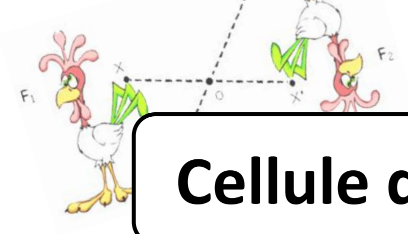
Centre de Recherche
HAUTE ECOLE
de la Communauté française
EN HAINAUT

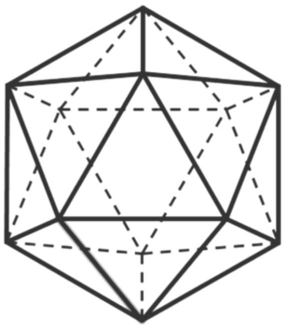
ECOLE NORMALE iSEP

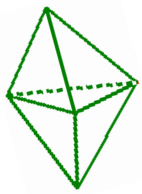


Cellule de Géométrie

Mathématiques élémentaires

$F + S - A = 2$

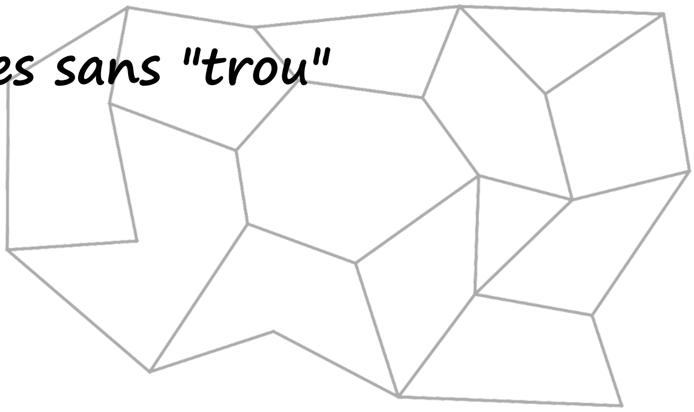


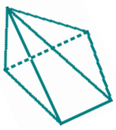


Relation d'Euler

et

les polyèdres sans "trou"





$F + S - A = 1$

Cellule de Géométrie – Catégorie pédagogique de la HEH

DEMAL Michel
demal.michel@skynet.be

DRAMAIX Jérémy
jeremy.dramaix@gmail.com

HIGNY Samuel
higny_samuel@hotmail.com

LAFOT Cindy
lafot.cindy@hotmail.com

MALAGUARNERA Angelo
angelo.malaguarnera@gmail.com

Avec la collaboration de

ADABBO F. - PILAETE C.

Relation d'Euler et les polyèdres sans "trou"

Plan

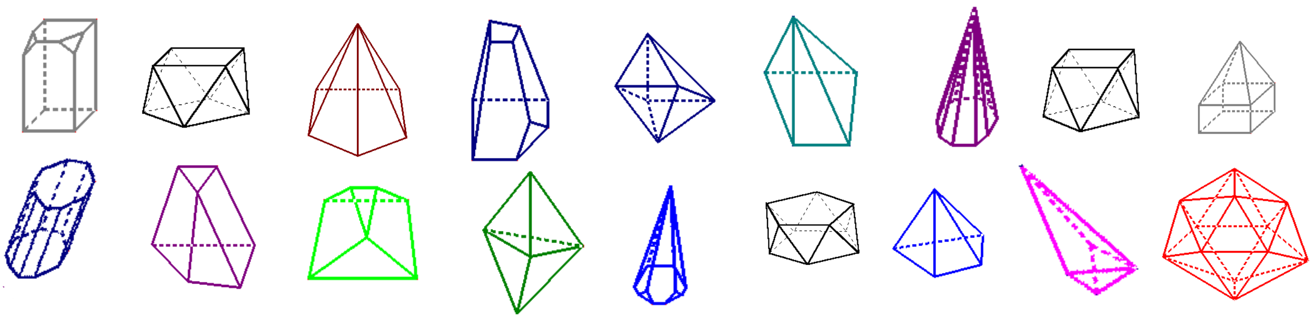
I. DECOUVERTE ET DEMONSTRATION DE LA RELATION D'EULER

1. Relation d'Euler

Dans tout polyèdre convexe, il existe une relation liant le nombre de faces, le nombre de sommets et le nombre d'arêtes.

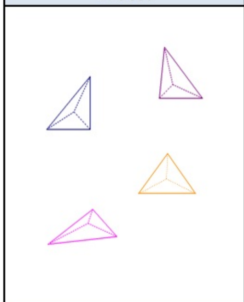
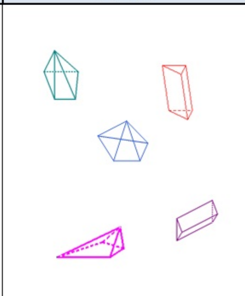
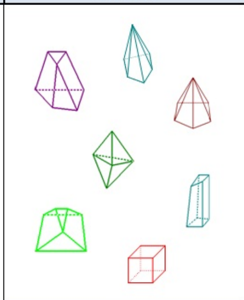
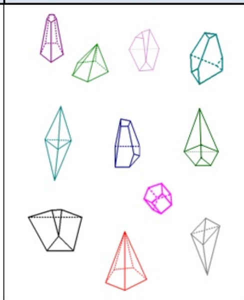
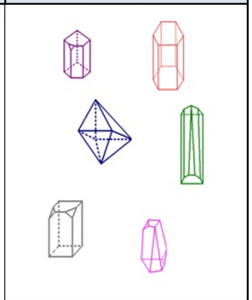
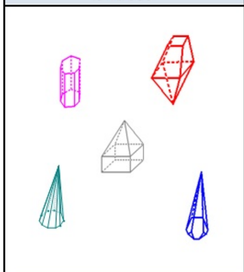
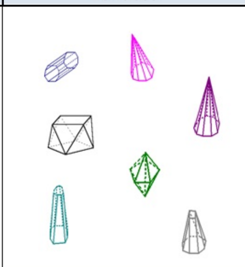
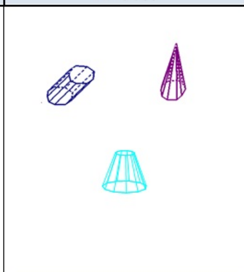
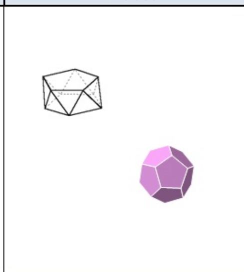
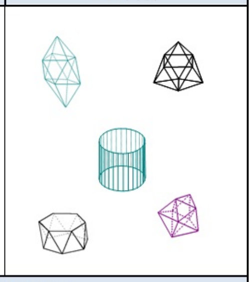
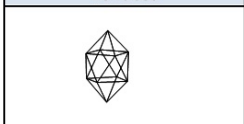
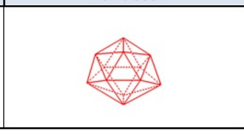
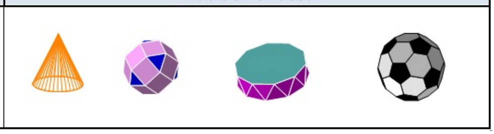
La légende veut que ce soit un peu par hasard qu'Euler découvrit l'existence d'une relation liant le nombre de faces (F), de sommets (S) et d'arêtes (A) dans les polyèdres convexes.

✓ **Les polyèdres convexes**



Euler recherchait des classements pour les polyèdres convexes et, inspiré par le classement des polygones en fonction du nombre de côtés, pensa à les classer, en fonction du nombre de faces.

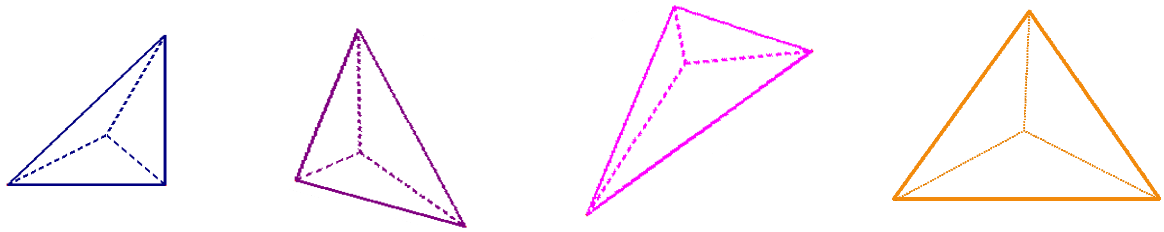
✓ **Classement en fonction du nombre de faces**

4 faces	5 faces	6 faces	7 faces	8 faces
				
9 faces	10 faces	11 faces	12 faces	14 faces
				
16 faces	18 faces	20 faces	Plus de 20 faces	
				

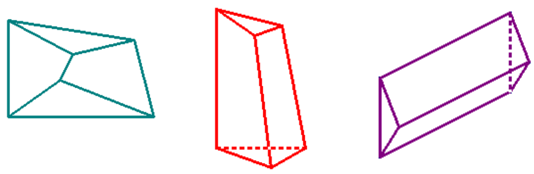
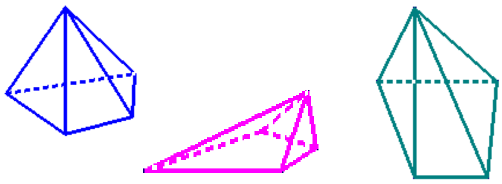
Par la suite, pour distinguer les polyèdres convexes ayant le *même nombre de faces*, il proposa dans un premier temps de les ranger en polyèdres du "type prisme", du "type pyramide" et d'associer tous les autres dans une troisième catégorie.

Les polyèdres à quatre faces étaient tous du "type pyramide". Les polyèdres à cinq faces se partitionnaient en les types "prismes" et "pyramides".

- Les polyèdres à **4 faces**

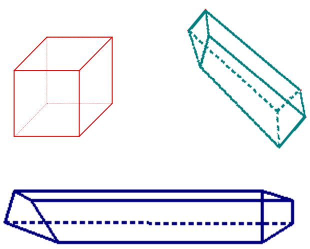
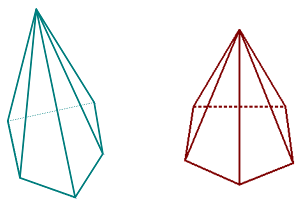
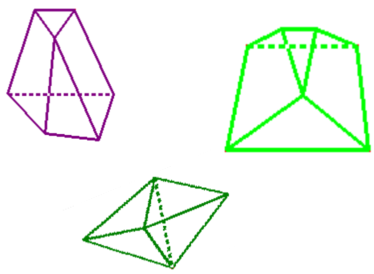


- Les polyèdres à **5 faces**

TYPE PRISME	TYPE PYRAMIDE
	

À partir de six faces, les sous-classements faisaient apparaître les trois types de catégories.

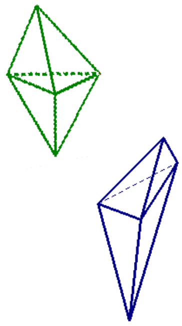
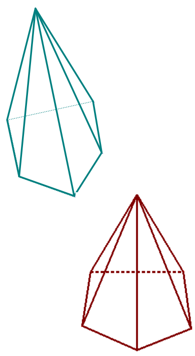
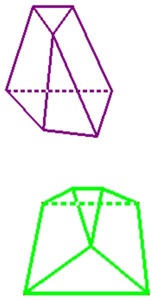
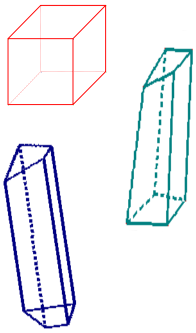
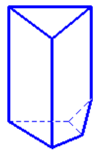
- Les polyèdres à **6 faces**

TYPE PRISME	TYPE PYRAMIDE	AUTRES
		

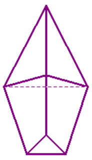
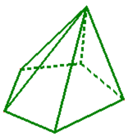
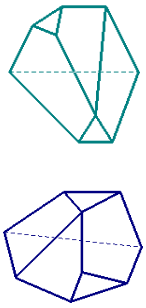
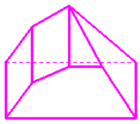
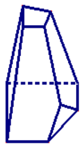
Estimant que les polyèdres de la troisième catégorie ne se ressemblaient vraiment pas tous entre-eux, il rechercha un deuxième critère pour classer les polyèdres ayant le même nombre de faces. Ayant vite observé que les polyèdres ayant le même nombre de faces ne possédaient pas tous le même nombre de sommets, il suggéra de les distinguer par leur nombre de sommets.

