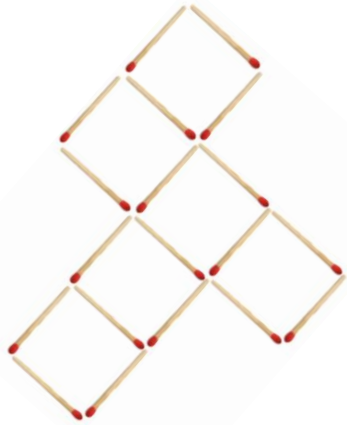
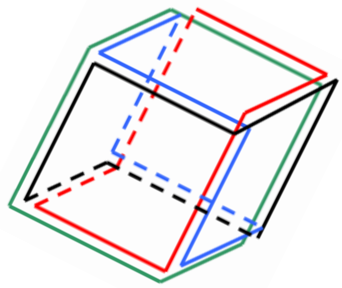
Cellule de Géométrie

Mathématiques élémentaires





Un monde merveilleux, surprenant et utile

dans l'apprentissage du raisonnement

Cellule de Géométrie – Catégorie pédagogique de la HEH

DEMAL Michel
demal.michel@skynet.be

DRAMAIX Jérémy
jeremy.dramaix@gmail.com

HIGNY Samuel
higny_samuel@hotmail.com

LAFOT Cindy
lafot.cindy@hotmail.com

MALAGUARNERA Angelo
angelo.malaguarnera@gmail.com

Avec la collaboration de

ADABBO F. - ALGRAIN J. - BIELEN R. - CAUCHIES N. - DUJARDIN S. - GENIN L.

GOETGEBUER C. - FOUCART D. - PICRY M. - PILAETE C. - SIMPLICIO D. - URBAIN L.

Plan

Solides Géométriques Euclidiens

1. Notions de polyèdres
   1.1. Introduction - Brève évolution historique
   + Petrie
   1.2. Les polyèdres selon GRÜNBAUM
2. Solides géométriques euclidiens
   2.1. Définition des solides géométriques euclidiens
   2.2. Classement des solides géométriques euclidiens
   2.3. Définitions des différents types de solides géométriques euclidiens
3. Polyèdres euclidiens
   3.1. Définition des polyèdres euclidiens
   3.2. Détermination raisonnée du nombre de faces, sommets et d'arêtes dans les polyèdres euclidiens
   3.3. Généralisation des propriétés concernant les faces, les sommets et les arêtes dans les polyèdres euclidiens
   3.4. Théorème des allumettes dans les polyèdres euclidiens
   3.5. Somme des angles-faces en chaque sommet d'un polyèdre euclidien
4. Polyèdres euclidiens convexes
   4.1. Définitions
   4.2. Propriétés associées aux polyèdres euclidiens convexes
   + Euler
5. A propos de la somme des angles faces arrivant en un même sommet dans les polyèdres
6. Classements des polyèdres euclidiens convexes
   6.1. Classement des polyèdres euclidiens convexes en fonction du nombre de faces
   + Tétraèdres euclidiens à faces isométriques
   + Polyèdres euclidiens convexes à 4 - 5 - 6 et 7 faces

6.2. Classement des polyèdres euclidiens convexes en prismes, pyramides, antiprismes et autres

+ Polyèdres euclidiens convexes à faces régulières isométriques

6.3. Classements des polyèdres euclidiens convexes en fonction de la régularité des faces

7. Automorphismes des polyèdres euclidiens convexes

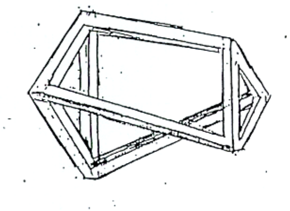
Solides géométriques euclidiens

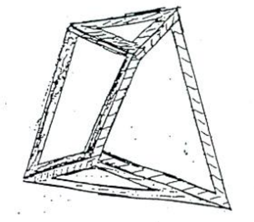
1. Notions de polyèdres

1.1. Introduction - Brève évolution historique

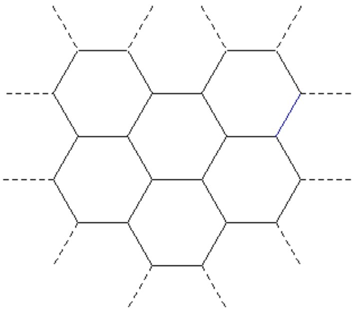
Jusqu'au début du 20e siècle, les polyèdres sont essentiellement des solides finis de l'espace déterminés par des plans. Cette vision entraîne assez naturellement la définition: *"solides dont toutes les faces sont planes"*. Cette vision est stable jusqu'au 20e siècle, à deux exceptions près: la première est due à Léonard de VINCI (1452 - 1519) et la deuxième à Johannes KEPLER (1571 - 1630).

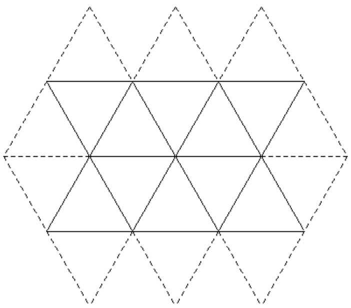
Léonard de VINCI dessine (sans le moindre commentaire) des polyèdres où il apparaît des faces non-planes (gauches).

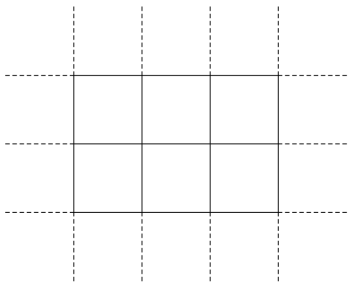




Johannes KEPLER (1619) accepte les trois pavages réguliers comme étant des polyèdres *plans infinis* constitués de polygones *plans finis*.







L'apport de PETRIE-COXETER

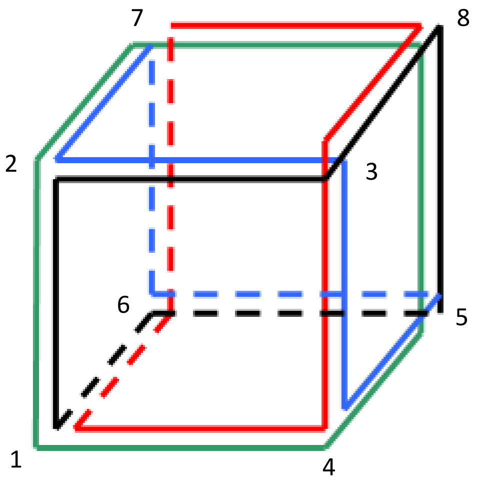
En 1926, l'imaginatif anglais John Flinders PETRIE, ami de Harold COXETER, observe deux situations qui vont bouleverser l'étude des polyèdres:

1° Polyèdres à faces non-planes (gauches)

Sur les polyèdres platoniciens, il perçoit *des polygones gauches réguliers*. Ce sont les fameux *"pétrigones"* sur les polyèdres platoniciens.

À titre d'exemple, il découvre que sur le cube, il existe quatre hexagones gauches réguliers. L'émergence de ces polygones gauches (polygones non coplanaires) a entraîné, entre autres, l'apparition de nouveaux types de polyèdres, à savoir: des polyèdres dont toutes les faces sont des polygones gauches. Dès lors et contrairement à bien des affirmations, les critères *"toutes les faces sont planes"* et *"toutes les faces sont des polygones"* ne sont plus des critères équivalents.

Cube de Petrie à faces gauches (non planes), déterminé par les quatre hexagones gauches (non coplanaires) réguliers suivants. Polygones gauches où tous les côtés sont isométriques (la longueur de l'arête du cube) et tous les angles sont isométriques (90°).



L'hexagone rouge (7 - 8 - 3 - 4 - 1 - 6)
L'hexagone bleu (7 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6)
L'hexagone vert (7 - 8 - 5 - 4 - 1 - 2)
L'hexagone noir (2 - 3 - 8 - 5 - 6 - 1)

Pour plus d'informations sur les polygones et les polyèdres de Petrie, cliquer ci-dessous.

Pétrie

Si ce type de polyèdre peut paraître surprenant, il vérifie néanmoins les caractéristiques habituelles des polyèdres usuels, à savoir:

- "Toute arête est un côté commun de deux faces."
  L'arête "3 - 8" est à l'intersection de l'hexagone noir et de l'hexagone rouge.
- "En chaque sommet, il arrive au moins trois faces."
  Au sommet 3, il arrive les hexagones bleu, noir et rouge.
- "Toutes les faces sont des polygones."
- "Le polyèdre est en une seule partie."
- "Aucun sommet n'est commun à plusieurs angles-solides."
- "Les extrémités des arêtes sont les sommets du polyèdre."

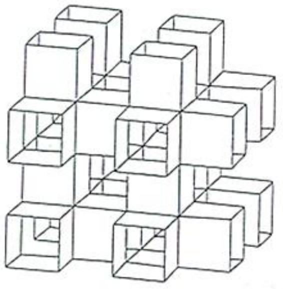
Remarques:

- En 1968, Shoen montre que ces "pétrigones" déterminés sur les polyèdres platoniciens ont une structure de polyèdres réguliers. (Toutes les faces sont des polygones gauches réguliers et en chaque sommet il arrive le même nombre de faces.)
- Les polyèdres sont aussi réguliers au sens de la transitivité des faces et des sommets.

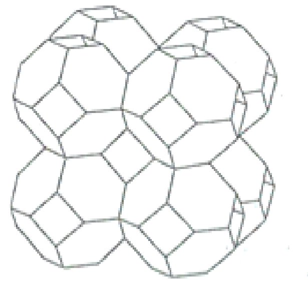
2° Polyèdres infinis non-plans

Petrie et Coxeter décrivent de nouveaux polyèdres, les fameuses éponges de Petrie-Coxeter qui sont des polyèdres *infinis non-plans* constitués respectivement en chaque sommet:

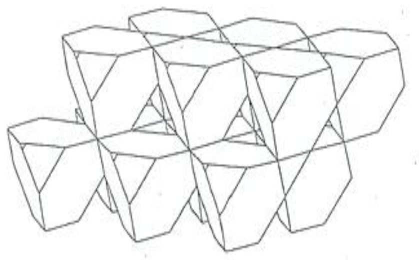
- soit de 6 carrés;
- soit de 4 hexagones plans réguliers;
- soit de 6 hexagones plans réguliers.



6 carrés en chaque sommet



4 hexagones plans réguliers en chaque sommet



6 hexagones plans réguliers en chaque sommet

Ces deux découvertes de PETRIE-COXETER sont les prémices d'une surprenante et merveilleuse aventure dans le monde des polyèdres de l'espace (E^3) et du plan (E^2). Cette aventure aboutira dans les années 1980 au classement des polyèdres réguliers de Branko GRÜNBAUM.

1.2. Les polyèdres selon GRÜNBAUM[1]

[…] Tout au long de l'histoire des mathématiques, différentes notions ont été introduites pour caractériser les polyèdres. Ce qui a donné lieu, non sans certains sarcasmes, à l'affirmation que "la seule chose qu'ont en commun tous les polyèdres, c'est en réalité leur nom." Par exemple, les polyèdres étaient considérés dans la Grèce antique comme des corps solides, mais plus tard, ils ont été traités plutôt comme des surfaces.

