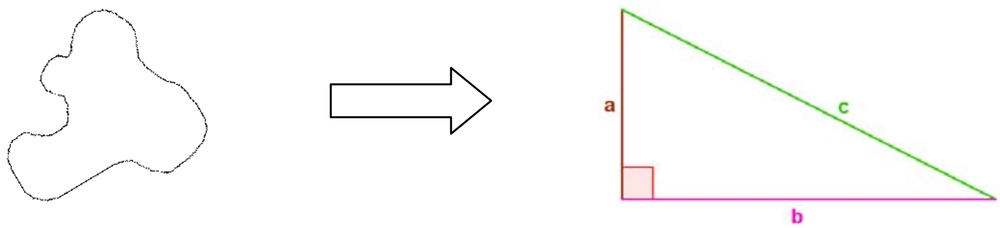
A. Énoncé

Construire, si cela s'avère possible, un triangle rectangle avec une ficelle de longueur "l".

Questions à se poser:

- *Où faut-il repérer les sommets sur la ficelle pour que ceux-ci soient les sommets d'un triangle rectangle?*

- *Peut-on, avec la même ficelle, construire d'autres triangles rectangles?*



Corde de longueur "l" $a + b + c = l$

B. Solution

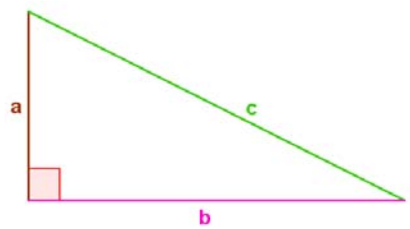
- *Idée 1:* $a + b + c = l$

- *Idée 2:* Par le problème précédent des triangles isopérimétriques, on a:

$$a < \frac{l}{2} \ ; \ b < \frac{l}{2} \ ; \ c < \frac{l}{2}$$

  Donc, chaque côté du triangle doit avoir une longueur inférieure au demi-périmètre ($\frac{l}{2}$)

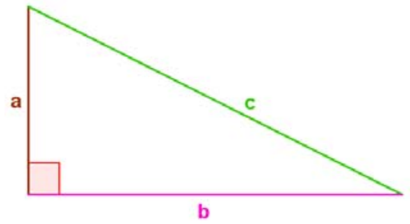
- *Idée 3:* Détermination des longueurs de deux côtés en fonction de la longueur d'un premier côté.



$a + b + c = l$

Soit "a" tel que $0 < a < \frac{l}{2}$, un des côtés de l'angle droit du triangle rectangle. On va déterminer la longueur du deuxième côté de l'angle droit (b) afin que le triangle devienne un triangle rectangle.

Pour que le triangle (a, b, c) soit rectangle, il suffit que:



$a^2 + b^2 = c^2$ (réciproque du théorème de Pythagore)

On sait que a + b + c = l. On en déduit donc que c = l – (a + b).

Changeons la valeur de c dans la formule du théorème de Pythagore.

$$
\begin{aligned}
a^2 + b^2 = c^2 \quad &\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 = (\,l - (a + b))^2 \\
&\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 = l^2 - 2l\,(a + b) + (a + b)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 = l^2 - 2l\,(a + b) + a^2 + 2ab + b^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \cancel{a^2} + \cancel{b^2} = l^2 - 2l\,(a + b) + \cancel{a^2} + 2ab + \cancel{b^2} \\
&\Leftrightarrow \quad 0 = l^2 - 2l\,(a + b) + 2ab \\
&\Leftrightarrow \quad 0 = l^2 - 2la - 2lb + 2ab \\
&\Leftrightarrow \quad 2lb - 2ab = l^2 - 2la \\
&\Leftrightarrow \quad b(2l - 2a) = l(l - 2a) \\
&\Leftrightarrow \quad b = \frac{l \cdot (l - 2a)}{2(l - a)}
\end{aligned}
$$