Il obtient comme nouveaux classements:

- Les hexaèdres (polyèdres à 6 faces)

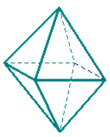
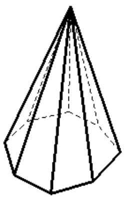
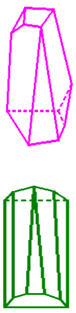
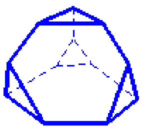
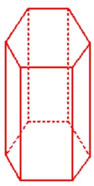
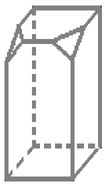
5 SOMMETS	**6 SOMMETS**	**7 SOMMETS**	**8 SOMMETS**
			 

- Les heptaèdres (polyèdres à 7 faces)

7 SOMMETS	**9 SOMMETS**	**10 SOMMETS**
 	 	  

Remarque: On peut montrer qu'il existe des heptaèdres (34 types) ayant 6 - 7 - 8 - 9 et 10 sommets.

- Les octaèdres (polyèdres à 8 faces)

6 SOMMETS	**8 SOMMETS**	**11 SOMMETS**	**12 SOMMETS**
			   

Remarque: On peut montrer qu'il existe des octaèdres (257 types) ayant 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 11 et 12 sommets.

Pour ces nouveaux classements, il trouva également que certains polyèdres qui possédaient le même nombre de faces et le même nombre de sommets n'étaient pas semblables. Ce sont les polyèdres à huit sommets pour les hexaèdres, les polyèdres à dix sommets pour les heptaèdres et les polyèdres à douze sommets pour les octaèdres.

Assez naturellement, Euler pensa au nombre d'arêtes comme troisième critère pour départager les polyèdres possédant le même nombre de faces et le même nombre de sommets.

Pour les polyèdres à six faces et à huit sommets, il fut quelque peu surpris lorsqu'il constata que leur nombre d'arêtes était le même (six faces, huit sommets, douze arêtes).

Ne pouvant les distinguer et croyant à une anomalie des six faces, il imagina utiliser le critère "arête" pour sous-classer les polyèdres à sept faces et dix sommets. Là aussi, la même caractéristique apparaissait: ils avaient tous le même nombre d'arêtes (sept faces, dix sommets, quinze arêtes).

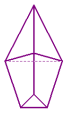
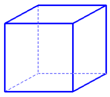
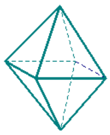
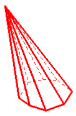
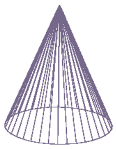
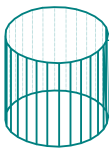
Constatant qu'il en était de même pour les autres familles ayant le même nombre de faces et de sommets, il conjectura l'existence d'une relation liant le nombre de faces, le nombre de sommets et le nombre d'arêtes.

2. Formule d’Euler

L’analyse des nombres de faces (F), de sommets (S) et d’arêtes (A) sur les modèles ci-dessous suggère que la relation liant F, S et A est de la forme:

$$\boxed{F + S - A = 2 \iff S - A + F = 2}$$

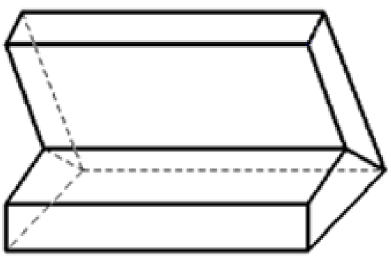
Formule d’Euler

	F	S	A
	7	7	12
	6	8	12
	8	6	12
	8	8	14
 n-gone	n + 1	n + 1	2 n
 n-gone	n + 2	2 n	3 n

Remarques

1) La formule d’Euler est vraie pour tout polyèdre convexe. Néanmoins, certains polyèdres non convexes la vérifient. Les polyèdres dont les faces sont des polygones simples (voir la définition en annexe) et sans trou polyédrique (polyèdres homéomorphes à la sphère) vérifient aussi la relation d’Euler.

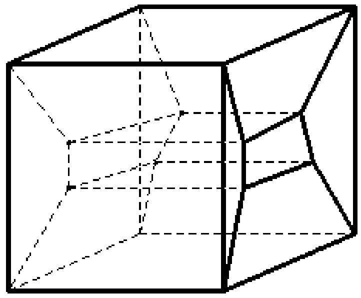
   Exemple:



F = 10
S = 12
A = 20

2) Les polyèdres du type tore (polyèdres ayant un trou polyédrique) ont pour caractéristiques: F + S – A = 0

Exemple:

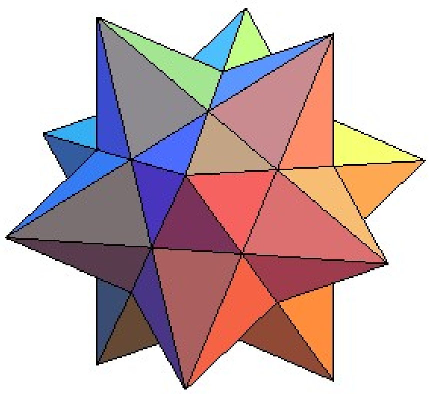


F = 16
S = 16
A = 32

3) La valeur de "S – A + F" diminue de 2 unités par nombre de trous polyédriques. Ainsi, si un polyèdre possède 2 trous polyédriques alors "S – A + F = -2". De manière générale, la relation d'Euler devient: "F + S – A = 2 – 2N" où N représente le nombre de trous polyédriques.

4) Certains polyèdres sans trou polyédrique ne vérifient pas la relation d'Euler. En effet, le petit dodécaèdre étoilé (un des 4 polyèdres réguliers étoilés non-convexes décrits par Kepler-Poinsot) composé de 12 pentagrammes réguliers (pentagones étoilés réguliers) tels que 5 pentagrammes arrivent en chaque sommet, de 30 arêtes et de 12 sommets admet l'égalité suivante: "F + S – A = -6". Si des faces d'un polyèdre (même sans trou polyédrique) sont des polygones étoilés alors la relation d'Euler n'est généralement plus vérifiée.

Exemple:



3. Démonstration de la relation d'Euler

La démonstration ci-après de la relation d'Euler pour les polyèdres convexes est inspirée par Cauchy[1] et s'appuie sur la relation liant le nombre de faces, de sommets et d'arêtes dans tout réseau plan ainsi que sur les diagrammes de Schlegel[2].

3.1. Réseau plan

Définition: Un réseau plan est constitué de sommets, d'arêtes et de faces tels que:

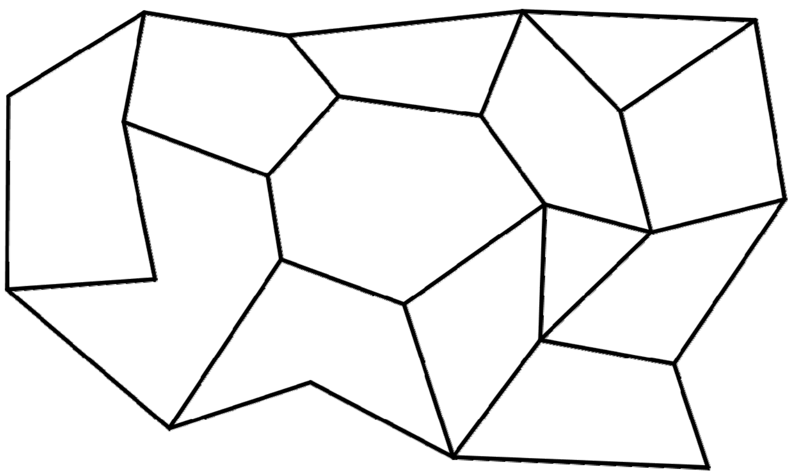
- les faces sont des polygones euclidiens simples (voir annexe);
- toute arête est soit à l'intersection de 2 faces, soit à la frontière du réseau;
- les sommets sont les extrémités des arêtes;
- les faces, les sommets et les arêtes forment un ensemble connexe[3] (en une partie).

Proposition: Dans tout réseau plan, le nombre de faces (F) plus le nombre de sommets (S) moins le nombre d'arêtes (A) est égal à "un".

$$\boxed{F + S - A = 1 \quad \Leftrightarrow \quad S - A + F = 1}$$

Pour démontrer cette proposition, nous montrerons dans un premier temps que l'on ne modifie pas la valeur de "F + S – A" lorsque l'on triangularise tous les polygones du réseau plan et, dans un second temps, nous montrerons que le fait de supprimer un triangle du réseau ne modifie pas non plus la valeur de cette relation. La valeur de "F + S – A" sera donc obtenue en supprimant tous les triangles sauf un.

Soit R un réseau plan de "f" faces, "s" sommets et "a" arêtes.



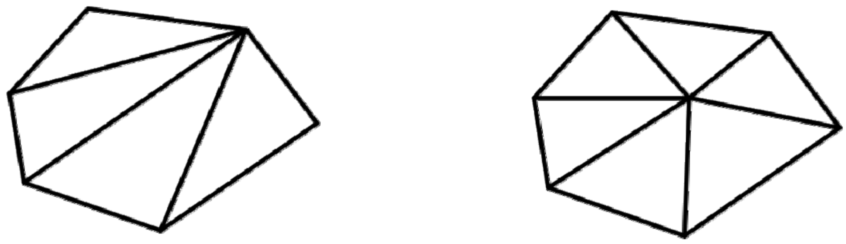
Proposition 1: La valeur de "F + S – A" ne change pas lorsque l'on triangularise tout n-gone du réseau. En effet, considérons un "n-gone" triangularisé du réseau plan.

[1] **Augustin Louis Cauchy** (1789 - 1857) est un mathématicien français, membre de l'Académie des sciences et professeur à l'École polytechnique.

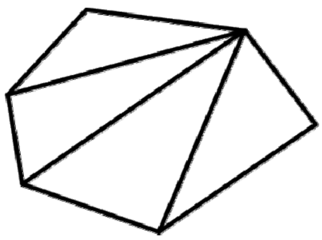
[2] **Victor Schelgel** (1843 - 1905) est un mathématicien allemand.

[3] En fait, simplement connexe.

Deux cas sont à envisager selon que l'on triangularise à partir d'un sommet ou à partir d'un point intérieur du n-gone.



- **<u>1er cas</u>:** On triangularise à partir d'un sommet du polygone.

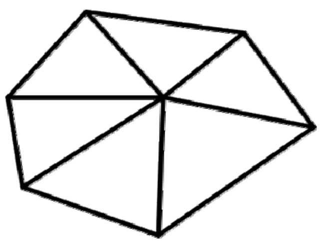


	F	S	A
Réseau	f	s	a
Réseau avec le n-gone triangularisé	(f – 1) + (n – 2)	s	a + (n – 3)
Variation	(n – 3)	0	(n – 3)

La variation de "F + S – A" devient:

Δ (F + S – A) = Δ F + Δ S – Δ A = (n – 3) + 0 – (n – 3) = 0

- **<u>2ème cas</u>:** On triangularise à partir d'un point intérieur du polygone.



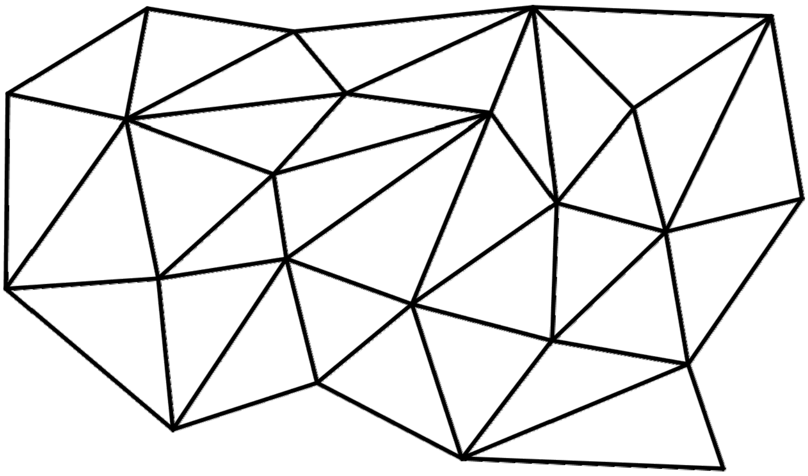
	F	S	A
Réseau	f	s	a
Réseau avec le n-gone triangularisé	(f – 1) + n	S + 1	a + n
Variation	(n – 1)	1	n

La variation de "F + S – A" devient:

Δ (F + S – A) = Δ F + Δ S – Δ A = (n – 1) + 1 – n = 0.

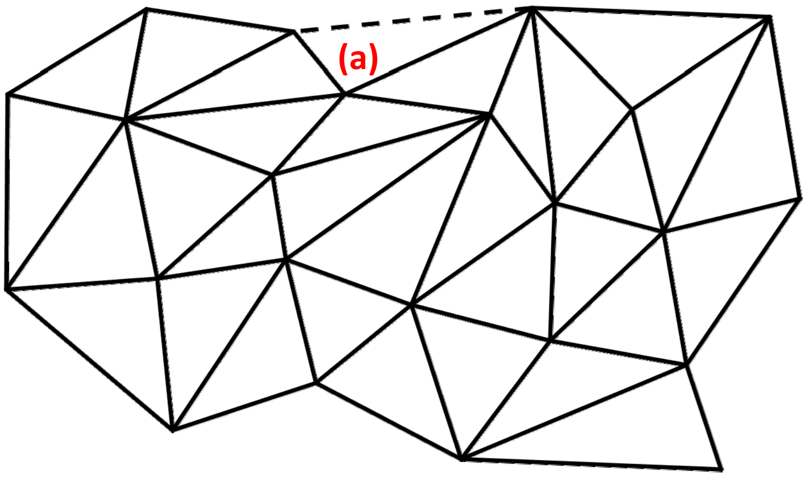
<u>Proposition 2</u>: La valeur de "F + S – A" ne varie pas lorsque l'on supprime un triangle d'un réseau triangularisé.