Évidemment, selon les polygones utilisés pour former les faces [(polygones plans finis convexes ou étoilés, polygones plans infinis, polygones gauches finis ou infinis…)], on obtient différents types de polyèdres. Ici, nous prendrons des polyèdres qui présentent les trois caractéristiques essentielles suivantes: un nombre fini de faces polygonales (de sorte que deux faces qui se coupent aient un sommet ou une arête en commun), des arêtes qui n'appartiennent qu'à deux faces et des sommets où arrivent plusieurs arêtes et faces (au moins trois).

La définition formulée par B. GRÜNBAUM est considérée comme très importante, car elle couvre un champ très vaste de polyèdres. Elle indique qu'un polyèdre P est une famille de polygones (faces de P) possédant les trois propriétés suivantes:

1. *Chaque arête n'est l'arête que d'une seule autre face.*
2. *Pour chaque paire d'arêtes A et A' de P, il existe une chaîne $A = A_0, F_1, F_2, A_2…, F_n, A_n = A'$ d'arêtes (A_i) et de faces (F_i) de P dans laquelle chaque face F_i est incidente à A_{i-1} et A_i.*
3. *Tout ensemble compact de l'espace (ensemble délimité qui entre dans une sphère et contient tous ses points frontière) ne peut couper qu'un nombre fini de faces de P.*

Naturellement, la classe privilégiée et très particulière des polyèdres peut très bien et très simplement être désignée par un ensemble délimité de l'espace exprimable en termes d'intersection d'un nombre de demi-espaces fermés, mais ces polyèdres convexes ne sont que la pointe visible d'un immense iceberg. La définition de GRÜNBAUM couvre un champ très vaste de polyèdres. […]

[1] CLAUDI A., *Les Mille Facettes de la beauté géométrique*, Barcelone, RBA Coleccionables S.A., 2012, Coll. "Le monde est mathématique", pg. 19

2. Solides géométriques euclidiens

Dans ce qui suit, nous proposons de découvrir et de démontrer des propriétés des polyèdres habituels que nous appellerons polyèdres euclidiens. Néanmoins, pour tenir compte des évolutions théoriques du 20e siècle sur les polyèdres, nous définirons les polyèdres euclidiens analysés à partir des relations d'incidences liant les sommets, les arêtes et les faces.

2.1. Définition des solides géométriques euclidiens

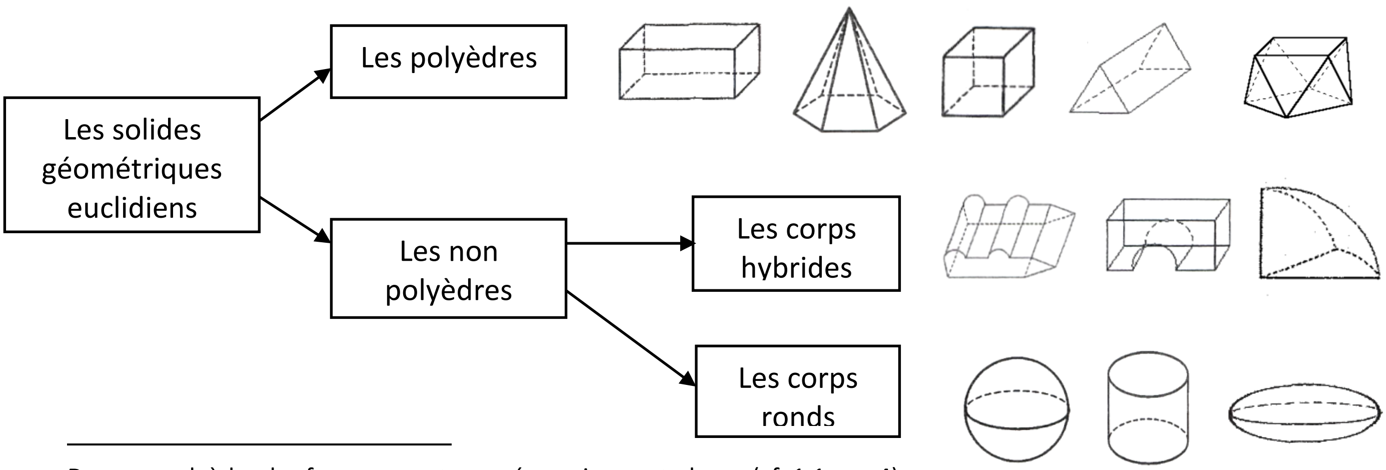
Un solide euclidien est constitué de sommets, d'arêtes et de faces, tel que:

- les sommets forment un ensemble fini de points de l'espace;
- les arêtes sont soit droites, soit courbes au sens des côtés des figures géométriques euclidiennes;
- toute arête est à l'intersection de deux faces;
- les faces sont: soit des surfaces courbes continues fermées ou des portions de surfaces courbes continues; soit des figures géométriques au sens euclidien (figures planes rondes, polygones plans, figures planes hybrides);
- les faces courbes continues sont sans "aspérité" (sans pointe) sauf éventuellement aux frontières (bords) des faces ou en un sommet;
- les extrémités des arêtes sont des sommets;
- dans les non-polyèdres, il peut exister des sommets qui n'appartiennent à aucune arête;
- deux faces planes contiguës ne sont jamais coplanaires;
- les faces, les arêtes et les sommets forment une seule partie (connexe);
- aucun sommet n'est commun à plusieurs angles-solides.

Il découle de cette définition qu'il existe trois types de solides géométriques euclidiens:

- les solides géométriques euclidiens dont toutes les faces sont des polygones: **les polyèdres.**
- les solides géométriques euclidiens dont toutes les faces sont des faces courbes (non-planes) ou (et) des faces planes rondes: **les corps ronds.**
- les solides géométriques euclidiens dont au moins une face plane est une figure hybride: **les corps hybrides.**

2.2. Classement des solides géométriques euclidiens

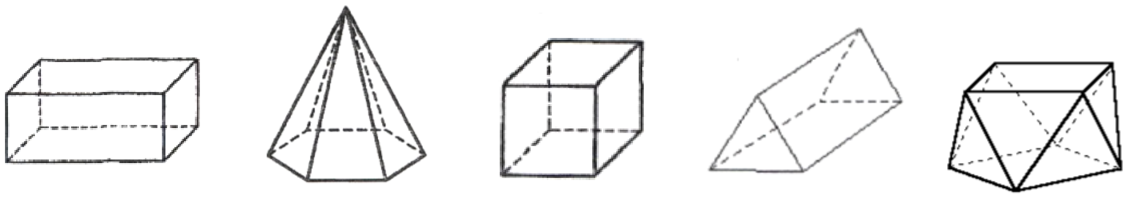


Dans un polyèdre, les faces ne sont pas nécessairement planes (cf. 1.1. pg. 4)

2.3. Définitions des différents types de solides géométriques euclidiens

POLYEDRE

Un polyèdre est un *"solide géométrique pour lequel toutes les faces sont des polygones".*

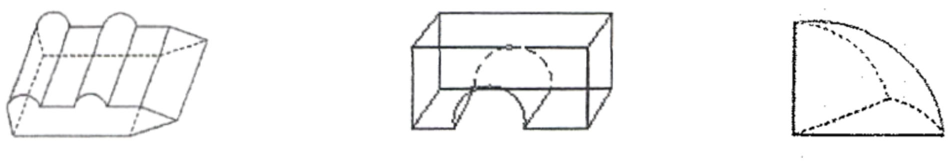


NON-POLYEDRE

Un non-polyèdre est un *"solide géométrique pour lequel il existe au moins une face non polygonale".*

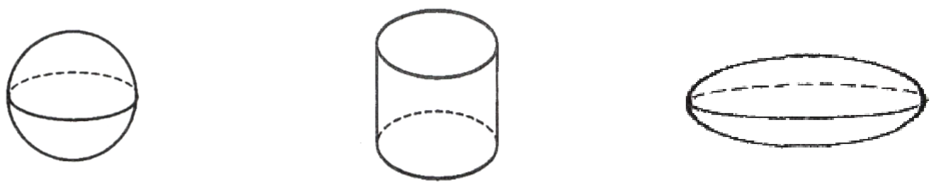
Corps hybride

Un corps hybride est un *"solide géométrique où il existe au moins une face plane hybride".*



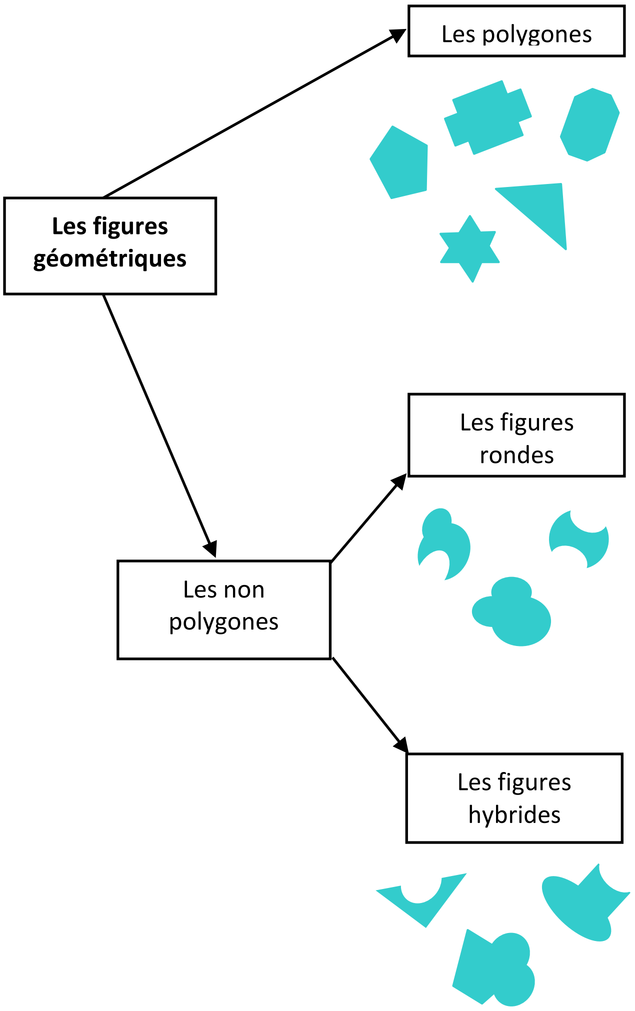
Corps rond

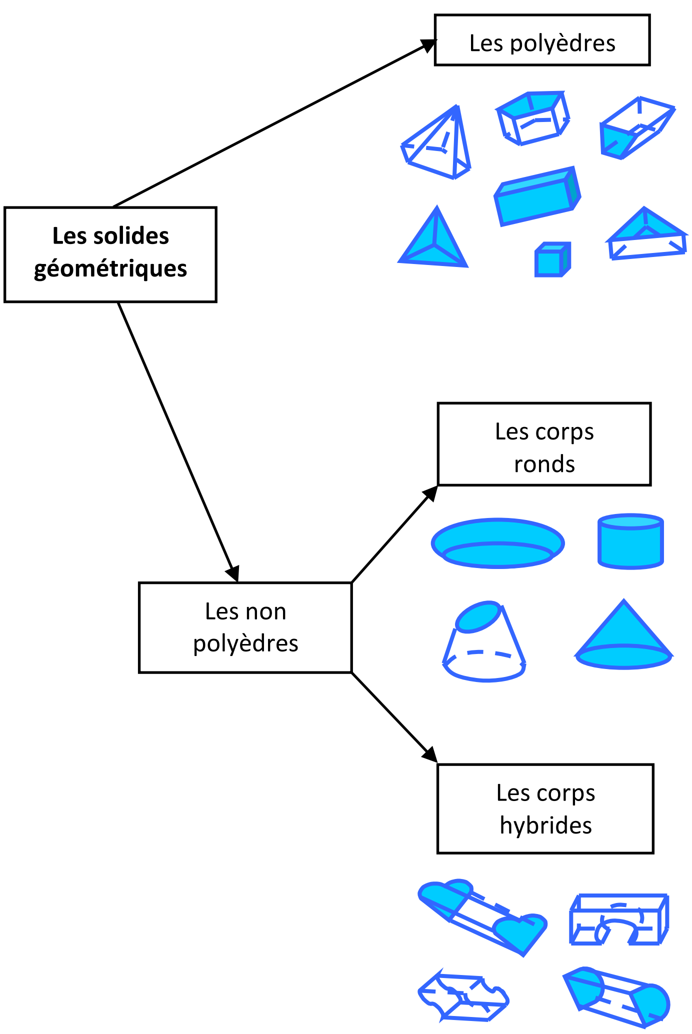
Un corps rond est un "*solide géométrique dont toutes les faces sont des faces courbes (non-planes) ou (et) des faces planes rondes".*



Remarque: Les critères retenus pour classer les solides géométriques ont pour avantage:

- d'une part, d'aboutir à un classement des solides géométriques analogue aux classements des figures géométriques planes.