Dès lors, pour un "a" choisi ($\mathbf{0 < a < \frac{l}{2}}$) , nous avons que:

$$\boxed{\mathbf{b = \frac{l \cdot (l - 2a)}{2(l - a)} \quad et \quad c = l - (a + b)}}$$

C. Exemple

Soit l = 16 cm, et a = 5 cm.

$$b = \frac{16 \cdot (16 - 10)}{2(16 - 5)} = \frac{48}{11} = 4{,}36363636\ldots \text{ cm}$$

$$c = 16 \text{ cm} - (5 \text{ cm} + \frac{48}{11} \text{ cm}) = \frac{73}{11} \text{ cm} = 6{,}63636363\ldots \text{ cm}$$

5. Figures isopérimétriques

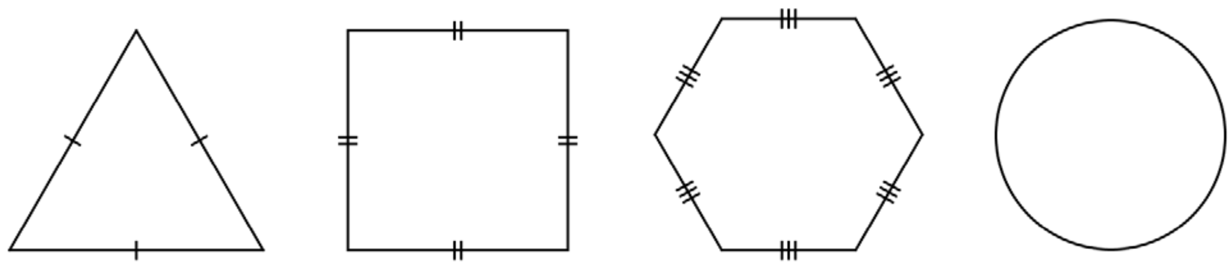
A. Énoncé

Des surfaces isopérimétriques sont des surfaces de même périmètre.

B. Mise en situation

Un éleveur doit construire un enclos à choisir, pour des raisons techniques, parmi un triangle équilatéral, un carré, un hexagone régulier et un cercle tous de même périmètre P.

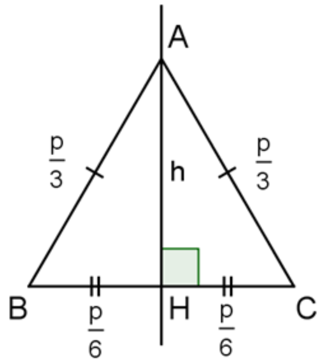
Il se demande si ces quatre enclos ont la même aire. Si oui, justifiez, si non précisez l'enclos qui a la plus grande étendue.



C. Solution

5.1. Trouvons l'aire de chacune de ces figures

5.1.1. Triangle équilatéral de côté $\frac{p}{3}$:



a) *Formule de l'aire d'un triangle*

$$S_{\text{triangle}} = \frac{c \cdot h}{2}$$

Dans cette formule, nous ignorons la longueur de la hauteur h.

b) *Recherche de la hauteur du triangle ABC*

Le triangle AHC est un triangle rectangle en H.

Par Pythagore, $h^2 = \left(\frac{p}{3}\right)^2 - \left(\frac{p}{6}\right)^2 = \frac{p^2}{9} - \frac{p^2}{36} = \frac{3p^2}{36}$

Comme h est une longueur de côté, la valeur de h sera toujours positive.

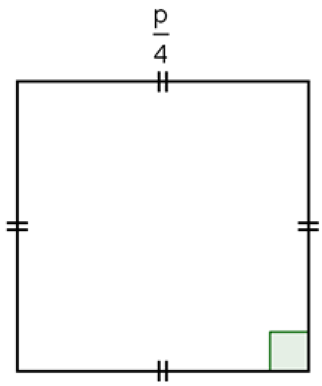
$$h = \sqrt{\frac{3p^2}{36}} = \sqrt{\frac{p^2}{12}} = \frac{p}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{p\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{p\sqrt{3}}{6}$$

