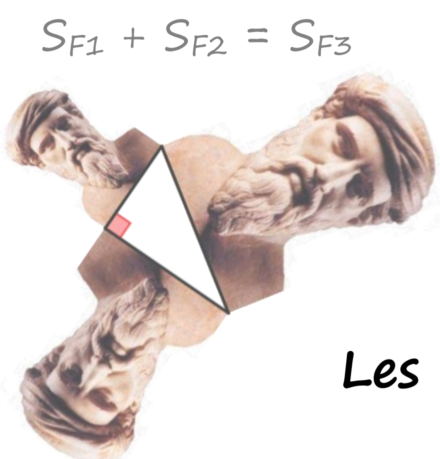
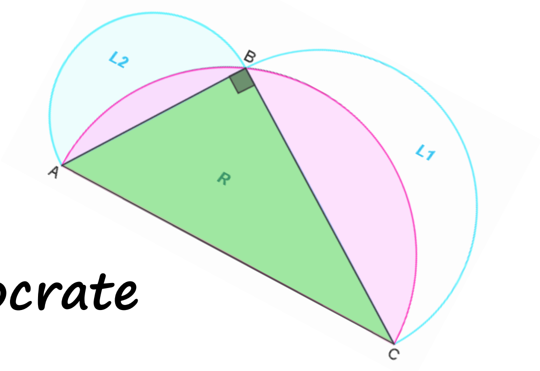
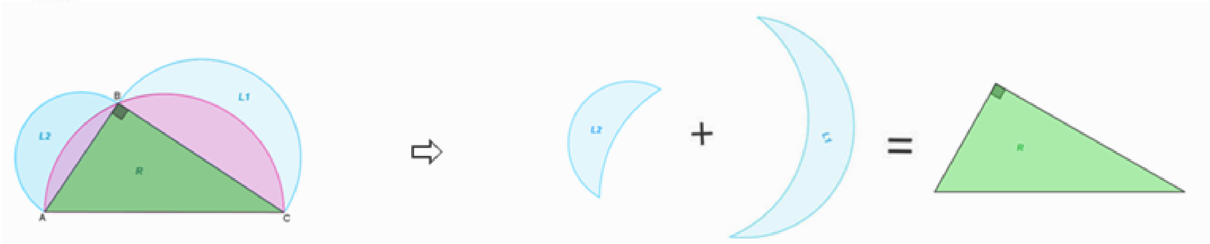
Cellule de Géométrie

Mathématiques élémentaires





Les lunules d'Hippocrate



L2 + L1 = R

Cellule de Géométrie – Catégorie pédagogique de la HEH

DEMAL Michel — demal.michel@skynet.be
DRAMAIX Jérémy — jeremy.dramaix@gmail.com
HIGNY Samuel — higny_samuel@hotmail.com
LAFOT Cindy — lafot.cindy@hotmail.com
MALAGUARNERA Angelo — angelo.malaguarnera@gmail.com

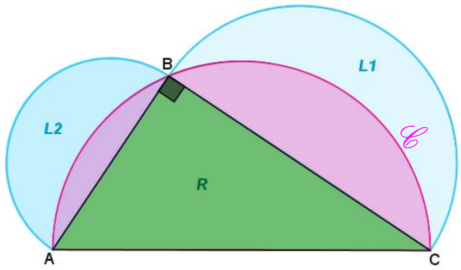
Avec la collaboration de

HUART D.

Lunules d'Hippocrate

1. Qu'est-ce qu'une lunule (définition intuitive)?

Une lunule est une portion de surface délimitée par deux cercles non concentriques de rayons différents, formant un croissant de lune en forme de ménisque.



L1 = lunule 1

L2 = lunule 2

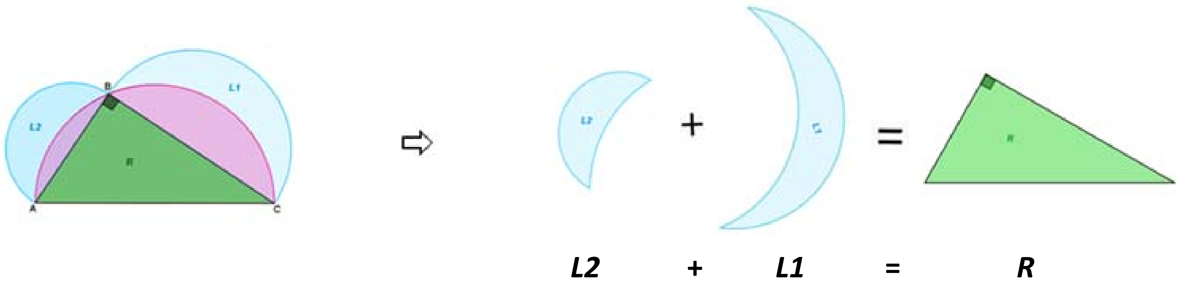
2. Énoncé du théorème

Soit le triangle ABC rectangle en B et $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit à ABC (de diamètre [AC]).