- d'autre part d'être des critères géométriques et non pas des critères non mathématiques comme par exemple *"solides qui roulent ou ne roulent pas"* ou *"solides boules ou non boules"*.

3. Polyèdres euclidiens

3.1. Définition des polyèdres euclidiens

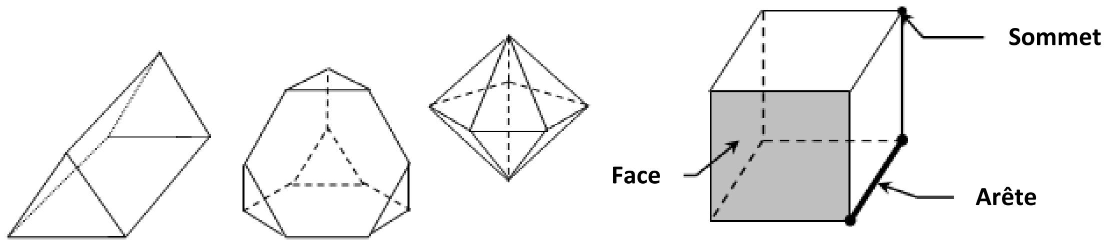
La trop brève description historique des polyèdres montre qu'une "nouvelle" définition pour les polyèdres habituels (polyèdres euclidiens) s'impose. Actuellement en mathématiques élémentaires, les polyèdres euclidiens peuvent se définir de la manière suivante:

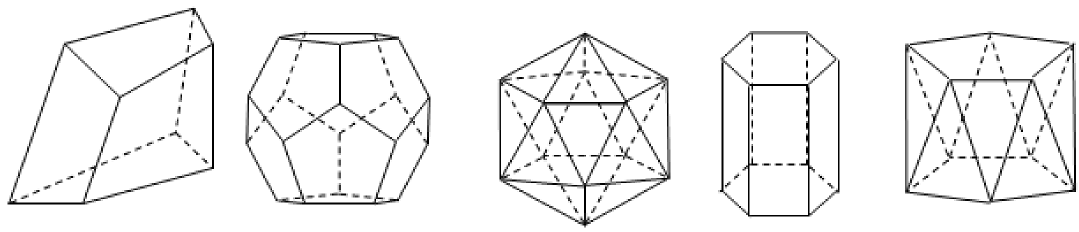
Un polyèdre euclidien est formé de sommets, d'arêtes et de faces, tel que:

- toutes les faces sont des polygones euclidiens[3];
- toute arête est à l'intersection de deux faces;
- les extrémités des arêtes sont les sommets du polyèdre;
- les faces, les sommets et les arêtes forment un ensemble en une seule partie (connexe);
- deux faces contiguës ne sont jamais coplanaires;
- aucun sommet n'est commun à plusieurs angles polyèdres.

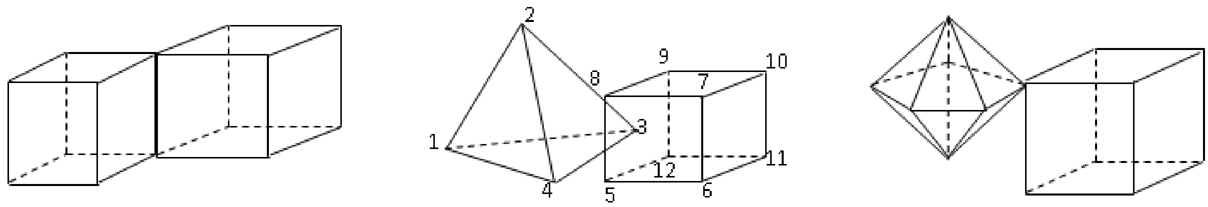
[3] Polygones plans dont deux côtés consécutifs ne sont jamais alignés.

Exemples de polyèdres euclidiens:





Exemples de solides formés de faces polygonales qui ne sont pas des polyèdres:



3.2. Détermination raisonnée du nombre de faces, de sommets et d'arêtes dans les polyèdres euclidiens

✓ À l'intention des élèves

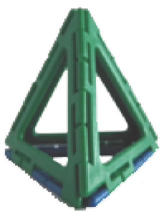
Cliquer ci-contre pour ouvrir le fichier. F-S-A

✓ À l'intention des "initiés"

Cliquer ci-contre pour ouvrir le fichier. F-S-A

3.3. Généralisation des propriétés concernant les faces, les sommets et les arêtes dans les polyèdres euclidiens

1. Tout polyèdre euclidien contient au minimum quatre faces.



2. En chaque sommet d'un polyèdre euclidien arrivent au minimum trois arêtes.
3. En chaque sommet d'un polyèdre euclidien arrivent au minimum trois faces.

4. Dans tout polyèdre, il existe au moins deux faces qui possèdent le même nombre de côtés.

Exemple:

Considérons que la plus grande face d'un polyèdre euclidien soit un 11-gone.

Comme toute arête est à l'intersection de 2 faces, ce polyèdre possède au minimum "11 + 1" faces. Le 11-gone et les 11 polygones qui se "raccrochent" aux 11 côtés de ce plus grand polygone.

Ces 12 faces sont des n-gones choisis parmi les polygones dont le nombre de cotés peut varier de 3 à 11 ($n \in \{3, 5, 6, \dots 11\}$).

Potentiellement, Il se pourrait que les faces de ce polyèdre aient toutes un nombre de côtés différents. Dans ce cas il y aurait au maximum, "9 (= 11 – 3 + 1)" faces ayant un nombre de côtés différents.

Comme nous savons que le polyèdre contient au minimum 12 faces ayant un nombre de côtés compris entre 3 et 11, il y aura donc au minimum 3 autres faces dont le nombre de cotés sera un nombre compris entre 3 et 11 (éventuellement trois fois le même nombre de côtés).

Dès lors, nous pouvons affirmer que dans tout polyèdre euclidien, il existe au moins deux faces qui possèdent le même nombre de côtés.

Cas général:

Considérons que la plus grande face d'un polyèdre euclidien soit un p-gone.

Comme toute arête est à l'intersection de 2 faces, ce polyèdre possède au minimum "p + 1" faces. Le p-gone et les "p" polygones qui se "raccrochent" aux p côtés de ce plus grand polygone.

Ces "p" faces sont des n-gones choisis parmi les polygones dont le nombre de côtés peut varier de 3 à p ($n \in \{3, 4, 5, 6, \dots p\}$).

Potentiellement, Il se pourrait que les faces de ce polyèdre aient toutes un nombre de côtés différents. Dans ce cas il y aurait au maximum, "p – 2 (= p – 3 + 1)" faces ayant un nombre de côtés différents.

Comme nous savons que le polyèdre contient au minimum "p + 1" faces ayant un nombre de côtés compris entre 3 et "p", il y aura donc au minimum 3 autres faces dont le nombre de cotés sera un nombre compris entre 3 et p (éventuellement trois fois le même nombre de côtés).

Dès lors, nous pouvons affirmer que dans tout polyèdre euclidien, il existe au moins deux faces qui possèdent le même nombre de côtés.

Remarque: Cette propriété peut aussi se traduire par: "*Les faces ne peuvent pas être toutes différentes*". (Il n'existe pas un polyèdre où toutes les faces sont des polygones différents (***un*** triangle, ***un*** quadrilatère, ***un*** 5-gone… ***un*** n-gone…)

5. Si un polyèdre possède "F" faces triangulaires, alors il possède $\frac{3 \cdot F}{2}$ arêtes.

$$A = \frac{3 \cdot F}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2\,A = 3\,F$$

Explication: il y a 3 arêtes par face et il y a F faces.

Dès lors, on a envie de dire qu'il y a 3 x F arêtes. Mais comme chaque arête appartient à 2 faces, on les a donc comptées 2 fois. Nous devons donc diviser ce nombre d'arêtes par 2.

Le polyèdre possède donc $\frac{3 \cdot F}{2}$ arêtes.

6. Si un polyèdre possède "F" faces triangulaires, alors le nombre de faces est nécessairement un nombre pair.

   Démonstration par l'absurde: supposons un nombre impair, "2p + 1" faces:

   $$A = \frac{3 \times (2p + 1)}{2} = (3\,p + 1) + \frac{1}{2},$$

   Ce qui est impossible car un polyèdre ne peut avoir des "demi-arêtes".

7. Tout polyèdre constitué uniquement de faces polygonales ayant un ***même*** nombre impair de côtés possède un nombre pair de faces.

   Démonstration par l'absurde:

   Comme toute arête appartient à deux faces (toute arête est incidente à deux faces), le nombre d'arêtes d'un polyèdre est donné par la somme du nombre de côtés de toutes les faces, le tout divisé par deux.

   $$A = \frac{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_i + \ldots + n_f}{2}$$

   où n_i représente le nombre de côtés de la $i^{ème}$ face;
   f représente le nombre de faces du polyèdre.

   Étant donné que le polyèdre est constitué uniquement de faces polygonales ayant un même nombre impair de côtés, nous pouvons dire que $n_1 = n_2 = n_3 = \ldots = n_i = \ldots = n_f = 2n + 1$ où $n \in IN_0$.
   On aurait:

   $$A = \frac{(2n + 1) \cdot F}{2}$$

   où 2n+1 représente le nombre de côtés des faces;
   F représente le nombre de faces du polyèdre.

   Supposons que le nombre de faces (F) du polyèdre formé de polygones ayant le ***même*** nombre impair de côtés, soit impair: F = 2p + 1

   D'où

   $$A = \frac{(2n + 1) \cdot (2p + 1)}{2}$$

   $$A = \frac{2n \cdot 2p + 2n + 2p + 1}{2}$$

   $$A = (2\,np + n + p) + \frac{1}{2}.$$

   Dès lors, si le polyèdre possédait un nombre impair de faces alors, il y aurait "une demi arête" ce qui bien entendu est impossible. Dés lors, "*un polyèdre constitué de faces polygonales ayant* ***tous*** *le même nombre impair de côtés a un nombre pair de faces*".

8. Tout polyèdre constitué uniquement de faces polygonales ayant un nombre impair de côtés possède un nombre pair de faces.