c) *Recherche de l'aire du triangle ABC*

$$S_{\text{triangle}} = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{\frac{p}{3} \cdot \frac{p\sqrt{3}}{6}}{2} = \frac{\frac{p^2\sqrt{3}}{18}}{2} = \frac{p^2\sqrt{3}}{18 \cdot 2} = \frac{\sqrt{3} \cdot p^2}{36}$$

$$S_{\text{triangle}} = \frac{\sqrt{3} \cdot p^2}{36}$$

5.1.2. Carré de côté $\frac{p}{4}$:



a) Formule de l'aire d'un carré

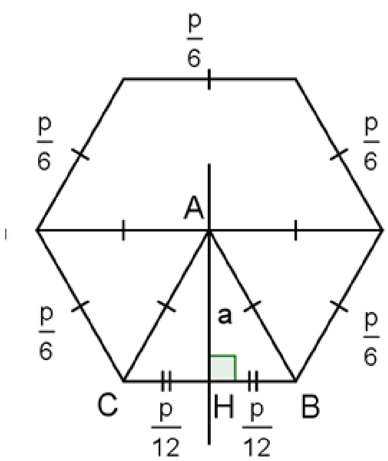
$$\boxed{S_{\text{carré}} = c^2}$$

b) Recherche de l'aire du carré

$$S_{\text{carré}} = c^2 = \left(\frac{p}{4}\right)^2 = \frac{p^2}{16}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{\text{carré}} = \frac{p^2}{16}}$$

5.1.3. Hexagone régulier de côté $\frac{p}{6}$:



a) Formule de l'aire d'un hexagone régulier

$$\boxed{S_{\text{H.R.}} = \frac{p \cdot \text{apothème}}{2}}$$

Dans cette formule, nous ignorons la longueur de l'apothème a.

b) Recherche de l'apothème a de cet hexagone

Le triangle AHC est rectangle en H.

Par Pythagore, $\left(\frac{p}{6}\right)^2 = \left(\frac{p}{12}\right)^2 + a^2$

$$\Rightarrow a^2 = \left(\frac{p}{6}\right)^2 - \left(\frac{p}{12}\right)^2 = \frac{p^2}{36} - \frac{p^2}{144} = \frac{4p^2 - p^2}{144} = \frac{3p^2}{144}$$

Comme a est une longueur de côté, la valeur de a sera toujours positive.

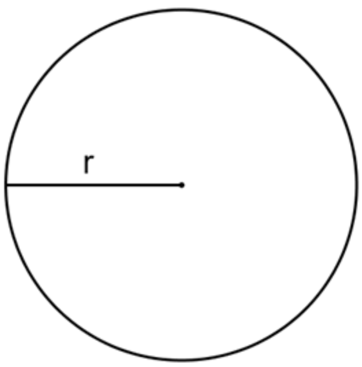
$$\Rightarrow a = \frac{\sqrt{3} \cdot p}{12}$$

c) Recherche de l'aire de l'hexagone régulier

$$S_{H.R.} = \frac{p \cdot \text{apothème}}{2} = \frac{p \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot p}{12}}{2} = \frac{p^2 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 12} = \frac{\sqrt{3} \cdot p^2}{24}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{H.R.} = \frac{\sqrt{3} \cdot p^2}{24}}$$

5.1.4. Cercle de rayon r:



a) Formule de l'aire d'un cercle

$$\boxed{S_{cercle} = \pi \cdot r^2}$$

Dans cette formule, nous ignorons la longueur du rayon r.