Soit un réseau triangularisé de "f_1" faces (triangles), "s_1" sommets et "a_1" arêtes.



La suppression d'un triangle du réseau triangularisé peut, suivant le triangle considéré, se réaliser en retirant soit un, deux ou trois côtés du triangle.

- **<u>1er cas</u>**: On supprime un triangle en retirant un côté du triangle: cf. **(a)**.



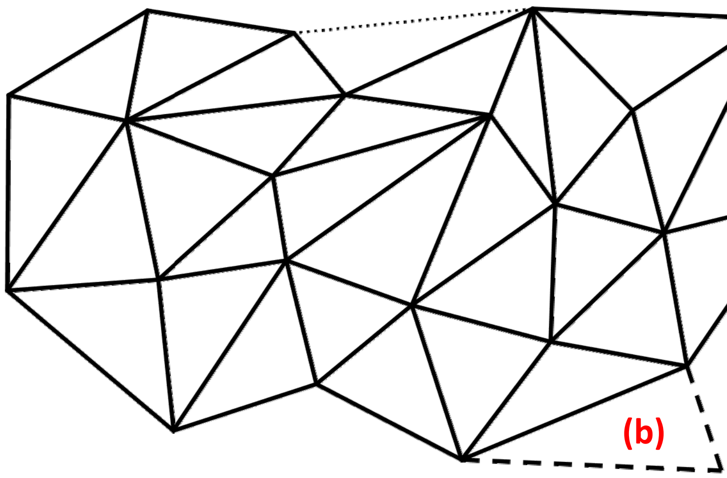
	F	S	A
Réseau triangularisé	f_1	s_1	a_1
Réseau moins un triangle du type "a"	$(f_1 - 1)$	s_1	$(a_1 - 1)$

Dans le réseau moins un triangle du type "a", "F + S – A" devient:

$$(f_1 - 1) + s_1 - (a_1 - 1) = f_1 + s_1 - a_1$$

c'est-à-dire la valeur de "F + S – A" du réseau de départ.

- **<u>2ème cas</u>**: On supprime un triangle en retirant 2 côtés du triangle: cf. **(b)**.



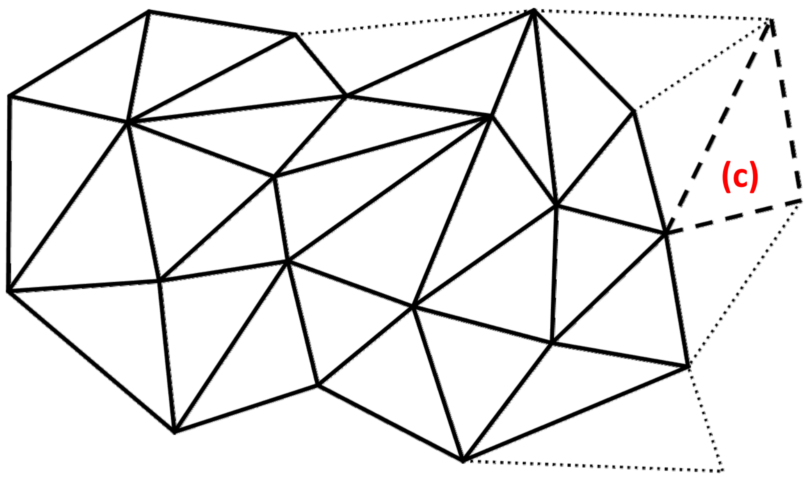
	F	S	A
Réseau triangularisé	f_1	s_1	a_1
Réseau moins un triangle du type "b"	$f_1 - 1$	$s_1 - 1$	$a_1 - 2$

Dans le réseau moins un triangle du type "b", "F + S – A" devient:

$$(f_1 - 1) + (s_1 - 1) - (a_1 - 2) = f_1 + s_1 - a_1$$

c'est-à-dire la valeur de "F + S – A" du réseau de départ.

- **<u>3ème cas</u>**: On supprime un triangle en retirant trois côtés du triangle: cf. **(c)**.



	F	S	A
Réseau triangularisé	f_1	s_1	a_1
Réseau moins un triangle du type "c"	$(f_1 - 1)$	$s_1 - 2$	$a_1 - 3$

Dans le réseau moins un triangle du type "c", "F + S – A" devient:

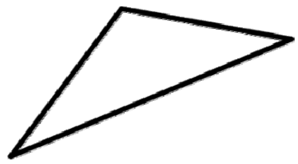
$$(f_1 - 1) + (s_1 - 2) - (a_1 - 3) = f_1 + s_1 - a_1$$

c’est-à-dire la valeur de "F + S – A" du réseau de départ.
Dans tout réseau plan, le nombre de faces (F) plus le nombre de sommets (S) moins le nombre d’arêtes (A) vaut 1.

$$\boxed{F + S - A = 1 \Leftrightarrow S - A + F = 1}$$

On commence par triangulariser tous les n-gones du réseau. Par la proposition 1, la valeur de "F + S – A" du réseau de départ ne change pas. De plus, grâce à la proposition 2, on peut supprimer tous les triangles, sauf un, sans changer la valeur de "F + S – A" du réseau de départ. Cette valeur est donc déterminée par l’unique triangle restant.

Pour celui-ci, "F + S – A" vaut: 1 + 3 – 3 = 1.



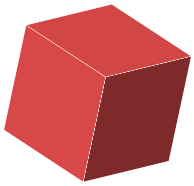
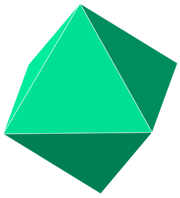
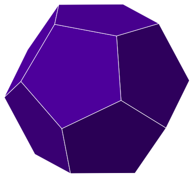
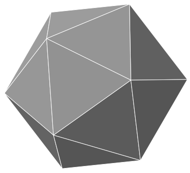
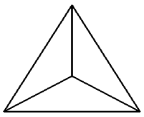
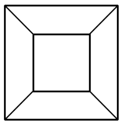
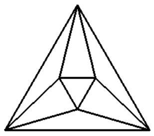
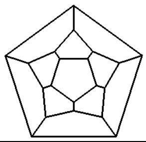
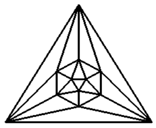
3.2. Diagrammes de Schlegel d’un polyèdre convexe

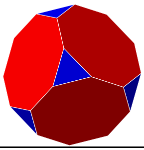
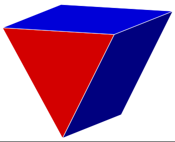
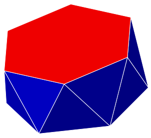
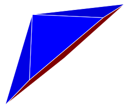
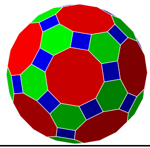
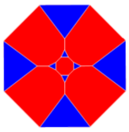
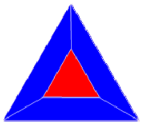
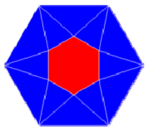
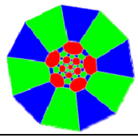
Les diagrammes de Schlegel sont des graphes planaires associés aux polyèdres. Bien qu'ils ne respectent pas les mesures du polyèdre de départ, ils conservent néanmoins l’architecture générale de ceux-ci, c’est-à-dire le nombre d'arêtes se rejoignant en un même sommet, le nombre de faces se rejoignant en un même sommet, le nombre de côtés des faces, le nombre de sommets…

Un diagramme de Schlegel peut être construit de la manière suivante: on considère un polyèdre convexe représenté par sa version squelettique réalisée avec des arêtes en matière extensible (une espèce de matière élastique souple et rigide en même temps). On choisit une face du polyèdre que l’on étire de manière continue dans toutes les directions tout en restant dans le plan déterminé par cette face jusqu’au moment où il est possible de projeter (de rabattre) le reste du squelette du polyèdre à l’intérieur de cette face déformée sans qu’il n'y ait chevauchement des arêtes ou des sommets (cela est toujours possible pour les polyèdres convexes ou pour les polyèdres à faces polygonales simples sans trou polyédrique).

On obtient de cette manière un réseau plan dont:

- le nombre de sommets est égal au nombre de sommets du polyèdre de départ;
- le nombre d’arêtes est égal au nombre d’arêtes du polyèdre de départ;
- le nombre de faces est égal au nombre de faces du polyèdre **moins un** (la face sur laquelle sont projetées toutes les autres faces du polyèdre de départ).

Polyèdres					
Diagrammes de Schelgel des polyèdres					
Noms des polyèdres	Tétraèdre	Cube	Octaèdre	Dodécaèdre	Icosaèdre

Polyèdres					
Diagrammes de Schelgel des polyèdres					
Noms des polyèdres	Cube tronqué	Prisme triangulaire	Antiprisme hexagonale	Pyramide pentagonale (J2)	Icosidodécaèdre rhombitronqué

3.3. Démonstration de la relation d'Euler

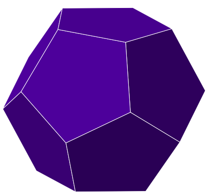
On a montré au 3.1. que, dans tout réseau plan, le nombre de faces du réseau plus le nombre de sommets du réseau moins le nombre d'arêtes du réseau vaut 1.

Montrons par conséquent que:

Dans tout polyèdre convexe, le nombre de faces (F) plus le nombre de sommets (S) moins le nombre d'arêtes (A) est égal à deux (Euler).

$$F + S - A = 2 \quad \Leftrightarrow \quad S - A + F = 2$$

Soit "P" un polyèdre convexe et "f_p, s_p, a_p" respectivement le nombre de faces, de sommets et d'arêtes du polyèdre "P".



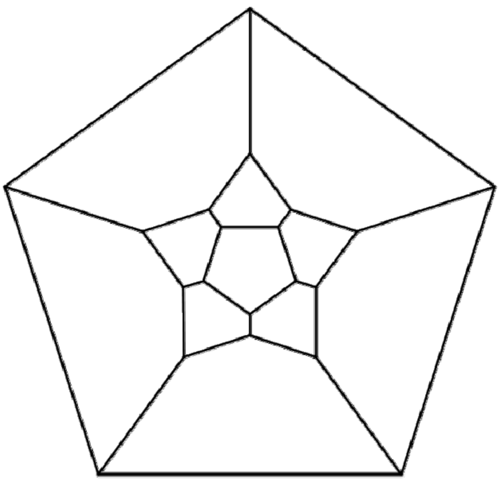


Diagramme de Schelgel du dodécaèdre

Soit un diagramme de Schlegel associé au polyèdre convexe "P" considéré. Du paragraphe 3.2., ce diagramme forme un réseau plan qui possède le même nombre de sommets, le même nombre d'arêtes mais possède une face de moins que le polyèdre de départ, c'est-à-dire "s_p" sommets, "a_p" arêtes et $(f_p - 1)$ faces.

Comme dans tout réseau plan, F + S – A = 1, il vient que:

$$(f_p - 1) + s_p - a_p = 1 \quad \text{On ajoute 1 dans les deux membres}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$f_p + s_p - a_p = 2$$

Dès lors, comme "f_p" représente le nombre de faces du polyèdre, "s_p" le nombre de sommets et "a_p" le nombre d'arêtes, il vient que dans tout polyèdre convexe:

$$F + S - A = 2 \;\Leftrightarrow\; S - A + F = 2$$

II. D'EULER A LA CARACTERISTIQUE D'EULER-POINCARE

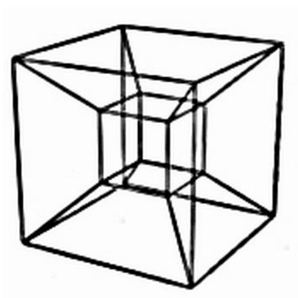
En 1752, Euler a montré que, pour tout polyèdre convexe, "S – A + F" prend la valeur "2". Nous savons également que pour tout polyèdre homéomorphe à une sphère (les polyèdres à faces polygonales simples et sans trou polyédrique) la relation "S – A + F" prend aussi la valeur "2". Pour d'autres polyèdres, "S – A + F" peut prendre d'autres valeurs. Ainsi, pour le petit dodécaèdre étoilé de Kepler-Poinsot (*cf. page 8*) "S – A + F" prend la valeur "-6" et pour les polyèdres à plusieurs trous polyédriques la relation "S – A + F" vaut "2 – 2N" où N représente le nombre de trous polyédriques.