   Démonstration par l'absurde:

   Comme toute arête appartient à deux faces (toute arête est incidente à deux faces), le nombre d'arêtes d'un polyèdre est donné par la somme du nombre de côtés de toutes les faces, divisé par deux.

$$A = \frac{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_i + \ldots + n_f}{2}$$

où n_i représente le nombre de côtés de la $i^{ème}$ face
f représente le nombre de faces du polyèdre.

Étant donné que le polyèdre est constitué uniquement de faces polygonales ayant un nombre impair de côtés, nous pouvons dire que:

$n_1 = 2p_1 + 1$; $n_2 = 2p_2 + 1$; $n_3 = 2p_3 + 1$; … ;$n_i = 2p_i + 1$; … ; $n_f = 2p_f + 1$ où $n_i \in IN_0$.

Supposons que le nombre de faces du polyèdre (F) formé de polygones ayant un nombre impair de côtés, soit impair: $F = 2t + 1$ où $t \in IN_0 \setminus \{1\}$

On aurait:

$$A = \frac{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_i + \ldots + n_f}{2}$$

D'où

$$A = \frac{(2p_1 +1) + (2p_2 +1) + (2p_3 +1) + \ldots + (2p_i +1) + \ldots + (2p_f +1)}{2}$$

$$A = \frac{(2p_1 + 2p_2 + 2p_3 + \ldots + 2p_i + \ldots + 2p_f) + \overbrace{(1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots + 1)}^{\text{"2t + 1" fois}}}{2}$$

$$A = \frac{2(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_i + \ldots + p_f) + (2t + 1)}{2}$$

$$A = \frac{2(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_i + \ldots + p_f + t) + 1}{2}$$

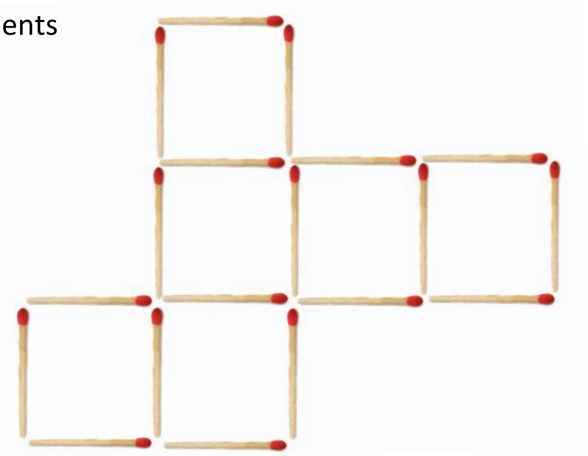
$$A = (p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_i + \ldots + p_f + t) + \frac{1}{2}$$

Dès lors, si le polyèdre possédait un nombre impair de faces alors, il y aurait "une demi arête" ce qui bien entendu est impossible. Dés lors, "*un polyèdre constitué de faces polygonales ayant un nombre impair de côtés a un nombre pair de faces*".

3.4. Théorème des allumettes dans les polyèdres euclidiens

Combien d’allumettes faut-il pour représenter un dessin de développement de polyèdre?

Soit un des développements du cube.



Remarque: une allumette correspond à une arête dessinée.

Soit ANC, le nombre d'arêtes non coupées;
Soit AD, le nombre d'arêtes dessinées;
Soit AC, le nombre d'arêtes coupées.

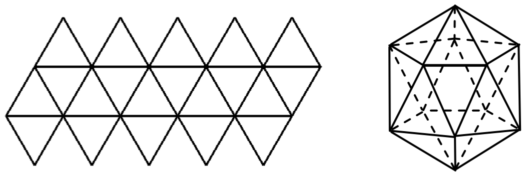
Pour le **cube** ci-dessus,

ANC = 5 (pour que les 6 carrés "tiennent" ensemble, il faut qu'il y ait 5 arêtes charnières)

AC = 12 – 5 = 7

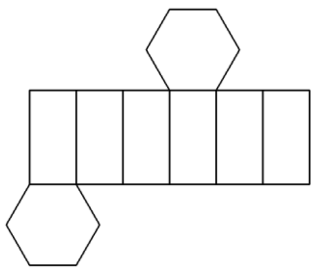
AD = ANC + 2 · AC
= 5 + 2 x 7 = 19

Pour l'**icosaèdre régulier**,

	F = 20 S = 12 A = 30 ANC = 19 AC = 30 – 19 = 11 AD = ANC + 2 · AC = 19 + 2 x 11 = 41

Remarque: AC représente le nombre de tenons nécessaires dans un développement en carton.

Pour un **prisme** dont la base est un n-gone,

	F = n + 2 A = 3 n S = 2 n ANC = (n + 2) – 1 = n + 1 AC = 3 n – (n + 1) = 2 n – 1 AD = ANC + 2 · AC = (n + 1) + 2 (2 n – 1) = 5 n – 1

Généralisation

Soit P un polyèdre de F faces, A arêtes et S sommets.

ANC = F – 1 (pour que les faces "tiennent" ensemble, il faut qu'il y ait (F – 1) arêtes charnières)

AC = A – ANC
= A – (F – 1)
= A – F + 1

$$\begin{aligned} AD &= ANC + 2 \cdot AC \\ &= F - 1 + 2\,(A - F + 1) \\ &= F - 1 + 2\,A - 2\,F + 2 \\ &= 2\,A - F + 1 \\ &= A + A - F + 1 \end{aligned}$$

Remarque: Si le polyèdre est convexe, alors $AD = A + S - 1$ et $AC = S - 1$

En effet,

$$\begin{aligned} P \text{ convexe } &\Rightarrow F + S - A = 2 \\ &\Rightarrow F + S - A = 1 + 1 \\ &\Rightarrow S - 1 = A - F + 1 \end{aligned}$$

Nous montrerons que dans un polyèdre convexe: $F + S - A = 2$ (cf. 4.2. prop. 7 pg 19)

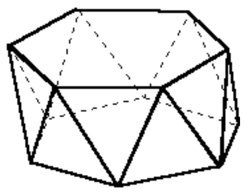
Dès lors, pour les polyèdres convexes,

$$\begin{aligned} AC &= A - F + 1 \\ &= S - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AD &= A + (A - F + 1) \\ &= A + S - 1 \end{aligned}$$

Exemple:

Pour un **antiprisme** dont les bases sont des n-gones,

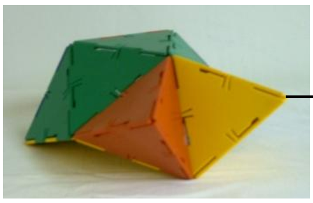
	$F = 2\,n + 2$ $S = 2\,n$ $A = 4\,n$ $AC = S - 1 = 2\,n - 1$ $AD = A + S - 1 = 4\,n + 2\,n - 1 = 6\,n - 1$

3.5. Somme des angles-faces en chaque sommet d'un polyèdre euclidien

En chaque sommet d'un polyèdre euclidien, la somme des angles-faces arrivant à ce sommet est soit:

- inférieure à 360°;

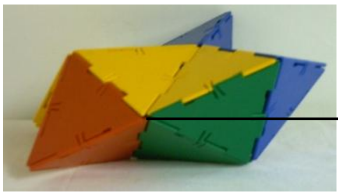
Photo 1



$\sum \hat{\alpha}_i = 180° < 360°$

- égale à 360°;

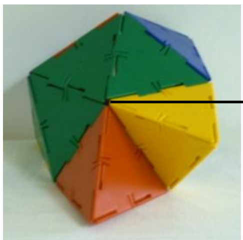
Photo 2



$\sum \hat{\alpha}_{\text{i}} = 360°$

- supérieure à 360°.

Photo 3

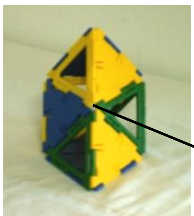


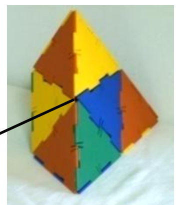
$\sum \hat{\alpha}_{\text{i}} = 420° > 360°$

<u>Remarques</u>

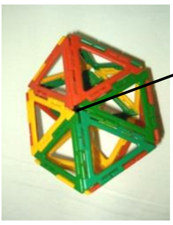
1) Toutes les faces des polyèdres ci-dessus sont des triangles équilatéraux.
2) Il existe des polyèdres euclidiens où, en un sommet, la somme des angles faces arrivant en ce sommet est égale à 360° sans pour autant que toutes les faces aboutissant à ce sommet soient dans un même plan. Dans ce cas, le polyèdre euclidien est nécessairement non-convexe. (cf.: photo 2)
3) Il existe des polyèdres "non euclidiens" convexes tels qu'en un sommet, la somme des angles faces arrivant en ce sommet soit égale à 360°. Dans ce cas on a au moins deux faces contiguës dans un même plan. (cf.: photo 4)

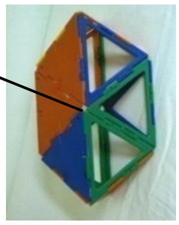
Photo 4





$\sum \hat{\alpha}_{\text{i}} = 360°$





4. Polyèdres euclidiens convexes

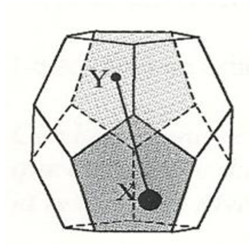
4.1. Définitions

- Un polyèdre euclidien est convexe si et seulement si tout segment, dont les extrémités sont deux points quelconques du polyèdre, est inclus au polyèdre.

Ou encore

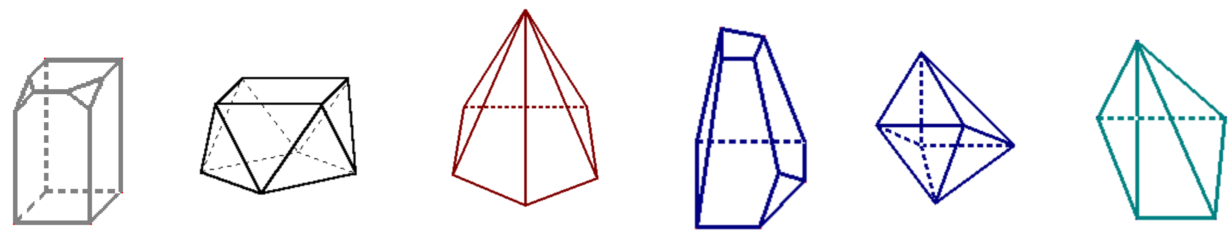
- Un polyèdre euclidien (P) est convexe si et seulement si:

$$\forall\, x, y \in P: [x\,,\,y] \subset P$$



Polyèdre euclidien convexe

Exemples de polyèdres euclidiens convexes:

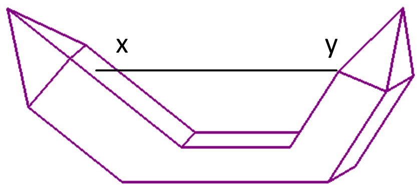


- Un polyèdre euclidien est non convexe si et seulement si il existe un segment, dont les extrémités sont deux points quelconques du polyèdre, qui n'est pas entièrement inclus au polyèdre.