b) Recherche du rayon r de ce cercle

Le périmètre du cercle est donné par la formule $P = 2 \cdot \pi \cdot r$

$$\Rightarrow \; r = \frac{p}{2 \cdot \pi}$$

c) Recherche de l'aire de ce cercle

$$S_{\text{cercle}} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{p}{2 \cdot \pi}\right)^2 = \pi \cdot \frac{p^2}{4 \cdot \pi^2} = \frac{p^2}{4 \cdot \pi}$$

$$\Rightarrow \; \boxed{S_{\text{cercle}} = \frac{p^2}{4 \cdot \pi}}$$

5.2. Classons les aires des figures de la plus petite aire à la plus grande

Figures	Aires	
Triangle équilatéral	$S_{\text{triangle}} = \frac{\sqrt{3} \cdot p^2}{36} = \frac{\sqrt{3}}{36} \cdot p^2 \approx 0{,}0481 \cdot p^2$	100 %
Carré	$S_{\text{carré}} = \frac{p^2}{16} = \frac{1}{16} \cdot p^2 \approx 0{,}0625 \cdot p^2$	129,9 %
Hexagone régulier	$S_{\text{H.R.}} = \frac{\sqrt{3} \cdot p^2}{24} = \frac{\sqrt{3}}{24} \cdot p^2 \approx 0{,}0722 \cdot p^2$	150,1 %
Cercle	$S_{\text{cercle}} = \frac{p^2}{4 \cdot \pi} = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot p^2 \approx 0{,}0796 \cdot p^2$	165,4 %

Aire

croissante

5.3. Conclusion

L'éleveur a intérêt à réaliser un enclos circulaire pour disposer de la plus grande étendue. (65% de surface de plus par rapport à la surface du triangle équilatéral).

Remarque:

On peut démontrer que:

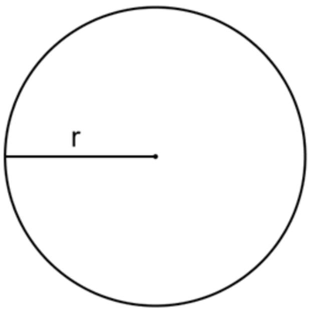
- La plus petite "surface" est un segment de droite de longueur $\frac{p}{2}$, son aire vaut 0 m².
- Parmi tous les n-gones isopérimétriques ("n" fixé), le n-gone régulier est celui qui possède la plus grande aire.
- Parmi les n-gones réguliers isopérimétriques ("n" non fixé), celui qui possède le plus de côtés possède la plus grande aire.
- La plus grande surface est un disque de périmètre P dont l'aire vaut $\frac{p^2}{4 \cdot \pi}$.

Pourquoi lors de l'étape du soir de la conquête de l'Ouest, tous les chariots étaient-ils disposés de manière circulaire?

Les chariots étaient disposés de manière circulaire car de cette façon ils occupaient plus de surface. Ceci permettait d'avoir plus d'espace disponible afin que les enfants, les adultes, les chevaux… puissent circuler facilement.

5.4. Comparons maintenant la surface d'un cercle à la surface d'un polygone régulier à n côtés de même périmètre

5.4.1. Cercle de rayon r:



a) Formule de l'aire d'un cercle

$$\boxed{S_{cercle} = \pi \cdot r^2}$$

Dans cette formule, nous ignorons la longueur du rayon r.

b) Recherche du rayon r de ce cercle

Le périmètre du cercle est donné par la formule $P = 2 \cdot \pi \cdot r$

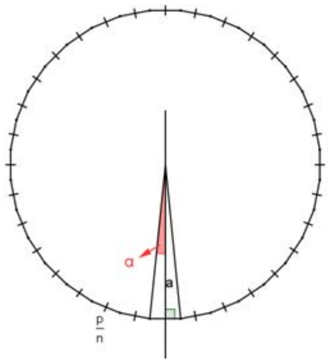
$$\Rightarrow r = \frac{p}{2 \cdot \pi}$$

c) Recherche de l'aire de ce cercle

$$S_{cercle} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{p}{2 \cdot \pi}\right)^2 = \pi \cdot \frac{p^2}{4 \cdot \pi^2} = \frac{p^2}{4 \cdot \pi}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{cercle} = \frac{p^2}{4 \cdot \pi}}$$

5.4.2. Polygone régulier à n côtés(n-gone) de côté $\frac{p}{n}$:



a) Formule de l'aire d'un n-gone régulier

$$\boxed{S_{n\text{-}gone} = \frac{p \cdot \text{apothème}}{2}}$$

Dans cette formule, nous ignorons la longueur de l'apothème a.