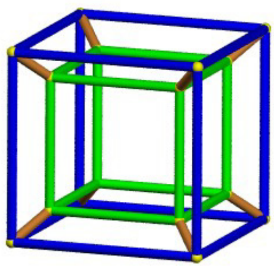
En 1893, Henri Poincaré a démontré que la relation d'Euler pouvait se généraliser à d'autres objets géométriques que les polyèdres de l'espace euclidien de dimension "3". Cette "nouvelle" relation porte le nom de caractéristique d'Euler-Poincaré et permet de caractériser la forme globale de l'objet géométrique considéré dans le sens qu'une déformation continue de l'objet ne modifie pas sa caractéristique (la valeur de "S – A + F" pour les polyèdres).

Dans le plan, la caractéristique d'Euler-Poincaré, pour les polygones devient "S – A" et sa valeur est toujours égale à "0" car il y a autant de sommets que de côtés dans un polygone. Dans l'espace euclidien de dimension "4", la caractéristique d'Euler-Poincaré pour les polytopes (l'équivalent des polyèdres de l'espace de dimension "3" en dimension "4") devient "S – A + F – C" où:

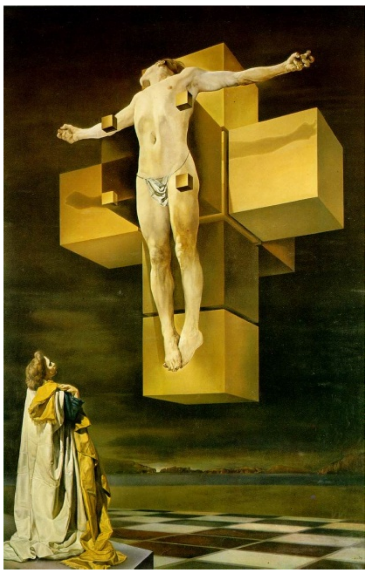
- S représente le nombre de sommets du polytope;
- A représente le nombre d'arêtes du polytope;
- F représente le nombre de faces du polytope;
- C représente le nombre de cellules (des polyèdres) du polytope.

Ainsi pour l'hypercube (l'équivalent d'un cube en 4 dimensions) "S – A + F – C" prend la valeur "0".





Un hypercube est formé de 8 cubes de telle manière que toute face de l'hypercube est incidente à 2 cellules c'est-à-dire à 2 cubes et toute arête est incidente à 3 faces. Le dessin ci-dessus représente l'ombre d'un hypercube (de dimension 4). Il possède 16 sommets, 32 arêtes, 24 faces et 8 cellules. Dès lors, "S – A + F – C= 16 – 32 + 24 – 8 = 0".



<u>*Corpus hypercubus*</u>, 1954, Peinture de Salvador Dali[4]

[4] **Salvador Domingo Felipe Jacinto Dalí i Domènech, 1er marquis de Púbol**, connu sous le nom de **Salvador Dalí** (1904 - 1989) est un peintre, sculpteur et scénariste surréaliste espagnol.

III. Apports de la relation d'Euler

La relation d'Euler liant les faces, les sommets et les arêtes a permis de justifier d'autres théorèmes importants propres aux polyèdres convexes.

1. Dans tout polyèdre convexe, la somme des angles de toutes les faces vaut $2 \,.\, 180° \,(A - F)$.

Démonstration: $\hat{S}_F = 2 \,.\, 180° \,(A - F)$

Où $\hat{S}_F$ représente la somme des angles de toutes les faces.

Rappel: dans tout polygone convexe de n côtés, la somme des angles intérieurs vaut: $(n - 2) \,.\, 180°$

Exemple: Soit la $j^{\text{ième}}$ face, on a: $(n_j - 2) \,.\, 180°$

Soit $\hat{S}_{F1}$ la somme des angles de la $1^{\text{ère}}$ face

Soit $\hat{S}_{F2}$ la somme des angles de la $2^{\text{ème}}$ face

$\vdots$

Soit $\hat{S}_{Fj}$ la somme des angles de la $j^{\text{ème}}$ face

$\vdots$

Soit $\hat{S}_{Ff}$ la somme des angles de la $f^{\text{ème}}$ face

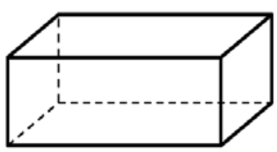
Dès lors,

$$\begin{aligned}
\hat{S}_F &= \hat{S}_{F1} + \hat{S}_{F2} + \ldots + \hat{S}_{Fj} + \ldots + \hat{S}_{Ff} \\
&= (n_1 - 2)\, 180° + (n_2 - 2)\, 180° + \ldots + (n_j - 2)\, 180° + \ldots + (n_f - 2)\, 180° \\
&= 180°\, (n_1 + n_2 + \ldots + n_j + \ldots + n_f) - 2 \,.\, 180° \,.\, f \\
&= 180°\, (2\,A) - 2 \,.\, 180° \,.\, F \\
&= 2 \,.\, 180°\, (A - F) \\
&= 360°\, (A - F)
\end{aligned}$$

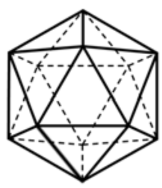
D'où, $\hat{S}_F = 360°\, (A - F)$

2. Dans tout polyèdre convexe, la somme des déficiences angulaires de tous les sommets vaut 720° (Descartes).

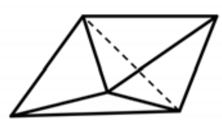
Démonstration:



8 x 90° = 720



12 x 60° = 720°



2 x 180° + 3 x 120° = 720°

$$\hat{D} = \hat{D}_{S1} + \hat{D}_{S2} + \ldots + \hat{D}_{Sj} + \ldots + \hat{D}_{Ss}$$

Où $\hat{D}_{S1} = 360° - \hat{S}_{S1}$ avec $\hat{S}_{S1}$ la somme des angles faces arrivant au sommet 1.

$\hat{D}_{S2} = 360° - \hat{S}_{S2}$ avec $\hat{S}_{S2}$ la somme des angles faces arrivant au sommet 2.

$\vdots$

$\hat{D}_{Sj} = 360° - \hat{S}_{Sj}$ avec $\hat{S}_{Sj}$ la somme des angles faces arrivant au sommet j.

$\vdots$

$\hat{D}_{Ss} = 360° - \hat{S}_{Ss}$ avec $\hat{S}_{Ss}$ la somme des angles faces arrivant au sommet s.

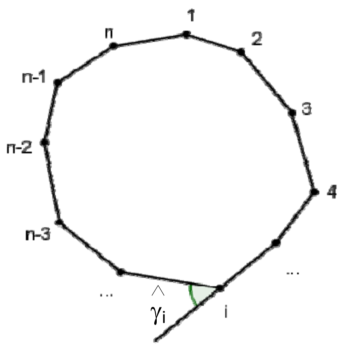
Dès lors,

$$\begin{aligned}
\hat{D} &= \hat{D}_{S1} + \hat{D}_{S2} + \ldots + \hat{D}_{Sj} + \ldots + \hat{D}_{Ss} \\
&= (360° - \hat{S}_{S1}) + (360° - \hat{S}_{S2}) + \ldots + (360° - \hat{S}_{Sj}) + \ldots + (360° - \hat{S}_{Ss}) \\
&= S \,.\, 360° - (\hat{S}_{S1} + \hat{S}_{S2} + \ldots + \hat{S}_{Sj} + \ldots + \hat{S}_{Ss}) \\
&= S \,.\, 360° - (360° (A - F))\ ^{(*)} \\
&= 360° (S - A + F) \\
&= 360° (F + S - A) \\
&= 360° \,.\, 2 \\
&= 720°
\end{aligned}$$

D'où, $\hat{D} = 720°$

(*) En additionnant les sommes des angles faces arrivant à tous les sommets du polyèdre, on obtient la somme des angles de toutes les faces du polyèdre (*cf. théorème précédent*).

Remarque: Cette propriété est à rapprocher d'une des propriétés sur les polygones euclidiens convexes:



Dans tout polygone euclidien convexe à "n" côtés, la somme des amplitudes des angles supplémentaires aux angles intérieurs vaut:

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{\gamma}_i = 360°$$

3. Si un polyèdre euclidien convexe est formé uniquement de pentagones réguliers et d'hexagones réguliers alors il possède nécessairement 12 pentagones réguliers.

Démonstration:

i. Le polyèdre euclidien étant convexe, on a: $F + S - A = 2$.

ii. En chaque sommet d'un polyèdre, il arrive au minimum 3 faces.

iii. En chaque sommet d'un polyèdre euclidien convexe, la somme des angles faces arrivant en un même sommet est strictement inférieure à 360°.

Il s'ensuit donc qu'il ne peut arriver plus de trois faces en un sommet.

En effet, en un sommet il ne peut arriver que:

- soit deux "6-gones réguliers" et un "5-gone régulier":
  (2 . 120° + 108° < 360°);
- soit trois "5-gones réguliers":
  (3 . 108° < 360°);
- soit deux "5-gones réguliers" et un "6-gone régulier":
  (2 . 108° + 120° < 360°).

Remarque: il est impossible d'avoir trois "6-gones réguliers" en un sommet (3 x 120° = 360°) ou plus de trois faces (la somme des angles faces serait supérieure à 360°). **Il en résulte que tous les sommets sont nécessairement d'ordre trois.**

iv. Le polyèdre considéré possède nécessairement 12 pentagones réguliers quel que soit le nombre d'hexagones.

On a:

$$F = F_5 + F_6\ ; \quad F + S - A = 2\ ; \quad A = \frac{5F_5 + 6F_6}{2} \quad \text{et} \quad S = \frac{5F_5 + 6F_6}{3}$$

Dès lors, en remplaçant dans la relation d'Euler F, S, A par leur valeur, il vient:

$$(F_5 + F_6) + \frac{(5F_5 + 6F_6)}{3} - \frac{(5F_5 + 6F_6)}{2} = 2 \qquad \text{(on multiplie les 2 membres par 6)}$$

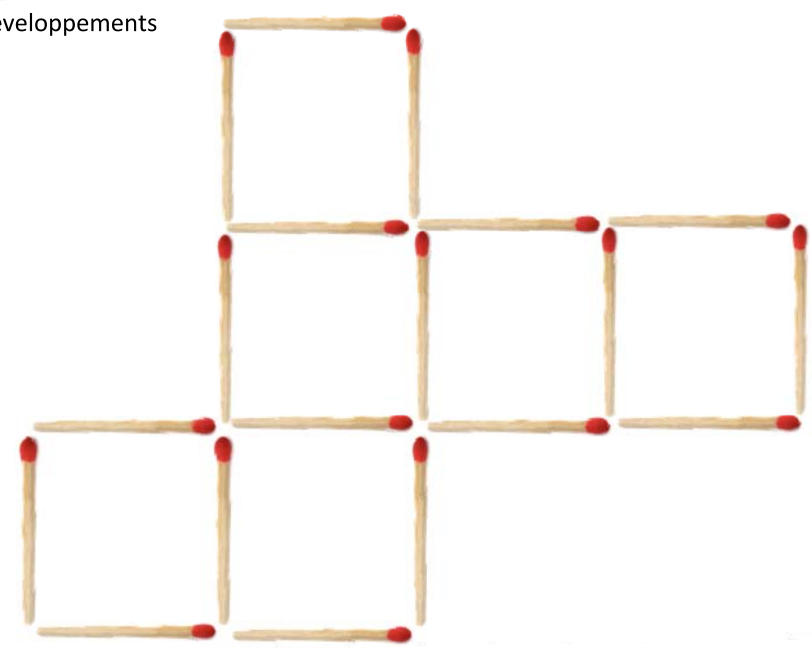
$$6F_5 + 6F_6 + 10F_5 + 12F_6 - 15F_5 - 18F_6 = 12$$

$1F_5 + 0F_6 = 12$ et F5 = 12 quel que soit le nombre d'hexagones réguliers.

D'où, un polyèdre euclidien convexe formé uniquement de pentagones réguliers et d'hexagones réguliers possède nécessairement 12 pentagones réguliers.

4. Théorème des allumettes dans les polyèdres euclidiens. *Combien d'allumettes faut-il pour représenter un dessin de développement de polyèdre?*

Soit un des développements du cube.



Remarque: une allumette correspond à une arête dessinée.

Soit ANC, le nombre d’arêtes non coupées.
Soit AD, le nombre d’arêtes dessinées.
Soit AC, le nombre d’arêtes coupées.

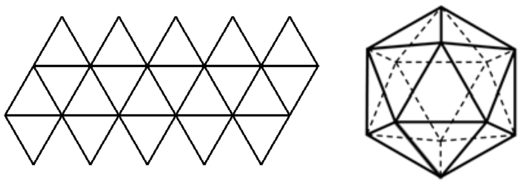
Pour le **cube** ci-dessus,

ANC = 5 (pour que les 6 carrés "tiennent" ensemble, il faut qu'il y ait 5 arêtes charnières)

AC = 12 – 5 = 7

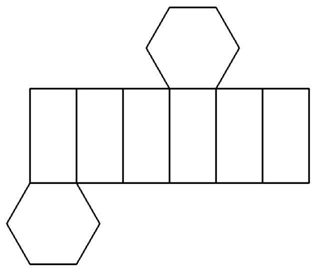
AD = ANC + 2 . AC
= 5 + 2 x 7 = 19

Pour l’**icosaèdre régulier**,

	F = 20 S = 12 A = 30 ANC = 19 AC = 30 – 19 = 11 AD = ANC + 2 . AC = 19 + 2 x 11 = 41

<u>Remarque</u>: AC représente le nombre de tenons nécessaires dans un développement en carton.