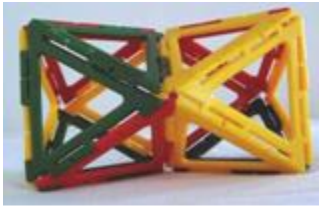
Ou encore

- Un polyèdre euclidien (P) est non convexe si et seulement si:

$$\exists\, x, y \in P: [x\,,\,y] \not\subset P$$



Exemples de polyèdres euclidiens non convexes:



4.2. Propriétés associées aux polyèdres euclidiens convexes

1. Tout polyèdre euclidien convexe est entièrement contenu dans un des demi-espaces déterminés par chaque plan contenant une face du polyèdre.
2. Tout polyèdre euclidien convexe peut être déterminé par l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces.
3. Toutes les faces d'un polyèdre euclidien convexe sont des polygones convexes.
4. Dans tout polyèdre convexe, la somme des angles de toutes les faces vaut $2 \cdot 180° \, (A - F)$

Démonstration: $\mathbf{\hat{S}_F = 2 \cdot 180° \, (A - F)}$

Où $\hat{S}_F$ représente la somme des angles de toutes les faces.

Rappel: dans tout polygone convexe de n côtés, la somme des angles intérieurs vaut: $(n - 2) \cdot 180°$

Exemple: Soit la $j^{\text{ième}}$ face, on a: $(n_j - 2)\, 180°$

Soit $\hat{S}_{F1}$ la somme des angles de la $1^{\text{ère}}$ face

Soit $\hat{S}_{F2}$ la somme des angles de la $2^{\text{ème}}$ face

$\vdots$

Soit $\hat{S}_{Fj}$ la somme des angles de la $j^{\text{ème}}$ face

$\vdots$

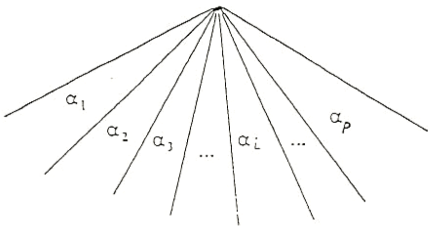
Soit $\hat{S}_{Ff}$ la somme des angles de la $f^{\text{ème}}$ face

Dès lors,

$$\begin{aligned}
\hat{S}_F &= \hat{S}_{F1} + \hat{S}_{F2} + \ldots + \hat{S}_{Fj} + \ldots + \hat{S}_{Ff} \\
&= (n_1 - 2)\, 180° + (n_2 - 2)\, 180° + \ldots + (n_j - 2)\, 180° + \ldots + (n_f - 2)\, 180° \\
&= 180°\, (n_1 + n_2 + \ldots + n_j + \ldots + n_f) - 2 \cdot 180° \cdot F \\
&= 180°\, (2\,A) - 2 \cdot 180° \cdot F \\
&= 2 \cdot 180°\, (A - F) \\
&= 360°\, (A - F)
\end{aligned}$$

D'où, $\hat{S}_F = 360°\, (A - F)$

5. En chaque sommet d'un polyèdre euclidien convexe, l'amplitude d'un angle-face arrivant en ce sommet doit être inférieure à la somme des autres angles faces arrivant en ce sommet (inégalité angulaire).



$$\hat{\alpha}_i < \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 + \ldots + \hat{\alpha}_{i-1} + \hat{\alpha}_{i+1} + \ldots + \hat{\alpha}_p \quad \forall\, i = 1, \ldots, p$$

$$\Leftrightarrow$$

$$2.\hat{\alpha}_i < \sum_{i=1}^{p} \hat{\alpha}_j \quad \text{où } p \in \mathbb{N} \text{ et } p \geq 3$$

6. En chaque sommet d'un polyèdre euclidien convexe, il est nécessaire que la somme des angles-faces arrivant en ce sommet doit être inférieure à 360°.

$$\sum_{i=1}^{p} \hat{\alpha}_i < 360° \quad \text{où } p \in \mathbb{N} \text{ et } p \geq 3$$

Remarque: Il s'agit d'une condition nécessaire non-suffisante.

Exemple:

En chaque sommet de ce polyèdre,

$$\sum_{i=1}^{p} \hat{\alpha}_i < 360°$$

néanmoins ce polyèdre n'est pas convexe.

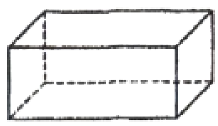
7. Dans tout polyèdre euclidien convexe, il existe une relation liant le nombre de faces (F), le nombre d'arêtes (A) et le nombre de sommets (S):

$$\boxed{S - A + F = 2^{(*)} \Leftrightarrow F + S - A = 2}$$

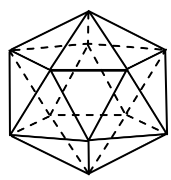
Cliquer ci-contre pour le détail de l'obtention de la formule. EULER Réseau Plan

8. Dans tout polyèdre euclidien convexe, la somme des déficiences angulaires de tous les sommets vaut 720° (Descartes).

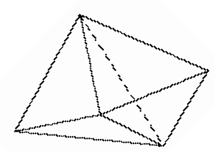
Démonstration:



8 x 90° = 720°



12 x 60° = 720°



2 x 180° + 3 x 120° = 720°

$$\hat{D} = \hat{D}_{S1} + \hat{D}_{S2} + \ldots + \hat{D}_{Sj} + \ldots + \hat{D}_{Ss}$$

(*) Il s'agit de la fameuse caractéristique d'Euler.

Où $\widehat{D}_{S1} = 360° - \widehat{S}_{S1}$ avec $\widehat{S}_{S1}$ la somme des angles faces arrivant au sommet 1.

$\widehat{D}_{S2} = 360° - \widehat{S}_{S2}$ avec $\widehat{S}_{S2}$ la somme des angles faces arrivant au sommet 2.

$\vdots$

$\widehat{D}_{Sj} = 360° - \widehat{S}_{Sj}$ avec $\widehat{S}_{Sj}$ la somme des angles faces arrivant au sommet j.

$\vdots$

$\widehat{D}_{Ss} = 360° - \widehat{S}_{Ss}$ avec $\widehat{S}_{Ss}$ la somme des angles faces arrivant au sommet s.

Dès lors,

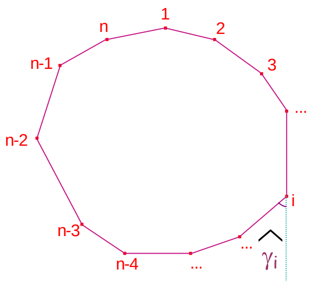
$$
\begin{aligned}
\widehat{D} &= \widehat{D}_{S1} + \widehat{D}_{S2} + \ldots + \widehat{D}_{Sj} + \ldots + \widehat{D}_{Ss} \\
&= (360° - \widehat{S}_{S1}) + (360° - \widehat{S}_{S2}) + \ldots + (360° - \widehat{S}_{Sj}) + \ldots + (360° - \widehat{S}_{Ss}) \\
&= S \cdot 360° - (\widehat{S}_{S1} + \widehat{S}_{S2} + \ldots + \widehat{S}_{Sj} + \ldots + \widehat{S}_{Ss}) \\
&= S \cdot 360° - (360° (A - F))^{(*)} \\
&= 360° (S - A + F) \\
&= 360° (F + S - A) \\
&= 360° \cdot 2 \\
&= 720°
\end{aligned}
$$

D'où, $\widehat{D} = 720°$

(*) En additionnant les sommes des angles faces arrivant à tous les sommets du polyèdre, on obtient la somme des angles de toutes les faces du polyèdre.

Remarques:

- Cette propriété est à rapprocher de la 4ème propriété du point 4.2 sur la somme des angles supplémentaires dans les n-gones convexes.



La somme des amplitudes des angles supplémentaires aux angles intérieurs vaut:

$$\sum_{i=1}^{n} \widehat{\gamma}_i = 360°.$$

- Si le polyèdre possède 1 trou polyèdrique alors $\widehat{D} = 360° (F + S - A) = 360° \cdot 0 = 0$

  Si le polyèdre possède 2 trous polyèdriques alors $\widehat{D} = 360° (F + S - A) = 360° \cdot (-2) = -720°$

  $\vdots$

  Voir à ce sujet le document: Relation d'Euler et les polyèdres sans "trou"

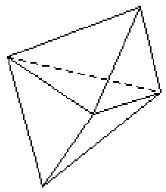
  EULER
  Réseau Plan

9. Dans tout polyèdre euclidien convexe:

Remarque: La signification de F, S, A F_j, S_m, k et p sont expliqués à la page 34.

- $F = \sum_{j=3}^{k} F_j = F_3 + F_4 + \ldots + F_j + \ldots + F_k$
- $S = \sum_{m=3}^{p} S_m = S_3 + S_4 + \ldots + S_m + \ldots + S_p$
- $2A = \sum_{j=3}^{k} j.F_j = 3F_3 + 4F_4 + \ldots + j.F_j + \ldots + k.F_k \Leftrightarrow A = \dfrac{\sum_{j=3}^{k} j.F_j}{2} = \dfrac{3F_3 + 4F_4 + \ldots + j.F_j + \ldots + k.F_k}{2}$

A titre d'exemple:

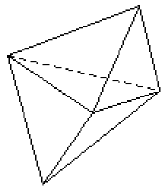


- $F_3 = 6$
- $A = \dfrac{\sum_{j=3}^{k} j.F_j}{2} = \dfrac{3F_3}{2} = \dfrac{3 \text{ x } 6}{2} = \dfrac{18}{2} = 9$

Dès lors, $2A = 3F_3 = 3 \text{ x } 6 = 18$.

- $2A = \sum_{m=3}^{p} m.S_m = 3S_3 + 4S_4 + \ldots + m.S_m + \ldots + p.S_p \Leftrightarrow A = \dfrac{\sum_{m=3}^{p} m.S_m}{2} = \dfrac{3S_3 + 4S_4 + \ldots + m.S_m + \ldots + p.S_p}{2}$

A titre d'exemple:



- $S_3 = 2$ et $S_4 = 3$
- $A = \dfrac{\sum_{m=3}^{p} m.S_m}{2} = \dfrac{3S_3 + 4S_4}{2} = \dfrac{(3 \text{ x } 2) + (4 \text{ x } 3)}{2} = \dfrac{6 + 12}{2} = \dfrac{18}{2} = 9$

Dès lors, $2A = 3S_3 + 4S_4 = (3 \text{ x } 2) + (4 \text{ x } 3) = 6 + 12 = 18$.