b) Recherche de l'apothème a

- Par la trigonométrie, nous savons que $\tan\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$ (*)

- Dans un polygone régulier, un angle au centre vaut $\frac{360°}{n}$. Dans notre cas, l'angle qui nous intéresse vaut la moitié de $\frac{360°}{n}$ car la hauteur du triangle isocèle est aussi bissectrice de l'angle. $\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{360°}{n} = \frac{180°}{n}$ (**)

De (*) et (**): $\tan\left(\frac{180°}{n}\right) = \frac{\frac{c}{2}}{a}$

$$\Rightarrow a = \frac{\frac{c}{2}}{\tan\left(\frac{180°}{n}\right)} = \frac{c}{2\tan\left(\frac{180°}{n}\right)}$$

c) Recherche de l'aire de ce n-gone

$$S_{\text{n-gone}} = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{p \cdot \dfrac{c}{2\tan\left(\dfrac{180°}{n}\right)}}{2} = \frac{p \cdot c}{4\tan\left(\dfrac{180°}{n}\right)}$$

Or $p_{\text{n-gone}} = n \cdot c \quad \Rightarrow \quad c = \dfrac{p}{n}$

$$S_{\text{n-gone}} = \frac{p \cdot \dfrac{p}{n}}{4\tan\left(\dfrac{180°}{n}\right)} = \frac{p^2}{4 \cdot n \cdot \tan\left(\dfrac{180°}{n}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{S_{\text{n-gone}} = \frac{p^2}{4 \cdot n \cdot \tan\left(\dfrac{180°}{n}\right)}}$$

Pour un même périmètre, la surface d'un polygone à n côtés est plus petite que la surface d'un cercle.

$$S_{\text{n-gone}} = \frac{p^2}{4 \cdot n \cdot \tan\left(\dfrac{180°}{n}\right)} < S_{\text{cercle}} = \frac{p^2}{4 \cdot \pi}$$

$$\text{car} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}, \quad \frac{1}{4 \cdot n \cdot \tan\left(\dfrac{180°}{n}\right)} < \frac{1}{4 \cdot \pi} \approx 0{,}0\,7957747$$

5.5. Examinons les valeurs de $\frac{1}{4 \cdot n \cdot \tan\left(\frac{180°}{n}\right)}$ et comparons-les à la valeur de $\frac{1}{4 \cdot \pi}$ $(\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\})$

Lorsque n vaut:	$\frac{1}{4 \cdot n \cdot \tan\left(\frac{180°}{n}\right)}$ vaut:		$\frac{1}{4 \cdot \pi}$ vaut toujours:
3	0,048112522	<	0,079577471
4	0,0625	<	0,079577471
5	0,068819096	<	0,079577471
6	0,072168784	<	0,079577471
7	0,074161478	<	0,079577471
8	0,075444174	<	0,079577471
9	0,076318817	<	0,079577471
10	0,076942088	<	0,079577471
11	0,077401983	<	0,079577471
12	0,077751058	<	0,079577471
13	0,078022298	<	0,079577471
14	0,078237255	<	0,079577471
15	0,078410502	<	0,079577471
16	0,07855218	<	0,079577471
17	0,078669522	<	0,079577471
18	0,078767803	<	0,079577471
19	0,07885094	<	0,079577471
20	0,078921894	<	0,079577471
30	0,07928637	<	0,079577471
50	0,079472724	<	0,079577471
100	0,07955129	<	0,079577471
1000	0,07957721	<	0,079577471
10000	0,079577469	<	0,079577471
100000	0,079577471	<	0,079577471
...			...

$\Rightarrow$ $\frac{1}{4 \cdot n \cdot \tan\left(\frac{180°}{n}\right)}$ est toujours inférieur à $\frac{1}{4 \cdot \pi}$ $(\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$.

Remarque: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{4 \cdot n \cdot \tan\left(\frac{180°}{n}\right)} = \frac{1}{4 \cdot \pi}$