Pour un **prisme** dont la base est un n-gone,

	F = n + 2 A = 3 n S = 2 n ANC = (n + 2) – 1 = n + 1 AC = 3 n – (n + 1) = 2 n – 1 AD = ANC + 2 . AC = (n + 1) + 2 (2 n – 1) = 5 n – 1

<u>Généralisation</u>

Soit P un polyèdre de F faces, A arêtes et S sommets.

$ANC = F - 1$ (pour que les faces "tiennent" ensemble, il faut qu'il y ait $(F - 1)$ arêtes charnières)

$$\begin{aligned} AC &= A - ANC \\ &= A - (F - 1) \\ &= A - F + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AD &= ANC + 2 \cdot AC \\ &= F - 1 + 2\,(A - F + 1) \\ &= F - 1 + 2\,A - 2\,F + 2 \\ &= 2\,A - F + 1 \\ &= A + A - F + 1 \end{aligned}$$

<u>Remarque</u>: Si le polyèdre est convexe, alors $AD = A + S - 1$ et $AC = S - 1$

En effet,

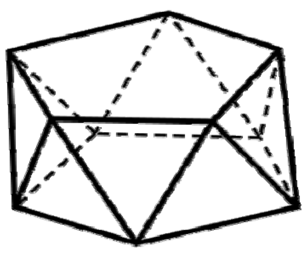
$$\begin{aligned} \text{P convexe} \quad &\Rightarrow F + S - A = 2 \\ &\Rightarrow F + S - A = 1 + 1 \\ &\Rightarrow \quad S - 1 = A - F + 1 \end{aligned}$$

Dès lors, pour les polyèdres convexes,

$$\begin{aligned} AC &= A - F + 1 \\ &= S - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AD &= A + (A - F + 1) \\ &= A + S - 1 \end{aligned}$$

<u>Exemple</u>: Pour un **antiprisme** dont les bases sont des n-gones,

	$F = 2\,n + 2$ $S = 2\,n$ $A = 4\,n$ $AC = S - 1$ $\quad = 2\,n - 1$ $AD = A + S - 1$ $\quad = 4\,n + 2\,n - 1$ $\quad = 6\,n - 1$

IV. Biographies d'Euler et de Poincare

1. La biographie de Leonhard Paul Euler

(Extrait de http://fr.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler)

Leonhard Paul Euler, né le 15 avril 1707 à Bâle et mort le 18 septembre 1783 à Saint-Pétersbourg, est un mathématicien et physicien suisse, qui passa la plus grande partie de sa vie en Russie et en Allemagne.

Euler fit d'importantes découvertes dans des domaines aussi variés que le calcul infinitésimal et la théorie des graphes. Il introduisit également une grande partie de la terminologie et de la notation des mathématiques modernes, en particulier pour l'analyse mathématique, comme pour la notion d'une fonction mathématique. Il est également connu pour ses travaux en mécanique, en dynamique des fluides, en optique et en astronomie.

Euler est considéré comme un éminent mathématicien du XVIIIe siècle et l'un des plus grands de tous les temps. Il est aussi l'un des plus prolifiques, et une déclaration attribuée à Pierre-Simon de Laplace exprime l'influence d'Euler sur les mathématiques: "Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous".

Euler est représenté sur la sixième série des billets suisses de 10 francs, sur de nombreux timbres postaux suisses, allemands et russes. L'astéroïde (2002) Euler a été nommé en son honneur. Euler est également honoré par l'Église luthérienne dans son Calendrier des Saints, le 24 mai: il était un fervent chrétien, croyant en l'inerrance biblique, et s'opposa avec force aux athées éminents de son temps.

Premières années

Ancien billet de 10 francs suisses, honorant Euler

Leonhard Euler naquit à Bâle, de Paul Euler, pasteur des Églises réformées et de Marguerite Brucker, fille de pasteur. Il eut deux jeunes sœurs du nom d'Anna Maria et de Maria Magdalena. Peu de temps après la naissance de Leonhard, la famille Euler déménagea de Bâle pour rejoindre la ville de Riehen, où Euler passa la plupart de son enfance. Paul Euler était un ami de la famille Bernoulli — Jean Bernoulli, alors considéré comme le principal mathématicien européen, pourrait être celui ayant eu la plus grande influence sur le jeune Leonhard. L'éducation officielle d'Euler commença tôt à Bâle, où il fut envoyé vivre avec sa grand-mère maternelle. À l'âge de treize ans, il s'inscrivit à l'université de Bâle, et en 1723, obtint son *Master of Philosophy* grâce à une dissertation qui comparait la philosophie de Descartes à celle de Newton. À cette époque, il recevait tous les samedis après-midi des leçons de Jean Bernoulli, qui découvrit rapidement chez son nouvel élève un incroyable talent pour les mathématiques. Euler commença alors à étudier la théologie, le grec et l'hébreu à la demande de son père, afin de devenir un pasteur, mais Jean Bernoulli convainquit Paul Euler que Leonhard était destiné à devenir un grand mathématicien. En 1727, il participa au concours de l'Académie des sciences de Paris qui consistait à résoudre un problème scientifique. Cette année là, le problème était de trouver la meilleure façon de placer les mâts d'un navire. Euler remporta la deuxième place, derrière Pierre Bouguer, qui est maintenant connu comme le "père de l'architecture navale". Par la suite, Euler gagna ce prestigieux prix annuel douze fois dans sa carrière.

Saint-Pétersbourg

À cette époque, les deux fils de Jean Bernoulli, Daniel et Nicolas, travaillaient à l'Académie des sciences de Russie à Saint-Pétersbourg. En juillet 1726, Nicolas mourut de l'appendicite, après avoir passé un an en Russie, et quand Daniel admit les positions de son frère en mathématiques et en physique, il recommanda que le poste en physiologie qu'il avait laissé vacant fût comblé par son ami Leonhard Euler. En novembre 1726, Euler accepta l'offre avec empressement, mais fit le voyage à Saint-Pétersbourg avec retard, après avoir postulé en vain à un poste de professeur de physique à l'Université de Bâle.

Timbre de 1957 de l'ex-Union soviétique commémorant le 250^{e} anniversaire d'Euler

Euler arriva dans la capitale russe le 17 mai 1727. Occupant d'abord un poste au département médical de l'académie, il fut ensuite promu à un poste dans le département de mathématiques. Il logeait auprès de Daniel Bernoulli, avec qui il travaillait souvent en étroite collaboration. Euler maîtrisait le russe et s'installa à Saint-Pétersbourg. Il prit également un emploi additionnel de médecin dans la marine russe.

L'Académie de Saint-Pétersbourg, créée par Pierre Ier de Russie, était destinée à améliorer l'éducation en Russie et à combler le fossé scientifique qui la séparait de l'Europe occidentale. En conséquence, elle était particulièrement intéressante pour les étudiants étrangers comme Euler. L'académie possédait suffisamment de ressources financières et une bibliothèque complète tirée de la bibliothèque privée de Pierre Ier et de la noblesse russe. Très peu d'étudiants étaient inscrits dans l'académie, de façon à diminuer la charge des professeurs, à mettre l'accent sur la recherche et à offrir à son corps professoral à la fois le temps et la liberté de poursuivre des questions scientifiques.

Catherine Ire de Russie, qui poursuivait la politique progressiste de son défunt mari, décéda le jour de l'arrivée d'Euler. La noblesse russe prit alors le pouvoir lors de l'ascension de Pierre II de Russie, âgé de douze ans. La noblesse se méfiait des chercheurs étrangers; elle réduisit le financement et causa d'autres difficultés à Euler et à ses collègues.

Leurs conditions de travail s'améliorèrent légèrement à la mort de Pierre II; Euler put donc rapidement gravir les échelons dans l'académie, jusqu'à devenir professeur de physique en 1731. Deux ans plus tard, Daniel Bernoulli, qui en avait assez de la censure et de l'hostilité dont il faisait l'objet à Saint-Pétersbourg, partit pour Bâle. Euler lui succéda alors à la tête du département de mathématiques.

Le 7 janvier 1734, il épousa Katharina Gsell (1707-1773), fille de Georg Gsell, un peintre. Le jeune couple acheta une maison sur la Neva. De leurs treize enfants, cinq seulement passèrent l'âge de l'enfance.

Berlin

Timbre de RDA commémorant le 200e anniversaire de la mort d'Euler

Préoccupé par la persistance des troubles en Russie, Euler quitta Saint-Pétersbourg le 19 juin 1741 pour occuper un poste à l'Académie de Berlin, qui lui était proposé par Frédéric II de Prusse. Il vécut pendant vingt-cinq ans à Berlin, où il écrivit plus de 380 articles. À Berlin, il publia deux célèbres ouvrages: l'*Introductio analysin infinitorum* ("Introduction à l'analyse des infiniment petits"), un texte sur les fonctions publié en 1748 et *Institutiones calculi differentialis* ("Traité du calcul différentiel"), publié en 1755 et traitant du calcul différentiel.

En outre, Euler fut invité à être le professeur de la princesse d'Anhalt-Dessau, la nièce de Frédéric II. Euler lui écrivit plus de 200 lettres, qui furent ensuite rassemblées dans un best-seller intitulé *Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie*. Cet ouvrage contient des publications d'Euler sur divers sujets se rapportant à la physique et aux mathématiques, mais également sur des sujets philosophiques. Ce livre est devenu le plus largement lu de tous ses travaux mathématiques, et il a été publié en Europe et aux États-Unis. La popularité des "Lettres" témoigne de la capacité d'Euler à communiquer efficacement sur les questions scientifiques au public, une capacité rare pour un chercheur scientifique.

Malgré l'immense contribution d'Euler au prestige de l'Académie, il fut finalement contraint de quitter Berlin, en partie à cause d'un conflit de personnalité avec Frédéric II. En effet, le monarque avait moins de considération pour Euler que pour son cercle de philosophes. Voltaire faisait partie de ceux qui étaient aux côtés de Frédéric II, et le français eut une bonne place dans le cercle du roi. Euler, simple homme religieux et travailleur acharné, était très classique dans ses convictions et ses goûts. Il fut, à bien des égards, l'opposé de Voltaire. Euler avait une formation limitée en rhétorique, et avait tendance à débattre sur des questions qu'il connaissait peu, faisant de lui une cible fréquente de l'esprit de Voltaire. Frédéric II exprima également sa déception vis-à-vis des capacités d'ingénierie d'Euler:

"Je voulais avoir un jet d'eau dans mon jardin: Euler a calculé la force des roues nécessaire afin d'élever l'eau jusqu'à un réservoir, d'où elle doit redescendre à travers des canaux, pour enfin sortir de la fontaine. Mon moulin a été réalisé géométriquement mais ne peut pas élever une goutte d'eau à moins de cinquante pas du réservoir. Vanité des vanités! Vanité de la géométrie!"

Déclin de la vue

Portrait de 1753 par Emanuel Handmann. Cette représentation indique des problèmes de la paupière droite et un possible strabisme. L'œil gauche semble en bonne santé, mais il a plus tard été affecté par une cataracte.

La vue d'Euler empira tout au long de sa carrière en mathématiques. Trois ans après avoir souffert d'une fièvre quasi-mortelle en 1735, il devint presque aveugle de l'œil droit. Euler attribua plutôt son état au travail minutieux qu'il avait effectué en cartographie pour l'Académie de Saint-Pétersbourg. La vue d'Euler de l'œil droit empira tout au long de son séjour en Allemagne, si bien que Frédéric II le surnommait "Cyclope". Euler souffrit ensuite d'une cataracte de l'œil gauche, le rendant presque totalement aveugle. Il semble que ce mauvais état ait eu peu d'effet sur sa productivité, Euler ayant compensé son handicap par ses compétences en calcul mental et par sa mémoire eidétique. Par exemple, Euler pouvait répéter l'Énéide de Virgile, du début à la fin, sans hésitation, et pour chaque page de son édition, il pouvait citer la première ligne et la dernière. Avec l'aide de ses scribes, la productivité d'Euler dans de nombreux domaines d'étude augmenta en fait. Ainsi, il produisit en moyenne un document de mathématiques par semaine au cours de l'année 1775.