La lunule L_{BC} (L1) est la figure formée par le demi-disque de diamètre [BC] extérieur au triangle ABC, auquel on enlève son intersection avec le disque délimité par $\mathscr{C}$.

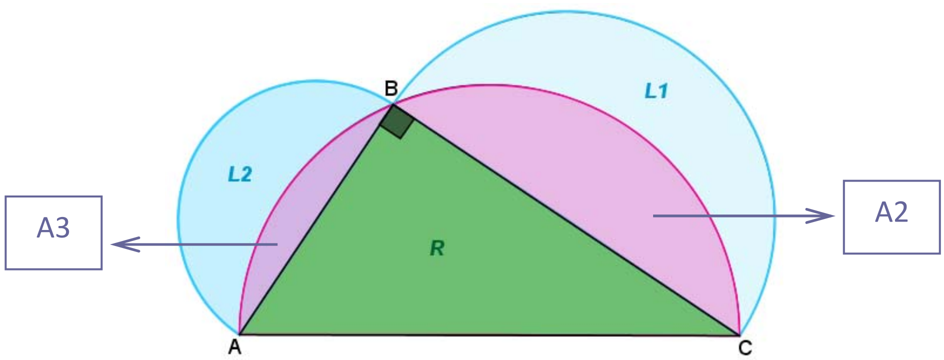
La lunule L_{BA} (L2) est la figure formée par le demi-disque de diamètre [BA] extérieur au triangle ABC, auquel on enlève son intersection avec le disque délimité par $\mathscr{C}$.

Alors la somme des aires de L_{BC} et de L_{BA} (en bleu clair sur la figure) est égale à l'aire du triangle ABC.



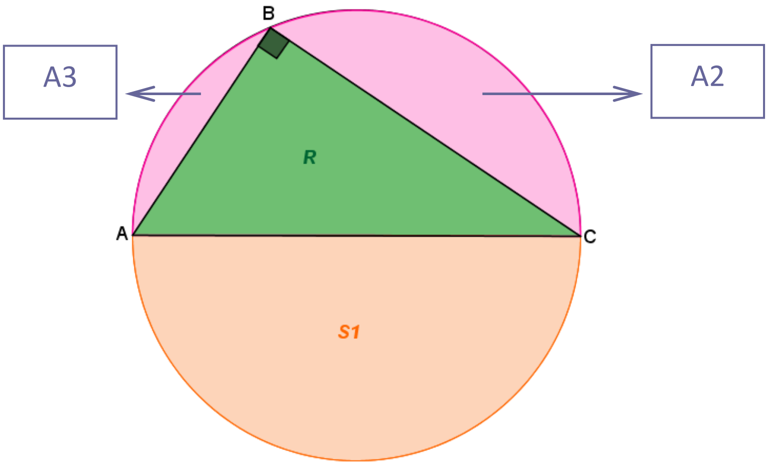
3. Démonstrations

3.1. Démonstration géométrique



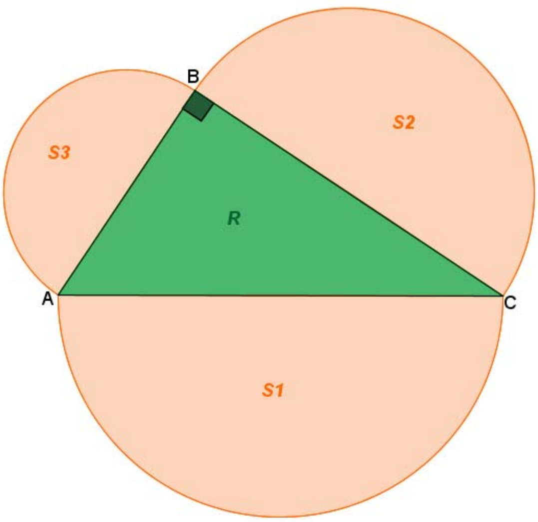
Prouvons que: R = L1 + L2

- Tout triangle rectangle est inscrit dans un demi-cercle.