- $A + 6 \leq 3F \leq 2A$ et $A + 6 \leq 3S \leq 2A$

Démonstration:

a) $3F \leq 2A$

En effet,

$$\begin{aligned} 2A &= 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \ldots + jF_j + \ldots + kF_k \\ &= 3.(F_3 + F_4 + F_5 + \ldots + F_j + \ldots + F_k) + F_4 + 2F_5 + \ldots + (j-3)\,F_j + \ldots + (k-3)\,F_k \\ &= 3F + \underbrace{F_4 + 2F_5 + \ldots + (j-3)\,F_j + \ldots + (k-3)\,F_k}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Dès lors, $2A \geq 3F$

b) $3S \leq 2A$

En effet,

$$\begin{aligned} 2A &= 3S_3 + 4S_4 + 5S_5 + \ldots + mS_m + \ldots + pS_p \\ &= 3.(S_3 + S_4 + S_5 + \ldots + S_m + \ldots + S_p) + S_4 + 2S_5 + \ldots + (m-3)\,S_m + \ldots + (p-3)\,S_p \\ &= 3S + \underbrace{S_4 + 2S_5 + \ldots + (m-3)\,S_i + \ldots + (p-3)\,S_p}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Dès lors, $2A \geq 3S$

c) $A + 6 \leq 3F$

En effet, comme les polyèdres sont convexes: $F + S – A = 2$

D'où, $3F + 3S – 3A = 6$ et $3S = 6 + 3A – 3F$

De plus, $3S \leq 2A$

Dès lors, $6 + 3A – 3F \leq 2A$ et $6 + A \leq 3F$

d) $A + 6 \leq 3S$

En effet, comme les polyèdres sont convexes: $F + S – A = 2$

D'où, $3F + 3S – 3A = 6$ et $3F = 6 + 3A – 3S$

De plus, $3F \leq 2A$

Dès lors, $6 + 3A – 3S \leq 2A$ et $6 + A \leq 3S$

Ces quatre dernières relations peuvent se résumer par:

Dans tout polyèdre convexe:
$A + 6 \leq 3F \leq 2A$
$A + 6 \leq 3S \leq 2A$

où F représente le nombre de faces du polyèdre convexe;

S représente le nombre de sommets du polyèdre convexe;

A représente le nombre d'arêtes du polyèdre convexe;

F_j représente le nombre de faces ayant "j" côtés;

S_m représente le nombre de sommets où se rejoignent "m" arêtes;

k représente le nombre de côtés de la face ayant le plus de côtés;

p représente le nombre d'arêtes (de faces) du sommet où il y arrive le plus d'arêtes (de faces).

10. Si un polyèdre euclidien convexe est formé uniquement de pentagones réguliers et d'hexagones réguliers alors il possède nécessairement 12 pentagones réguliers.

Démonstration:

i. Le polyèdre euclidien étant convexe, on a: $F + S – A = 2$.

ii. En chaque sommet d'un polyèdre, il arrive au minimum 3 faces.

iii. En chaque sommet d'un polyèdre euclidien convexe, la somme des angles faces arrivant en un même sommet est strictement inférieure à 360°.

Il s'ensuit donc qu'il ne peut arriver plus de trois faces en un sommet.

En effet, en un sommet il ne peut arriver que:

- soit deux "6-gones réguliers" et un "5-gone régulier":
  ($2 \cdot 120° + 108° < 360°$);
- soit trois "5-gones réguliers":
  ($3 \cdot 108° < 360°$);
- soit deux "5-gones réguliers" et un "6-gone régulier":
  ($2 \cdot 108° + 120° < 360°$).

Remarque: il est impossible d'avoir trois "6-gones réguliers" en un sommet ($3 \cdot 120° = 360°$) ou plus de trois faces (la somme des angles faces serait supérieure à 360°).

➔ **Il en résulte que tous *les sommets sont nécessairement d'ordre trois.***

iv. Le polyèdre considéré possède nécessairement 12 pentagones réguliers quel que soit le nombre d'hexagones.

On a:

$F = F_5 + F_6$; $F + S - A = 2$; $A = \dfrac{5F_5 + 6F_6}{2}$ et $S = \dfrac{5F_5 + 6F_6}{3}$

Dès lors, en remplaçant dans la relation d'Euler F, S, A par leur valeur, il vient:

$$(F_5 + F_6) + \frac{(5F_5 + 6F_6)}{3} - \frac{(5F_5 + 6F_6)}{2} = 2 \qquad \text{(on multiplie les 2 membres par 6)}$$

$$6F_5 + 6F_6 + 10F_5 + 12F_6 - 15F_5 - 18F_6 = 12$$

$1F_5 + 0F_6 = 12$ et $F_5 = 12$ quel que soit le nombre d'hexagones réguliers.

11. Si un polyèdre euclidien convexe est formé uniquement de carrés et d'hexagones réguliers alors il possède nécessairement 6 carrés réguliers.

Démonstration:

i. Le polyèdre euclidien étant convexe, on a: F + S – A = 2.

ii. En chaque sommet d'un polyèdre, il arrive au minimum 3 faces.

iii. En chaque sommet d'un polyèdre euclidien convexe, la somme des angles faces arrivant en un même sommet est strictement inférieure à 360°.

Il s'ensuit donc qu'il ne peut arriver plus de trois faces en un sommet.

En effet, en un sommet il ne peut arriver que:

- soit deux "6-gones réguliers" et un carré:
  ($2 \cdot 120° + 90° < 360°$);
- soit un "6-gones réguliers" et deux carrés:
  ($120° + 2 \cdot 90° < 360°$).
- soit trois carrés:
  ($3 \cdot 90° < 360°$);

Remarque: il est impossible d'avoir trois "6-gones réguliers" en un sommet ($3 \cdot 120° = 360°$) ou plus de trois faces (la somme des angles faces serait supérieure ou égale à 360°).

➔ **Il en résulte que tous *les sommets sont nécessairement d'ordre trois.***

iv. Le polyèdre considéré possède nécessairement 6 carrés quel que soit le nombre d'hexagones.

On a:

$F = F_4 + F_6$; $F + S - A = 2$; $A = \dfrac{4F_4 + 6F_6}{2}$ et $S = \dfrac{4F_4 + 6F_6}{3}$

Dès lors, en remplaçant dans la relation d'Euler F, S, A par leur valeur, il vient:

$$(F_4 + F_6) + \frac{(4F_4 + 6F_6)}{3} - \frac{(4F_4 + 6F_6)}{2} = 2 \qquad \text{(on multiplie les 2 membres par 6)}$$

$$6F_4 + 6F_6 + 8F_4 + 12F_6 - 12F_4 - 18F_6 = 12$$

$2F_4 + 0F_6 = 12$ et $F_4 = 6$ quel que soit le nombre d'hexagones réguliers.

12. Il n'existe pas de polyèdre convexe ayant 7 arêtes.

Première démonstration par l'absurde:

i. Supposons qu'il existe un polyèdre convexe possédant 7 arêtes. De la relation d'Euler (F + S – A = 2), il vient que le nombre de faces (F) plus le nombre de sommets (S) vaut 9:

$$F + S - A = 2 \quad \Leftrightarrow \quad F + S = 9$$

ii. Comme dans tout polyèdre convexe, il existe au minimum 4 faces et 4 sommets, F et S peuvent prendre potentiellement les valeurs suivantes:

F	S	F + S
4	5	9
5	4	9

Remarque: Les valeurs F = 0, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9 sont à rejeter car incompatible avec la contrainte au minimum 4 faces et au minimum 4 sommets.

Exemple: Si F = 7 alors S = 2 ce qui est impossible.

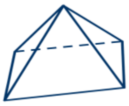
iii. Les valeurs (F = 4 et S = 5) et (F = 5 et S = 4) sont aussi à rejeter:

- F = 4 et S = 5

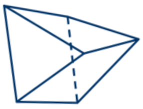
  Si F = 4 alors toutes les faces sont des triangles (démonstration par l'absurde) et dans ce cas $A = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ ce qui est contraire à l'hypothèse d'absurdité (A = 7).

- F = 5 et S = 4

  Si F = 5 alors le polyèdre est soit composé de 4 triangles et d'1 quadrilatère (pyramides à bases quadrilatère) soit de 2 triangles et de 3 quadrilatères (polyèdres du type prisme).



Dans ce cas il y aurait 5 sommets et 8 arêtes, ce qui est contraire à l'hypothèse d'absurdité (A = 7).



Dans ce cas, il y aurait 6 sommets et 9 arêtes, ce qui est contraire à l'hypothèse d'absurdité (A = 7).

Deuxième démonstration par l'absurde:

i. Supposons qu'il existe un polyèdre convexe possédant 7 arêtes. De la relation d'Euler (F + S – A = 2), il vient que le nombre de faces (F) plus le nombre de sommets (S) vaut 9:

$$F + S - A = 2 \quad \Leftrightarrow \quad F + S = 9$$

ii. Comme dans tout polyèdre convexe, il existe au minimum 4 faces et 4 sommets, F et S peuvent prendre potentiellement les valeurs suivantes:

F	S	F + S
4	5	9
5	4	9

Remarque: Les valeurs F = 0, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9 sont à rejeter car incompatible avec la contrainte au minimum 4 faces et au minimum 4 sommets.

Exemple: Si F = 7 alors S = 2 ce qui est impossible.

iii. Les valeurs ($F = 4$ et $S = 5$) et ($F = 5$ et $S = 4$) sont aussi à rejeter:

- F = 4 et S = 5

  Comme en chaque sommets arrivent au moins 3 arêtes, le nombre d'arêtes de ce polyèdre serait de $\frac{3 \times 5}{2} = 7,5$ c'est-à-dire au minimum 8 arêtes, ce qui est contraire aux hypothèses.

- F = 5 et S = 4

  Comme les faces possèdent au minimum 3 arêtes, le nombre d'arêtes de ce polyèdre serait de $\frac{3 \times 5}{2} = 7,5$ c'est-à-dire au minimum 8 arêtes, ce qui est contraire aux hypothèses.

Troisième démonstration par l'absurde:

i. Dans tout polyèdre convexe (cf. 4.2. prop. 9 pg. 22), on a:

$$A + 6 \leq 3F \leq 2A$$

ii. Dès lors, s'il existe un polyèdre convexe à 7 arêtes, on aurait:

$$7 + 6 \leq 3F \leq 2 . 7$$
$$\Leftrightarrow$$
$$13 \leq 3F \leq 14$$
$$\Leftrightarrow$$
$$4,3333\ldots \leq F \leq 4,6666\ldots$$

Ce qui impliquent que ce polyèdre aurait un nombre de faces non-entier. Ce qui est impossible.

13. Tout polyèdre convexe possède au moins un triangle ou un carré ou un pentagone.

Démonstration:

i. Le polyèdre étant convexe, il vérifie la relation d'Euler: $F + S - A = 2 \Leftrightarrow F + S = 2 + A$

ii. De plus (cf. 4.2. prop. 9 pg. 20-21), on a:

$$F = F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + \ldots + F_k$$
$$S = S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + \ldots + S_p$$

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6 + \ldots + kF_k \quad (1)$$
$$2A = 3S_3 + 4S_4 + 5S_5 + 6S_6 + \ldots + pS_p \quad (2)$$

iii. En remplaçant dans la relation d'Euler doublée F, S et A par les valeurs exprimées ci-avant, on obtient deux relations possibles à partir de: $2F + 2S = 4 + 2A$

✓ **Relation I:** Où on a remplacé 2A par l'expression (1), on a:

$$(2F_3 + 2F_4 + 2F_5 + \ldots + 2F_k) + (2S_3 + 2S_4 + 2S_5 + \ldots + 2S_p) = 4 + (3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \ldots + kF_k)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$2S_3 + 2S_4 + 2S_5 + 2S_6 + \ldots + 2S_p = 4 + 1F_3 + 2F_4 + 3F_5 + 4F_6 + \ldots + (k-2)F_k$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\boxed{1F_3 + 2F_4 + 3F_5 = 2S_3 + 2S_4 + 2S_5 + 2S_6 + \ldots + 2S_p - 4 - 4F_6 - 5F_7 - 6F_8 - 7F_9 - \ldots - (k-2)F_k}$$

✓ **Relation II:** Où on a remplacé 2A par l'expression (2), on a:

$$(2F_3 + 2F_4 + 2F_5 + \ldots + 2F_k) + (2S_3 + 2S_4 + 2S_5 + \ldots + 2S_p) = 4 + (3S_3 + 4S_4 + 5S_5 + \ldots + pS_p)$$
$$\Leftrightarrow$$