Retour en Russie

La situation en Russie s'était grandement améliorée depuis l'accession au trône de Catherine II de Russie, et en 1766, Euler accepta une invitation à revenir à l'Académie de Saint-Pétersbourg. C'est ainsi qu'il passa le reste de sa vie en Russie. Son second séjour dans le pays fut cependant marqué par la tragédie. Un incendie à Saint-Pétersbourg en 1771 lui coûta son domicile, et faillit lui ôter la vie. En 1773, il perdit son épouse de 40 ans. Trois ans après la mort de sa femme, Euler se remaria avec la demi-sœur de celle-ci, Salomé Abigail Gsell (1723-1794). Ce mariage allait durer jusqu'à sa mort.

La tombe de Leonhard Euler au monastère Alexandre-Nevski

Le 18 septembre 1783, Euler décéda à Saint-Pétersbourg d'une hémorragie intra-cérébrale, et fut enterré avec son épouse au cimetière luthérien de Smolensk sur l'île Vassilievski (les Soviétiques détruisirent en partie le cimetière après avoir transféré les restes d'Euler au cimetière Saint-Lazare du monastère Alexandre-Nevski). Son éloge funèbre fut écrit pour l'Académie française par le mathématicien et philosophe français Nicolas de Condorcet. Le récit de sa vie, avec une liste de ses œuvres, fut écrit par Nikolaus von Fuss, le beau-fils d'Euler et le secrétaire de l'Académie des sciences de Russie. Condorcet déclara:

"… il cessa de calculer et de vivre"

Contributions aux mathématiques

Leonhard Euler a travaillé dans presque tous les domaines des mathématiques: la géométrie, le calcul infinitésimal, la trigonométrie, l'algèbre et la théorie des nombres. Il est une figure capitale de l'histoire des mathématiques: s'ils étaient imprimés, ses écrits, dont beaucoup sont d'un intérêt fondamental, pourraient occuper entre quarante et soixante ouvrages. Le nom d'Euler est associé à un grand nombre de sujets.

Notation mathématique

Euler a introduit et popularisé plusieurs conventions de notation par le biais de ses nombreux ouvrages largement diffusés. Plus particulièrement, il a introduit la notion de fonction et a été le premier à écrire *f*(*x*) pour désigner la fonction *f* appliquée à l'argument *x*, en 1734. Il a également introduit la notation moderne des fonctions trigonométriques, la lettre *e* pour la base du logarithme naturel (également connue sous le nom de nombre d'Euler) en 1727, la lettre grecque Σ pour désigner une somme en 1755 et la lettre *i* pour représenter l'unité imaginaire, en 1777. L'utilisation de la lettre grecque π pour désigner le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre a également été popularisée par Euler, mais celui-ci n'est pas à l'origine de la notation.

Analyse

Le développement du calcul infinitésimal a été au premier plan des recherches mathématiques du XVIII^{e} siècle, et la famille Bernoulli — amis d'Euler — est à l'origine de nombreux progrès dans ce domaine. Grâce à leur influence, l'étude du calcul infinitésimal est devenue l'un des axes principaux du travail d'Euler. Bien que certaines des démonstrations d'Euler ne soient pas acceptables au regard des normes modernes de rigueur mathématique, ses idées ont tout de même conduit à de grandes avancées.

Euler est bien connu dans le domaine de l'analyse pour son usage fréquent des séries numériques et des séries entières. Il a notamment montré que le nombre e est la somme de la série de terme général 1/n!:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right).$$

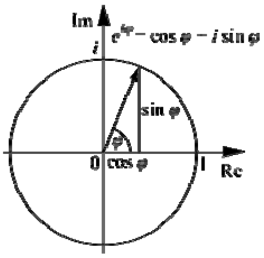
Il a trouvé le "développement en série entière" de la fonction exponentielle:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right).$$

et celui de la fonction Arctangente.

Sa ténacité à utiliser les développements en séries lui a permis de résoudre le fameux problème de Bâle en 1735:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$



Une interprétation géométrique de la formule d'Euler

Euler a introduit l'utilisation de la fonction exponentielle et des logarithmes dans les démonstrations en analyse. Il a découvert des moyens d'exprimer différentes fonctions logarithmiques en utilisant les séries entières, et il a étendu la notion de logarithme aux nombres négatifs et aux nombres complexes. Il a également défini la fonction exponentielle pour les nombres complexes, et a découvert la relation qui la lie aux fonctions trigonométriques:

pour tout réel ϕ , $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$

Un cas particulier de cette « formule d'Euler », obtenu en donnant à ϕ la valeur π est

$e^{i\pi} = -1$, qu'on préfère souvent écrire: $e^{i\pi} + 1 = 0$

formule connue sous le nom d'identité d'Euler, et qualifiée de "formule la plus remarquable des mathématiques" par Richard Feynman, car elle réunit en seulement 7 caractères l'addition, la multiplication, l'exponentiation, l'égalité et les constantes remarquables 0, 1, e, i et π. En 1988, les lecteurs de *The Mathematical Intelligencer* l'ont désignée comme "la plus belle formule mathématique de tous les temps". Au total, le nom d'Euler figurait dans trois des cinq formules arrivées en tête de ce vote.

La formule de De Moivre:

$$(\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$$

est une conséquence directe de la formule d'Euler.

En outre, Euler a contribué à la théorie des fonctions transcendantes avec l'introduction de la fonction gamma. Il a également introduit une nouvelle méthode pour résoudre les équations quartiques. Il a aussi trouvé une façon de calculer des intégrales avec des limites complexes, préfigurant le développement moderne de l'analyse complexe, et a inventé le calcul des variations, qui inclut l'un de ses résultats les plus célèbres, nommé l'équation d'Euler-Lagrange.

Euler fut le pionnier de l'utilisation de méthodes d'analyse pour résoudre des problèmes de la théorie des nombres. Ce faisant, il a réuni deux branches différentes des mathématiques et introduit un nouveau champ d'étude: la théorie analytique des nombres. Euler a aussi introduit la théorie des séries hypergéométriques, des fonctions hyperboliques et la théorie analytique des fractions continues. Par exemple, il a prouvé l'infinité des nombres premiers en utilisant la divergence de la série harmonique, et il a utilisé les méthodes analytiques pour avoir une meilleure compréhension de la répartition des nombres premiers. Les travaux d'Euler dans ce domaine ont contribué à l'élaboration du théorème des nombres premiers.

Théorie des nombres

L'intérêt d'Euler dans la théorie des nombres peut être attribué à l'influence de Christian Goldbach, son ami à l'Académie de Saint-Pétersbourg. Un grand nombre des premiers travaux d'Euler en théorie des nombres est fondé sur les travaux de Pierre de Fermat. Euler a développé quelques idées de Fermat, et a réfuté certaines de ses conjectures.

Euler a fait le lien entre la distribution des nombres premiers et l'analyse. Il a démontré que la série des inverses des nombres premiers diverge. Pour ce faire, il a découvert le lien entre la fonction qui sera dénommée zêta de Riemann et les nombres premiers.

Euler a démontré les identités de Newton, le petit théorème de Fermat, le théorème des deux carrés de Fermat, et il a également travaillé sur le théorème des quatre carrés de Lagrange. Il a aussi défini la fonction ϕ qui associe à tout entier n le nombre d'entiers positifs inférieurs à n et qui sont premiers avec n. En utilisant les propriétés de cette "indicatrice", il a généralisé le petit théorème de Fermat pour aboutir à ce qui est maintenant connu sous le nom de théorème d'Euler. Il a contribué de manière significative à la recherche sur les nombres parfaits, qui ont fasciné les mathématiciens depuis Euclide. Euler a également fait progresser les recherches sur le théorème des nombres premiers, et il a conjecturé la loi de réciprocité quadratique. Ces deux derniers énoncés sont considérés comme des théorèmes fondamentaux de la théorie des nombres, et en cela Euler a ouvert la voie aux travaux de Carl Friedrich Gauss.

En 1772, Euler a démontré que $2^{31} - 1 = 2\,147\,483\,647$ est un nombre premier de Mersenne. Il est resté le plus grand nombre premier connu jusqu'en 1867.

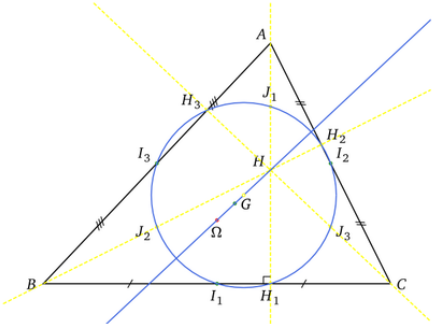
Géométrie

Leonhard Euler a montré que, *pour tout triangle*, les neuf points suivants:

- les milieux des trois côtés
- les pieds des trois hauteurs
- les milieux de chacun des segments reliant l'orthocentre aux sommets du triangle

sont situés sur un même cercle. Ce "cercle des neuf points" est encore appelé "cercle d'Euler" associé au triangle.

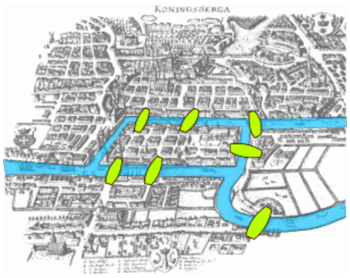
Il a démontré aussi que, *dans tout triangle*, l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité et le centre du cercle des neuf points sont alignés. La droite qui les porte est appelée "droite d'Euler" associée au triangle.



Cercle et droite d'Euler d'un triangle quelconque

Théorie des graphes

Article détaillé : Problème des sept ponts de Königsberg.



Carte de Königsberg au temps d'Euler, montrant le schéma réel de disposition des sept ponts

En 1736, Euler résolut le problème des sept ponts de Königsberg. La ville de Königsberg, en Prusse, est traversée par la rivière Pregolia, qui entoure deux grandes îles reliées entre elles et aux deux rives par sept ponts. Le problème était de savoir s'il est possible de suivre un chemin qui emprunte chaque pont une fois et une seule et revienne au point de départ. Euler a établi que, pour que ce soit possible, il aurait fallu que chacune des quatre zones géographiques (les deux îles et les deux rives) soit atteinte par un nombre pair de ponts — en termes modernes: que chacun des quatre "sommets" du "graphe" soit adjacent à un nombre pair d'"arêtes" (un graphe ayant cette propriété est dit "eulérien"). La résolution de ce problème est considérée comme le premier théorème de la théorie des graphes.

Euler a également établi la formule $S - A + F = 2$ liant le nombre de sommets, d'arêtes et de faces d'un polyèdre convexe, et donc d'un graphe planaire. La constante de cette formule est maintenant connue comme la caractéristique d'Euler pour un graphe (ou pour un autre objet mathématique), et est liée au genre de l'objet. L'étude et la généralisation de cette formule, notamment par Cauchy et L'Huillier, est à l'origine de la topologie.

En outre, Leonhard Euler est le premier à avoir étudié le problème du cavalier, en 1759. Il publiera ses recherches sur la question dans "Solution d'une question curieuse qui ne paraît soumise à aucune analyse".

Mathématiques appliquées

Certains des plus grands succès d'Euler ont été dans la résolution des problèmes analytiques dans des domaines autres que les mathématiques et dans la description de nombreuses applications des nombres de Bernoulli, des séries de Fourier, des diagrammes de Venn, des nombres d'Euler, des constantes e et π, des fractions continues et des intégrales. Il a développé des outils qui rendent plus faciles à appliquer certains problèmes physiques. Il a fait progresser le domaine de l'amélioration de l'approximation numérique d'intégrales, en inventant ce qui est maintenant connu sous le nom de méthode d'Euler. Euler a également démontré, en même temps que l'écossais Colin Maclaurin — mais bien indépendamment — la formule d'Euler-Maclaurin. Il a aussi facilité l'utilisation des équations différentielles, en particulier en introduisant la constante d'Euler-Mascheroni:

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n) \right).$$

Un des domaines les moins communs qui intéressaient Euler était l'application des idées mathématiques à la musique. En 1739, il écrivit *Tentamen novae theoriae musicae*, dans l'espoir de finalement intégrer la théorie musicale aux mathématiques. Cette partie de son travail, cependant, n'a pas reçu une grande attention et a été décrite comme trop mathématique pour les musiciens mais aussi trop musicale pour les mathématiciens.

Autres sciences

Leonhard Euler a également contribué à d'autres sciences, comme certains domaines des sciences physiques, en étudiant par exemple le mouvement de la Lune.

Physique et astronomie

Euler a contribué à l'élaboration de la théorie d'Euler-Bernoulli, qui est un modèle utilisé dans le domaine de la résistance des matériaux. En dehors de l'application avec succès de ses outils d'analyse aux problèmes liés à la mécanique newtonienne, Euler a également appliqué ses techniques à des problèmes d'astronomie. Ses travaux dans cette science ont été reconnus par un certain nombre de prix décernés par l'Académie de Paris au cours de sa carrière. Ses réalisations comprennent la détermination avec une grande précision des orbites des comètes et des autres corps célestes, mais aussi la compréhension de la nature des comètes, et le calcul de la parallaxe du Soleil. Ses calculs ont également contribué à l'élaboration de tables précises de longitudes.