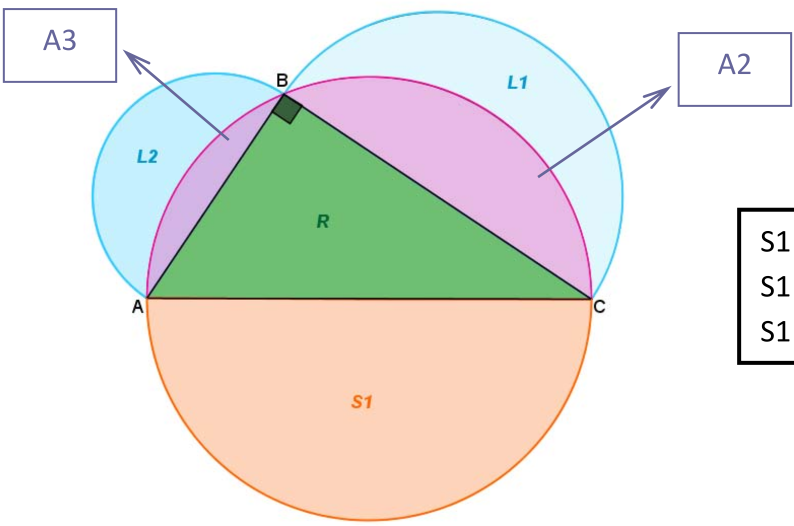
S1 = A2+ A3 + R

- Par le théorème de Pythagore, nous savons que:



S1 = S2 + S3

- Appliquons cela dans notre cas précis:



S1 = S2 + S3
S1 = (L1 + A2) + (L2 + A3)
S1 = L1 + A2 + L2 + A3

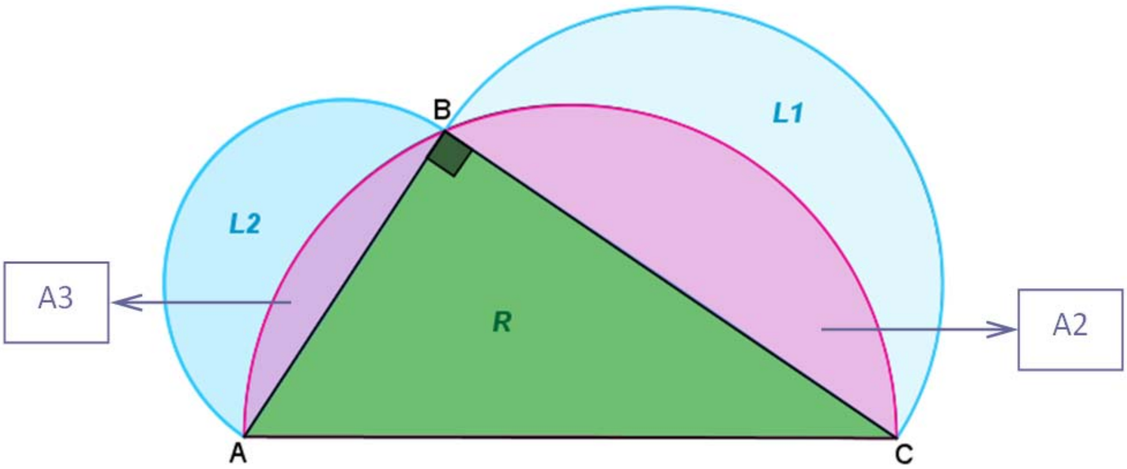
- Égalisons les deux expressions obtenues:

$$\begin{cases} S1 = A2 + A3 + R \\ S1 = L1 + A2 + L2 + A3 \end{cases}$$

Donc:

A2 + A3 + R = L1 + A2 + L2 + A3
R = L1 + L2

3.2. Démonstration algébrique



Hypothèse

Triangle ABC rectangle.
Demi-cercle circonscrit au triangle de diamètre [AC].
Deux demi-cercles; un de diamètre [BC] et l'autre de diamètre [AB].

Thèse

L'aire du triangle ABC est égale à la somme des aires des lunules L_{BC} *et* L_{BA}.