$2F_3 + 2F_4 + 2F_5 + 2F_6 + \ldots + 2F_k = 4 + 1S_3 + 2S_4 + 3S_5 + 4S_6 + \ldots + (p-2)S_p$

$\Leftrightarrow$

$\boxed{2F_3 + 2F_4 + 2F_5 = 4 + 1S_3 + 2S_4 + 3S_5 + 4S_6 + \ldots + (p-2)S_p - 2F_6 - 2F_7 - 2F_8 - 2F_9 - \ldots - 2F_k}$

En multipliant par deux cette dernière relation, on obtient la relation équivalente II':

<u>Relation II'</u>:

$\boxed{4F_3 + 4F_4 + 4F_5 = 8 + 2S_3 + 4S_4 + 6S_5 + 8S_6 + \ldots + (2p-4)S_p - 4F_6 - 4F_7 - 4F_8 - 4F_9 - \ldots - 4F_k}$

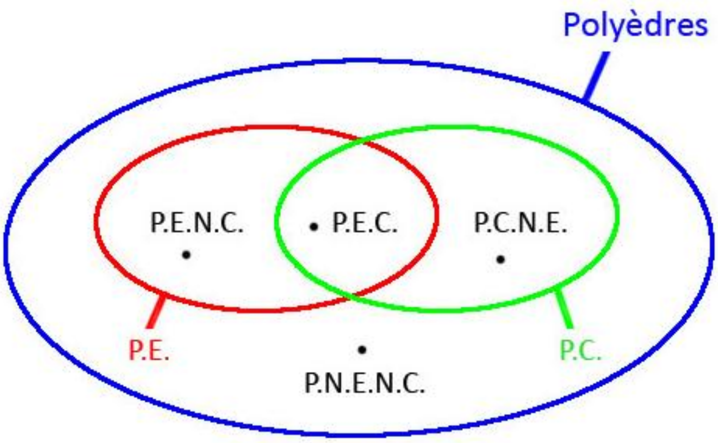
iv. Soustrayons la relation I de la relation II', on obtient:

$$3F_3 + 2F_4 + 1F_5 = \underbrace{12 + 0S_3 + 2S_4 + 4S_5 + 6S_6 + \ldots + (2p-6)S_p + 0F_6 + 1F_7 + 2F_8 + 3F_9 + \ldots + (k-6)F_k}_{\geq 0}$$

Il vient que $3F_3 + 2F_4 + 1F_5 \geq 12$

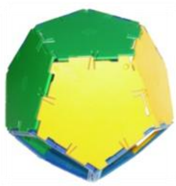
Il en résulte donc que F_3, F_4, F_5 ne peuvent être nuls en même temps. En effet, si F_3, F_4, F_5 étaient nuls tous en même temps, nous aurions que $0 \geq 12$ ce qui est évidemment impossible. D'où, tout polyèdre convexe possède au moins un triangle ou un carré ou un pentagone.

5. <u>À propos de la somme des angles-faces arrivant en un même sommet dans les polyèdres</u>

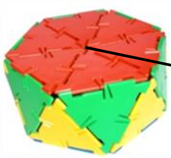


En chaque sommet:

euclidiens convexes (P.E.C.): $\Sigma\, \hat{\alpha}_i < 360°$ (cond. nécessaire)

Polyèdres non euclidiens convexes (P.N.E.C.): $\Sigma\, \hat{\alpha}_i \leq 360°$ (cond. nécessaire)

$\Sigma\, \hat{\alpha}_i = 360°$

Polygones convexes (P.C.): $\Sigma\, \hat{\alpha}_i \leq 360°$

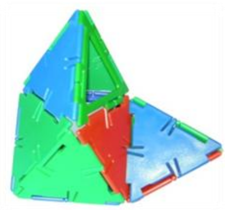
Polyèdres euclidiens non convexes (P.E.N.C.): $\Sigma\, \hat{\alpha}_i \; \substack{<\\=\\>} \; 360°$



$\Sigma\, \hat{\alpha}_i = 540°$

Polyèdres non euclidiens non convexes (P.N.E.N.C.): $\Sigma\, \hat{\alpha}_i \; \substack{<\\=\\>} 360°$



6. Classements des polyèdres euclidiens convexes

Dans ce qui suit lorsque nous parlerons de polyèdres convexes il s'agira de polyèdres euclidiens convexes.

Il est de tradition de classer les polyèdres euclidiens convexes selon trois classements:

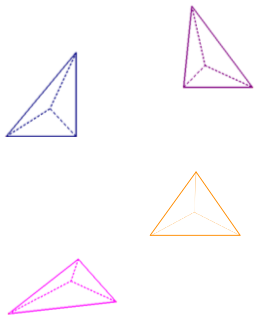
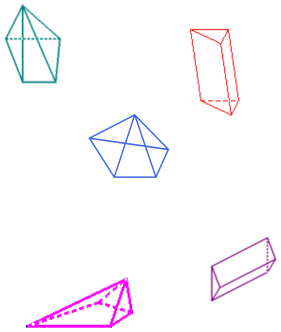
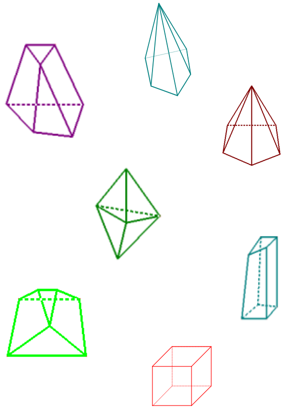
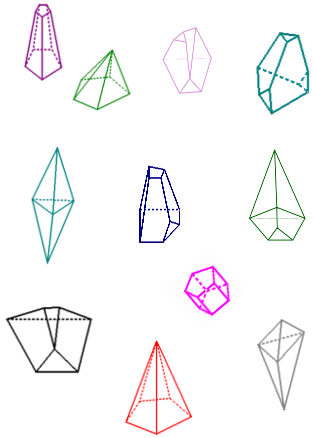
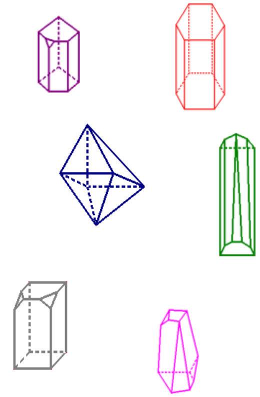
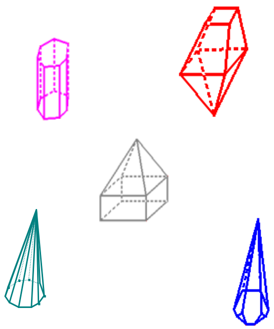
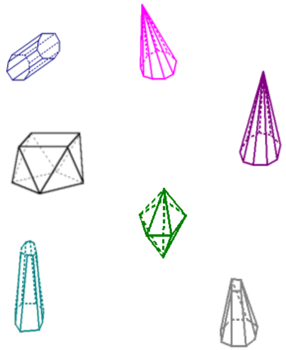
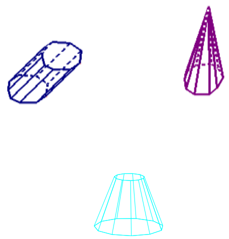
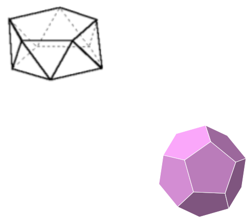
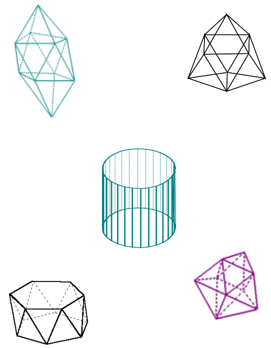
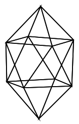
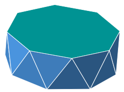
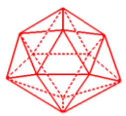
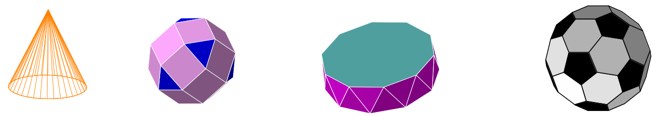
- Le classement des polyèdres convexes en fonction du nombre de faces;
- Le classement des polyèdres convexes en pyramides, prismes, antiprismes et autres;
- Le classement des polyèdres convexes en fonction de la régularité des faces.

6.1. Classement des polyèdres euclidiens convexes en fonction du nombre de faces

Semblablement au classement des polygones que l'on peut classer en fonction du nombre de côtés, on peut classer les polyèdres euclidiens convexes en fonction du nombre de faces. Ce sont les polyèdres à 4, 5, 6 … 20 … n faces où n est un naturel supérieur ou égal à 4.

Le tableau ci-après synthétise le classement des polyèdres convexes en fonction du nombre de faces.

Classement des polyèdres euclidiens convexes en fonction du nombre de faces

4 faces	5 faces	6 faces	7 faces	8 faces
				
9 faces	**10 faces**	**11 faces**	**12 faces**	**14 faces**
				
16 faces	**18 faces**	**20 faces**	**Plus de 20 faces**	
				

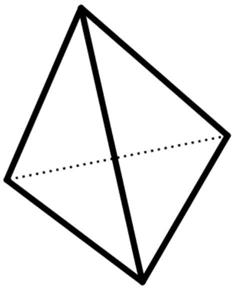
Types de polyèdres euclidiens convexes à 4 - 5 - 6 et 7 faces

Pour chaque nombre de faces, il est possible de distinguer différents types de polyèdres euclidiens convexes.

Cliquer ci-contre pour lire la démonstration de ces différents cas. 4 - 5 - 6 et 7 faces

On peut montrer qu'il existe:

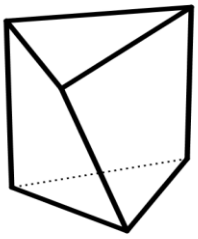
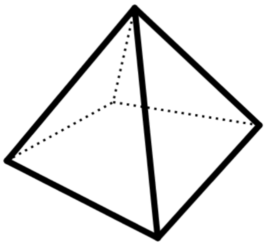
- Un seul type de polyèdre euclidien convexe à 4 faces;



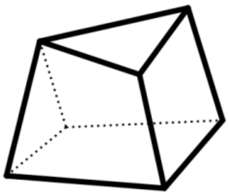
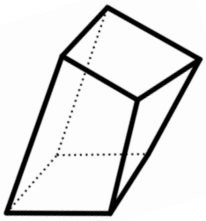
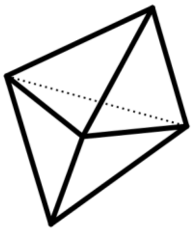
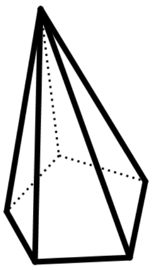
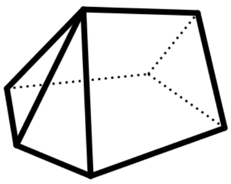
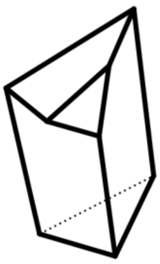
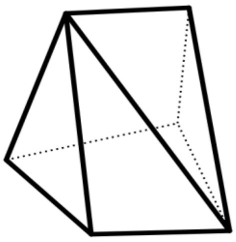
Cliquer ci-dessous pour de plus amples informations sur les tétraèdres euclidiens à faces isométriques.

T.E.F.I.