En dynamique des fluides, Euler fut le premier à poser les équations désormais connues sous le nom d'équations d'Euler des fluides parfaits, dans "Mémoires de l'Académie royale des sciences et des belles lettres de Berlin" (1757). Elles permettent le calcul de nombreux écoulements, comme la circulation sanguine, l'aérodynamique des automobiles et des avions, l'hydraulique, l'océanographie, la météorologie ou la grande tache rouge de Jupiter.

En outre, Euler a fait d'importantes contributions en optique. Il a exprimé son désaccord avec la théorie corpusculaire de la lumière de Newton dans *Opticks*, qui était alors la théorie dominante. Ses documents des années 1740 sur l'optique ont contribué à faire en sorte que la théorie ondulatoire de la lumière proposée par Christian Huygens devienne la théorie la plus largement répandue, au moins jusqu'au développement de la théorie quantique de la lumière.

Logique

Il est aussi crédité pour avoir, avec l'aide des courbes fermées, illustré le raisonnement syllogistique, en 1768. Ces schémas sont désormais connus sous le nom des diagrammes d'Euler

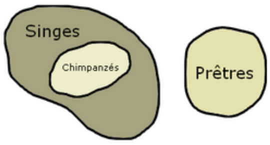


Illustration d'un syllogisme de la deuxième figure par un diagramme d'Euler.

Aucun prêtre n'est un singe.
Or, les chimpanzés sont des singes.
Donc, les chimpanzés ne sont pas prêtres.

Philosophie personnelle et croyances religieuses

Leonhard Euler et son ami Daniel Bernoulli ont été des adversaires de la *Monadologie* de Leibniz et de la philosophie de Christian Wolff. Euler a insisté sur le fait que la connaissance est fondée en partie sur la base de lois quantitatives précises. Les tendances religieuses d'Euler pourraient aussi avoir eu une incidence sur son aversion de la doctrine, il est allé jusqu'à qualifier les idées de Wolff de "sauvages et athées".

Beaucoup de ce qui est connu des croyances religieuses d'Euler peuvent être déduites de ses *Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie* et d'un ouvrage antérieur, *Rettung der Göttlichen Offenbahrung Gegen die Einwürfe der Freygeister*. Ces écrits montrent qu'Euler était un fervent chrétien qui estimait que la Bible avait été inspirée.

Une anecdote rapportée par Dieudonné Thiébault met en scène les croyances religieuses d'Euler. Le philosophe français Denis Diderot, en visite à Saint-Pétersbourg en 1773-1774, avait accepté, à la demande de l'impératrice Catherine II, de voir la preuve de l'existence de Dieu qu'Euler prétendait pouvoir produire. Les deux hommes se rencontrèrent donc et Euler, sur un ton d'une parfaite conviction annonça "Monsieur, $e^{i\pi} + 1 = 0$, donc Dieu existe, répondez!". Le désarroi de Diderot, pour qui, (selon l'anecdote) les mathématiques étaient incompréhensibles, provoqua les rires de la cour. Gêné, il demanda à quitter la Russie. Il se peut que l'anecdote soit apocryphe et Thiébault ne prétend pas le contraire. De toute évidence, ce dernier n'était pas présent, ses mémoires sont tardifs et Diderot n'était pas étranger aux mathématiques - comme en atteste la réputation qu'il s'était fait avec ses *Mémoires sur différents sujets de mathématiques* entre autres.

2. La biographie de Henri Poincaré

(Extrait de http://fr.wikipedia.org/wiki/Henri_Poincaré)

Henri Poincaré (29 avril 1854 à Nancy, France - 17 juillet 1912 à Paris) est un mathématicien, physicien et philosophe français. Il a réalisé des travaux d'importance majeure en optique et en calcul infinitésimal. Ses avancées sur le problème des trois corps en font un fondateur de l'étude qualitative des systèmes d'équations différentielles et de la théorie du chaos; il est aussi un précurseur majeur de la théorie de la relativité restreinte. On le considère comme un des derniers grands savants universels, maîtrisant en particulier l'ensemble des branches des mathématiques.

Biographie

Fils d'un professeur à la faculté de Médecine de Nancy, il est le cousin germain de l'homme politique et président de la République française Raymond Poincaré, et de Lucien Poincaré, directeur de l'Enseignement secondaire au Ministère de l'Instruction publique et des Beaux-Arts. Il épousa le 20 avril 1881 Louise Poulain d'Andecy, petite-fille d'Isidore Geoffroy Saint-Hilaire, arrière-petite-fille d'Étienne Geoffroy Saint-Hilaire. De cette union naît 4 enfants: Jeanne (1887), Yvonne (1889), Henriette (1891), et Léon (1893).

Élève d'exception, en 1871 il obtient le baccalauréat ès lettres, mention Bien et son baccalauréat ès sciences, mention Assez Bien. En classes préparatoires, il remporte 2 fois le concours général de mathématiques. Malgré son inaptitude sportive et au dessin, il entre néanmoins premier à l'École polytechnique en 1873, puis à l'École des Mines en octobre 1875; il est licencié ès sciences le 2 août 1876. Nommé ingénieur des mines de 3^{e} classe en mars 1879 à Vesoul, il obtient le 1er août 1879 le doctorat ès sciences mathématiques à la Faculté des sciences de Paris et devient chargé de cours d'analyse à la faculté des sciences de Caen le 1er décembre 1879.

Deux ans plus tard, il obtient ses premiers résultats marquants en mathématiques (sur la représentation des courbes et sur les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques), et rapidement, il s'intéresse à l'application de ses connaissances mathématiques en physique et plus particulièrement en mécanique (science).

Il retourne à Paris en 1881 comme maître de conférences d'analyse à la faculté des sciences de Paris. Il est nommé répétiteur d'analyse à l'École polytechnique le 6 novembre 1883, charge qu'il occupe jusqu'à sa démission en mars 1897. Nommé à la chaire de mécanique physique et expérimentale le 16 mars 1885, il quitte celle-ci pour la chaire de *Physique mathématique et de calcul des probabilités* en août 1886, succédant à Gabriel Lippmann.

Il est élu membre de l'Académie des sciences en 1887. Il devient membre du Bureau des longitudes en 1893 et est nommé ingénieur en chef des mines. En novembre 1896, il obtient la chaire d'*Astronomie mathématique et de mécanique céleste*, succédant à Félix Tisserand.

Il est, en 1901, le premier lauréat de la Médaille Sylvester de la Royal Society. Il a été président de la Société mathématique de France en 1886 et en 1900 et président de la Société française de physique en 1902.

Le 1er octobre 1904, Poincaré est nommé professeur d'astronomie générale sans traitement à l'École polytechnique, ceci afin d'éviter la suppression de cette chaire.

Poincaré et la relativité

En 1902, Poincaré publie *La Science et l'Hypothèse*. Même si ce livre est plus un ouvrage d'épistémologie que de physique, il appelle à ne pas considérer comme trop réels de nombreux artéfacts de la physique de son époque: le temps absolu, l'espace absolu, l'importance de l'éther. Einstein s'était particulièrement penché sur ce livre, et les idées contenues font du livre un précurseur de la relativité restreinte.

On y trouve en particulier ce passage:

"Ainsi l'espace absolu, le temps absolu, la géométrie même ne sont pas des conditions qui s'imposent à la mécanique; toutes ces choses ne préexistent pas plus à la mécanique que la langue française ne préexiste logiquement aux vérités que l'on exprime en français".

En 1905, Poincaré pose les équations des transformations de Lorentz, et les présente à l'Académie des sciences de Paris le 5 juin 1905. Ces transformations vérifient l'invariance de Lorentz, achevant le travail d'Hendrik Antoon Lorentz lui-même (Lorentz était un correspondant de Poincaré). Ces transformations sont celles qui s'appliquent en relativité restreinte, et on emploie encore aujourd'hui les équations telles que les a écrites Poincaré. Mais pour expliquer l'origine physique de ces transformations, Poincaré a recours à des contractions physiques de l'espace et du temps, conservant en références un éther et un temps absolu. C'est Einstein qui s'emploie à montrer qu'on retrouve les mêmes transformations en partant simplement du principe de relativité, éliminant les notions de référentiels ou horloge absolue, et faisant des différences de longueur des effets de la perspective dans un espace-temps en quatre dimensions, et non des contractions réelles.

Poincaré a également proposé certaines idées sur la gravité, notamment la propagation des perturbations du champ de gravitation à la vitesse de la lumière, ce qu'il nomma "ondes gravifiques". Sa faiblesse était de trop rechercher l'analogie avec l'électromagnétisme en cherchant une nouvelle loi de gravitation qui soit invariante par les transformations de Lorentz. Paul Langevin note que Poincaré a trouvé "plusieurs solutions possibles qui présentent toutes ce caractère commun que la gravitation se propage avec la vitesse de la lumière, du corps attirant au corps attiré, et que la loi nouvelle permet de représenter les mouvements des astres mieux encore que la loi ordinaire puisqu'elle atténue les divergences existant encore entre celle-ci et les faits, dans le mouvement du périhélie de Mercure, par exemple".

Si les physiciens de l'époque étaient parfaitement au courant des travaux de Poincaré, le grand public l'a ensuite presque oublié, alors que le nom d'Einstein est aujourd'hui connu de tous. Récemment, quelques voix ont cherché à rappeler le rôle de Poincaré, mais d'autres sont allés plus loin, cherchant à faire de Poincaré l'auteur de la théorie de la relativité. Cette controverse sur la paternité de la relativité est d'autant plus délicate que les conflits politiques se mêlent aux questions de lecture des articles de physique.

Mathématiques

Poincaré est le fondateur de la topologie algébrique. Ses principaux travaux mathématiques ont eu pour objet la géométrie algébrique, des types de fonctions particuliers – les fonctions dites "automorphes" (il découvre les fonctions fuchsiennes et kleinéennes), les équations différentielles... La notion de continuité est centrale dans son travail, autant par ses répercussions théoriques que pour les problèmes topologiques qu'elle entraîne.

Les fondements des mathématiques

À partir de 1905 et pendant les six dernières années de sa vie, Poincaré participe activement aux débats sur les fondements qui traversaient à l'époque la communauté mathématique. Il n'a jamais essayé d'y contribuer sur le plan technique, mais certaines de ses idées ont eu une influence indéniable. L'un de ses contradicteurs, Bertrand Russell écrira en 1914 "Il n'est pas possible d'être toujours juste en philosophie; mais les opinions de Poincaré, justes ou fausses, sont toujours l'expression d'une pensée puissante et originale, servie par des connaissances scientifiques tout à fait exceptionnelles". Entre autres, à cause de son refus d'accepter l'infini actuel, c'est-à-dire la possibilité de considérer l'infini comme une entité achevée et non simplement comme un processus qui peut se prolonger arbitrairement longtemps, Poincaré est considéré par beaucoup d'intuitionnistes comme un précurseur. Poincaré n'a cependant jamais remis en cause le tiers-exclu et rien n'indique qu'il aurait pu adhérer à une refondation aussi radicale des mathématiques que celle que proposera Luitzen Egbertus Jan Brouwer.

La position de Poincaré a évolué. Dans une période précédente, il s'est intéressé aux travaux de Georg Cantor, dont les travaux sur la construction des réels et la théorie des ensembles s'appuient de façon essentielle sur un infini actuel, au point de superviser la traduction en français d'une partie des articles de ce dernier (en 1871, 1883 ...), et d'utiliser ses résultats dans son mémoire sur les groupes kleinéens (1884). Il s'intéresse également aux travaux de David Hilbert sur l'axiomatisation: il fait en 1902 une recension soignée et très louangeuse des *Fondements de la géométrie* (1899).

En 1905 et 1906, Poincaré réagit, de façon assez polémique à une série d'articles de Louis Couturat sur les "principes des mathématiques" dans la *revue de métaphysique et de morale*, articles qui rendaient compte des *Principles of Mathematics* de Bertrand Russell (1903). Russell finira par intervenir lui-même dans le débat.

Poincaré, contrairement à ce qu'on dit souvent, n'a jamais partagé ce que l'on appelle de manière vague l'intuitionnisme kantien. Quand il évoque l'intuition (*La valeur de la science*, ch. 1), ce terme signifie "image" ou "modèle". Sa conception de l'expérience n'a pas grand chose à voir avec celle de Kant: ni l'espace, ni le temps ne sont des "formes a priori" car l'expérience n'est que l'occasion à partir de laquelle l'espace représenté est mis en relation avec l'espace comme continuum amorphe: "L'expérience n'a donc joué qu'un seul rôle, elle a servi d'occasion. Mais ce rôle n'en était pas moins très important; et j'ai cru nécessaire de le faire ressortir. Ce rôle aurait été inutile s'il existait une "forme a priori" s'imposant à notre sensibilité et qui serait l'espace à trois dimensions". (*La valeur de la science*, ch. 4, § 6). Quand Poincaré évoque l'idée de commodité, il est plus proche des empiristes que des idéalistes: l'idée de vérité n'a plus grand chose à voir avec l'idée de jugement synthétique a priori parce qu'on "choisit" ses principes ou axiomes tout comme on choisit les faits dans les sciences de la nature. Le principe de récurrence semble n'avoir d'autre but que de montrer la non pertinence du logicisme qui fait de la déduction le ressort central de la démonstration mathématique.