Démonstration

- Les deux parties roses correspondent au demi-cercle de diamètre [AC] moins le triangle ABC.

$$\text{Aire}_{\text{ parties roses}} = \text{Aire}_{\text{ demi-cercle de diamètre [AC]}} - \text{Aire}_{\text{ triangle rectangle ABC}}$$

$$\text{Aire}_{\text{ roses}} = \frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{|AC|}{2}\right)^2 - \frac{|BC|\cdot|AB|}{2}$$

- Les deux lunules sont les deux demi-cercles de diamètre [AB] et [BC] moins les parties roses

$$\text{Aire}_{\text{ lunules}} = \text{Aire}_{\text{ demi-cercle de diamètre [AB]}} + \text{Aire}_{\text{ demi-cercle de diamètre [BC]}} - \text{Aire}_{\text{ parties roses}}$$

$$\text{Aire}_{\text{ lunules}} = \frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{|BC|}{2}\right)^2 - \frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{|AC|}{2}\right)^2 + \frac{|BC|\cdot|AB|}{2}$$

Aire $_{\text{lunules}} \stackrel{?}{=}$ Aire $_{\text{triangle rectangle ABC}}$

$$\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2+\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{|BC|}{2}\right)^2-\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{|AC|}{2}\right)^2+\frac{|BC|\cdot|AB|}{2}\stackrel{?}{=}\frac{|BC|\cdot|AB|}{2}$$

On retire $\frac{|BC|\cdot|AB|}{2}$ dans les deux membres.

$$\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2+\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{|BC|}{2}\right)^2-\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{|AC|}{2}\right)^2\stackrel{?}{=}0$$

On ajoute $\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{|AC|}{2}\right)^2$ dans les deux membres.

$$\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2+\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{|BC|}{2}\right)^2\stackrel{?}{=}\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{|AC|}{2}\right)^2$$

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{|AB|^2}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{|BC|^2}{4}\stackrel{?}{=}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{|AC|^2}{4}$$

On met en évidence $\frac{\pi}{8}$ dans les deux membres.

$$\frac{\pi}{8}\cdot(|AB|^2+|BC|^2)\stackrel{?}{=}\frac{\pi}{8}\cdot|AC|^2$$

On multiplie par $\frac{8}{\pi}$ dans les deux membres.

$$|AB|^2+|BC|^2\stackrel{?}{=}|AC|^2$$

Cette égalité est correcte car, par Pythagore, $|AB|^2+|BC|^2=|AC|^2$

<u>Conclusion</u>

La somme des aires des lunules est égale à l’aire du triangle.

4. Biographie d'Hippocrate de Chios

Hippocrate, né à Chios vers -470, actif à Athènes vers -430, mort vers -410, est un mathématicien grec. On le trouve parfois sous le nom d'**Ibicrate le Géomètre**, pour ne pas le confondre avec Hippocrate, le père de la médecine, né à Cos.

Il découvre les mathématiques et la géométrie fortuitement. Alors qu'il était marchand, son bateau s'est fait attaquer par des pirates sur la mer Égée. Il débarque à Athènes en 430 av. J.-C. pour engager des poursuites contre ses assaillants, se passionne pour cette ville et se met à étudier avec un sophiste du nom de Sophrotatos qui l'amena à réfléchir sur la quadrature du cercle.

Dans le document qu’il rédige sur la *quadrature des lunules* il est un des premiers à avoir introduit une méthode d’intégration pour résoudre de tels problèmes. Il établit à ce sujet quelques théorèmes comme par exemple: pour n'importe quel cercle, le rapport des circonférences est égal au rapport des diamètres.

Il aurait été le premier à écrire une synthèse des connaissances géométriques de son époque, travail sans doute repris par Euclide dans les livres I et II des *Éléments*.

Aristote le considérait comme un grand géomètre, mais trouvait qu'au quotidien il paraissait plutôt "niais et stupide".

On lui attribue la paternité du *raisonnement par l'absurde,* une des bases de la logique qui permet de démontrer la vérité d'une proposition en prouvant que son contraire est absurde. Hippocrate de Chios écrivit le premier ouvrage d'éléments de géométrie connu, un siècle avant Euclide. Nous n'avons pas l'ouvrage dans son intégralité. Les *éléments* d'Hippocrate nous sont connus par les références faites dans des ouvrages de commentateurs plus récents (Proclus et Simplicius de Cilicie).

Découvertes à mettre à son actif:

- il détermina l'aire de lunules;
- il détermina que le rapport des surfaces de deux cercles est le même que celui des carrés de leurs rayons ;
- il étudia le problème de la duplication du cube (construire un cube de volume double).
- Alfred Jarry[1] lui attribue également, sous le nom d'Ibicrate, l'origine de la Pataphysique.

(Source – Wikipédia)

[1] **Alfred Jarry**, né à Laval (Mayenne) le 8 septembre 1873 et mort à Paris le 1er novembre 1907, est un poète, romancier et dramaturge français.