Pour lui, c'est précisément le cas du principe de récurrence, qu'il nomme également "principe d’induction", en ce qu'il s'oppose à déduction, et qu'il refuse de considérer comme le fruit d'un jugement purement analytique, comme le sont pour lui les raisonnements logiques. Ceci l'oppose à Russell (et à travers lui à Gottlob Frege, que Poincaré méconnait), qui veut réduire les mathématiques à la logique, cela l'oppose aussi à ceux qu'il appelle les cantoriens comme Ernst Zermelo et dont il distingue en partie Hilbert. À ces derniers il reproche l'usage de l'infini actuel, à travers leur façon de "passer du général au particulier", par exemple le fait de supposer l'existence d'ensembles infinis pour définir l'ensemble des entiers naturels, alors que pour lui, les entiers naturels sont premiers. Il refuse ce qu'il appelle, les définitions *non-prédicatives* (voir paradoxe de Richard) qui pour définir un ensemble E font appel à "la notion de l'ensemble E lui-même" (typiquement la définition actuelle en théorie des ensembles de **N**, l'ensemble des entiers naturels, comme intersection des ensembles contenant 0 et clos par successeur, est non-prédicative au sens de Poincaré, puisque **N** fait partie de ces derniers). Les objections de Poincaré, par les réactions qu'elles ont nécessitées, on joué un rôle non négligeable dans la naissance de la logique mathématique et de la théorie des ensembles, même si ses idées ont eu finalement relativement peu de succès. Elles influencent tout de même notablement l'intuitionnisme de Brouwer et ses successeurs (qui reste très marginal chez les mathématiciens), et ont connu des développements en théorie de la démonstration à partir des années 1960.

Le problème des trois corps

Poincaré est également l'inventeur de l'attracteur étrange, qui donne des informations sur les solutions du problème des trois corps, alors même qu'il est impossible d'expliciter ces solutions: il trouva que trois corps obéissant à la gravitation universelle de Newton ont, sous certaines conditions, une trajectoire qui dépend fortement de la condition initiale. Ainsi, on ne pourra jamais déterminer avec exactitude le destin de ces corps, car la moindre perturbation dans ses mesures entraînerait irrémédiablement une forte différence de trajectoire.

Ces supputations sont à l'origine de la théorie du chaos.

Conjecture de Poincaré

Article détaillé : Conjecture de Poincaré.

Posée en 1904 par Poincaré, la conjecture portant son nom était un problème de topologie énoncé sous cette forme par son auteur:

> "Considérons une variété compacte V à 3 dimensions sans bord. Est-il possible que le groupe fondamental de V soit trivial bien que V ne soit pas homéomorphe à une sphère de dimension 3?"

En l'an 2000, l'institut Clay plaça la conjecture parmi les sept problèmes du prix du millénaire. Il promit un million de dollars américains à celui qui démontrerait ou réfuterait la conjecture. Grigori Perelman a démontré cette conjecture en 2003, et sa démonstration fut validée en 2006. Mais le chercheur a refusé aussi bien la médaille Fields que le million de dollars.

Philosophe et homme de lettres

Il est aussi le dernier à avoir la double spécificité de comprendre l'ensemble des mathématiques de son époque et d'être en même temps un penseur philosophique. On le considère comme un des derniers grands savants universels, du fait de ses recherches dans des domaines transversaux (physique, optique, astronomie...), et de son attitude scientifique fondée sur une esthétique de la science et du nombre, à rapprocher de celle des anciens Grecs.

Poincaré a œuvré toute sa carrière durant à la vulgarisation de ses résultats et des grands travaux de la science, attitude qui sera reprise par des physiciens ultérieurs, comme Albert Einstein ou Stephen Hawking.

Avec *La Science et l'Hypothèse*, Poincaré intéresse le monde artistique, notamment les cubistes, et donne des clés de compréhension aux géométries non-euclidiennes.

De manière plus anecdotique, on peut noter que Poincaré aurait écrit un roman de jeunesse.

Participation à la vie citoyenne

En 1899, il adresse une lettre au Conseil de guerre de Rennes - chargé de juger le capitaine Dreyfus - critiquant les méthodes d'analyse du bordereau qui semble accuser Dreyfus. En 1904, à la demande de la Cour de cassation, Poincaré signe avec Darboux et Appell, un rapport qui sera versé au procès en révision de Dreyfus par cette même cour en 1906. Ce rapport, principalement rédigé par Poincaré, prend position en faveur de Dreyfus.

Honneurs

Plaque commémorative sur la maison natale de Henri Poincaré à Nancy

- Lauréat du Concours général.
- Médaille d'or de la Royal Astronomical Society (1900)
- Prix Bolyai (1905)
- Membre de l'Académie française (1908)
- Médaille Bruce (1911)
- Commandeur de la Légion d'honneur.

Pour l'ensemble de ses travaux, Poincaré fut pressenti à plusieurs reprises au prix Nobel de physique. L'Université Henri-Poincaré à Nancy est nommée en son honneur. Les Archives Henri Poincaré (laboratoire d'Histoire des Sciences et de Philosophie à l'université Nancy2) effectuent des recherches sur ses travaux. L'Institut Henri-Poincaré, au sein de l'Université Pierre-et-Marie-Curie, est créé en 1928.

Principales publications (cours et essais)

- *La Science et l'Hypothèse* (Flammarion - 1902)
- *La Valeur de la Science* (Flammarion - 1905)
- *Science et Méthode* (Flammarion - 1908)
- *Savants et écrivains* (Flammarion - 1910)
- *Les méthodes nouvelles de mécanique céleste* (Gauthier-Villars- 1893)
- *Dernières Pensées* (1913) Flammarion, réédité par Flammarion, complété d'autres articles en appendice à partir de la seconde édition de 1926
- *Ce que disent les choses*, (1911), Hachette: cinq chapitres publiés dans la revue pour enfants *Au seuil de la vie* (Hachette, 1910) et repris par Hachette en 1911 dans l'ouvrage éponyme "Ce que disent les choses". Réédité en 2010 chez Hermann, Paris
- Cours de la Faculté des sciences de Paris publiés par l'Association amicale des élèves et anciens élèves de la Faculté des sciences - Cours de Mécanique physique et expérimentale:
  - Cours professé pendant l'année 1885-1886. 1. partie, Cinématique pure-Mécanismes, Seconde partie, Potentiel, mécanique des fluides,
- Cours de la Faculté des sciences de Paris publiés par l'Association amicale des élèves et anciens élèves de la Faculté des sciences - Cours de Physique Mathématique:
  - Leçons sur la théorie mathématique de la lumière professées pendant le premier semestre 1887-1888

  - Électricité et optique, la lumière et les théories électrodynamiques, leçons professées en 1888, 1890 et 1899 (Carré et Naud- 1901)
  - Thermodynamique: leçons professées pendant le premier semestre 1888-89 - Rédaction de J. Blondin, Agrégé de l'Université- Paris Gauthier-Villars 1908 - Réimpression 1995 des Éditions Jacques Gabay
  - Capillarité: Leçons professées pendant le deuxieme semestre 1888-1889
  - Leçons sur la théorie de l'élasticité (Carré - 1892)
  - Théorie mathématique de la lumière II: nouvelles études sur la diffraction.-Théorie de la dispersion de Helmholtz: Leçons professées pendant le premier semestre 1891-1892
  - Théorie des tourbillons, leçons professées pendant le deuxième semestre 1891-1892 (Carré et Naud- 1893)
  - Les oscillations électriques, leçons professées pendant le premier trimestre 1892-1893 (Carré et Naud- 1900)
  - Théorie analytique de la propagation de la chaleur, leçons professées pendant le premier semestre 1893-1894 (Carré - 1895)
  - Calcul des probabilités, leçons professées pendant le deuxième semestre 1893-1894 (Carré et Naud- 1896)
  - Théorie du potentiel newtonien, leçons professées pendant le premier semestre 1894-1895 (Carré et Naud - 1899)
- Cours de la Faculté des sciences de Paris - Cours de mécanique céleste:
  - Tome I: Théorie générale des perturbations planétaires
  - Tome II, 1re partie: Développement de la fonction perturbatrice
  - Tome II, 2e partie: Théorie de la Lune
- ***Rapports présentés au congrès International de Physique réuni à Paris en 1900*** *sous les auspices de La Société Française de Physique rassemblés et publiés par Ch.-Ed. Guillaume et H. Poincaré, secrétaires généraux du congrès* - 3 volumes in-8° avec fugures; Paris, Gauthier-Villars - 1900

V. POLYGONES ET POLYEDRES

1. Polygones euclidiens

1.1. Polygones euclidiens

Par définition, les polygones euclidiens sont constitués de sommets et de côtés tels que:

- les sommets forment un ensemble fini (ordonné) de points d'un même plan;
- les côtés sont des segments de droites dont les extrémités sont des sommets;
- deux côtés consécutifs ne sont jamais alignés (colinéaires);
- tout sommet est l'extrémité d'exactement deux côtés;
- les sommets et les côtés forment une figure connexe (en une seule partie).

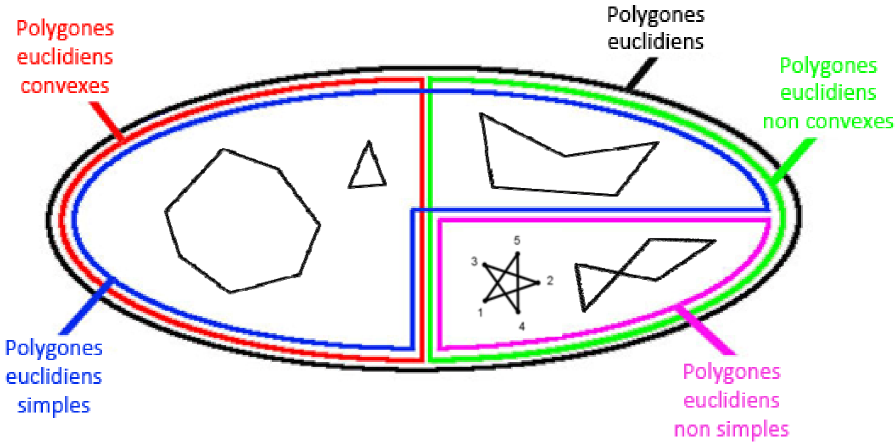
1.1.1. Polygones euclidiens simples

- Un polygone euclidien est simple si et seulement si deux côtés *non-consécutifs* ne se rencontrent pas.
- Un polygone euclidien est non-simple si et seulement s'il existe deux côtés non-consécutifs qui se rencontrent.

1.1.2. Polygones euclidiens convexes

- Un polygone euclidien est convexe si et seulement si tout segment fermé déterminé par deux points quelconques du polygone est entièrement contenu dans celui-ci.
- Un polygone euclidien est non convexe si et seulement si il existe (au moins) deux points du polygone tels que le segment fermé dont les extrémités sont les deux points soit non inclus au polygone.

1.2. Structure des polygones euclidiens



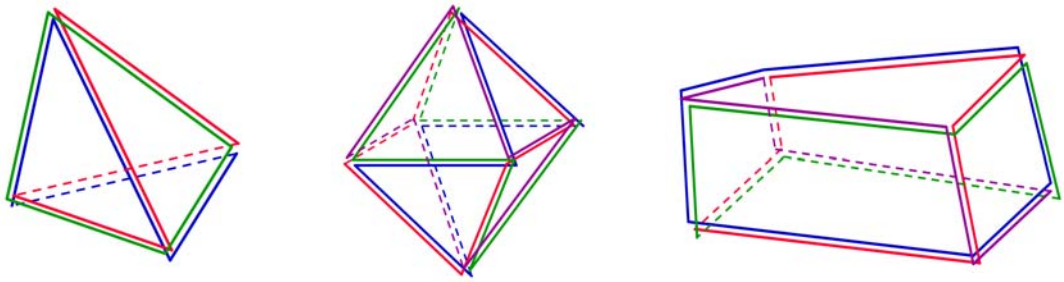
2. Polyèdres euclidiens

Un polyèdre euclidien est formé de sommets, d'arêtes et de faces, tels que:

- toutes les faces sont des polygones euclidiens;
- toute arête est à l'intersection de deux faces;
- les extrémités des arêtes sont les sommets du polyèdre;
- les faces, les sommets et les arêtes forment un ensemble connexe (en une seule partie);
- deux faces contiguës ne sont jamais coplanaires;
- aucun sommet n'est commun à plusieurs angles polyèdres.

Remarque: Euclidien au sens où les faces sont des polygones plans.
Il existe des polyèdres où les faces sont des polygones gauches (non plans): les polyèdres de Petrie.

À une couleur correspond un polygone gauche



3 faces gauches 4 faces gauches 4 faces gauches