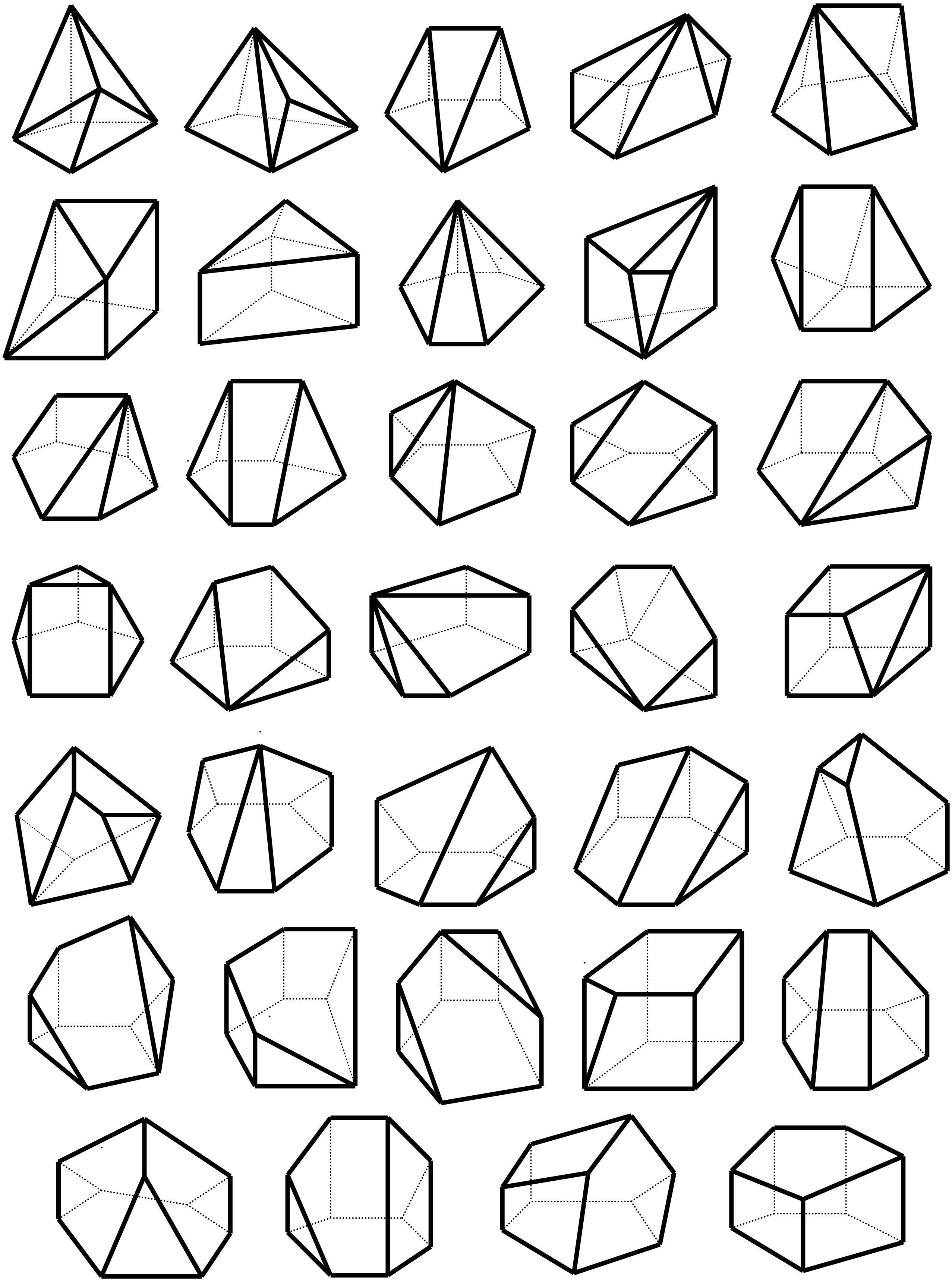
- 2 types de polyèdres euclidiens convexes à 5 faces;

- 7 types de polyèdres euclidiens convexes à 6 faces;

- 34 polyèdres euclidiens convexes à 7 faces.



On peut montrer qu'il existe 257 types de polyèdres à 8 faces, 2606 à 9 faces, 32300 à 10 faces, 440564 à 11 faces, 6384634 à 12 faces, 96262938 à 13 faces… 107854282197058 à 18 faces.

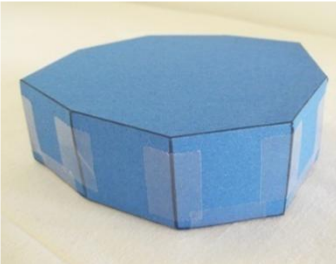
6.2. Classement des polyèdres euclidiens convexes en prismes, pyramides, antiprismes et autres

PRISMES

Les prismes sont des polyèdres constitués de deux faces polygonales (n-gone) parallèles et isométriques reliées directement par des parallélogrammes. Les faces polygonales sont les bases et les parallélogrammes sont les faces latérales.

Remarque: Dans un prisme, il existe une translation qui amène une base sur l'autre.

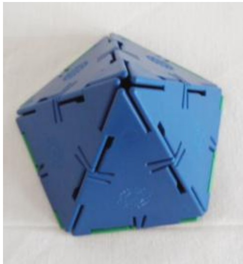
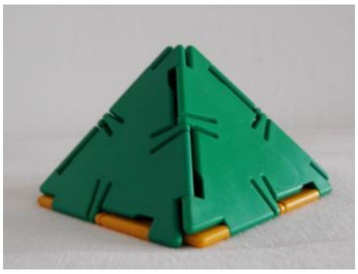
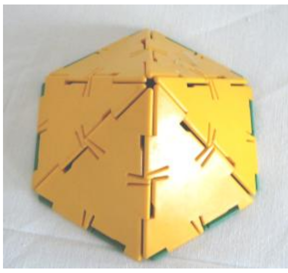
Exemples:



PYRAMIDES

Les pyramides sont des polyèdres constitués d'une face polygonale (n-gone) et de triangles ayant un sommet en commun. La face polygonale est la base et les triangles sont les faces latérales.

Exemples:

ANTIPRISMES

Les antiprismes sont des polyèdres constitués de deux faces polygonales isométriques (n-gone) parallèles reliées directement par des triangles. Les faces polygonales sont les bases et les triangles sont les faces latérales.

Remarque: Dans un antiprisme, il n'existe pas de translation qui amène une base sur l'autre mais un vissage(*).

(*) Un vissage est la composée d'une rotation de l'espace suivie d'une translation de l'espace dont la direction est parallèle à l'axe de la rotation.

Exemples:

LES DIFFERENTS TYPES DE PRISMES (CONVEXES)

A. Définition

Les prismes sont des polyèdres constitués de deux faces polygonales (n-gone) parallèles isométriques reliées directement par des parallélogrammes. Les faces polygonales sont les bases et les parallélogrammes sont les faces latérales.

Les prismes peuvent se classer en deux catégories:

- Les prismes à bases régulières
- Les prismes à bases non régulières

Chaque catégorie se divise en deux sous-catégories:

- Les prismes droits
- Les prismes non droits

Prismes

Prismes à bases régulières P.B.R.

Prismes droits à bases régulières P.D.B.R.

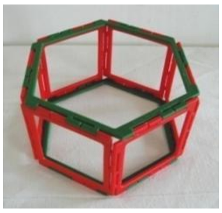
Prismes non droits à bases régulières P.N.D.B.R.

Prismes à bases non régulières P.B.N.R.

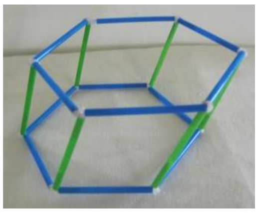
Prismes droits à bases non régulières P.D.B.N.R.

Prismes non droits à bases non régulières P.N.D.B.N.R.

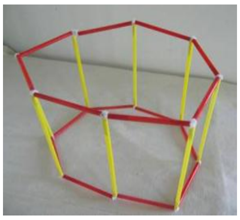
Exemples:



Prisme droit à bases régulières



Prisme non droit à bases régulières



Prisme droit à bases non régulières

Prisme non droit à bases non régulières

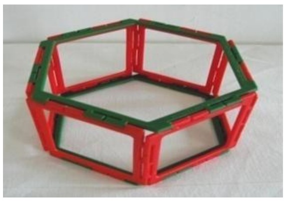
B. Les différents types de prismes

1) Les prismes à bases régulières (P.B.R.)

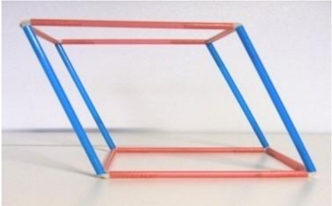
Ce sont des prismes dont les bases sont des polygones réguliers.

Ceux-ci se subdivisent en deux catégories:

- Les prismes droits à bases régulières (P.D.B.R.): les faces latérales sont des rectangles (carrés ou rectangles quelconques).



- Les prismes non droits à bases régulières (P.N.D.B.R.): les faces latérales sont des parallélogrammes (parallélogrammes quelconques ou losanges).

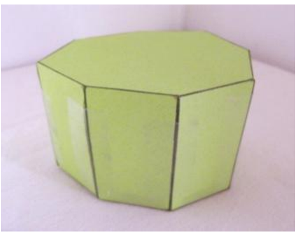


2) Les prismes à bases non régulières (P.B.N.R)

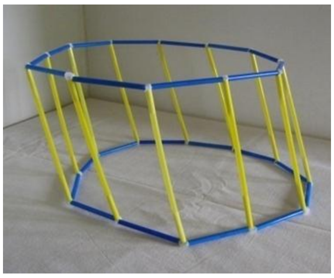
Ce sont des prismes dont les bases sont des polygones non réguliers.

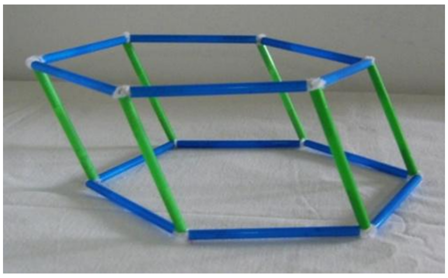
Ceux-ci se subdivisent en deux catégories:

- Les prismes droits à bases non régulières (P.D.B.N.R): les faces latérales sont des rectangles (carrés ou rectangles quelconques).



- Les prismes non droits à bases non régulières (P.N.D.B.N.R.): les faces latérales sont des parallélogrammes (parallélogrammes quelconques ou losanges).





LES DIFFERENTS TYPES DE PYRAMIDES

A. Définition

Les pyramides sont des polyèdres constitués d'une face polygonale (un n-gone) et de triangles ayant un sommet en commun. La face polygonale est la base et les triangles sont les faces latérales.

Les pyramides peuvent se classer en deux catégories:

- Les pyramides à base régulière
- Les pyramides à base non régulière

Chaque catégorie se divise en deux sous-catégories:

- Les pyramides droites
- Les pyramides non droites

Pyramides
- Pyramides à base régulière Py.B.R.
  - Pyramides droites à base régulière Py.D.B.R.
  - Pyramides non droites à base régulière Py.N.D.B.R.
- Pyramides à base non régulière Py.B.N.R.
  - Pyramides droites à base non régulière Py.D.B.N.R.
  - Pyramides non droites à base non régulière Py.N.D.B.N.R.

Exemples:

Pyramide droite à base régulière

Pyramide non droite à base régulière

Pyramide droite à base non régulière

Pyramide non droite à base non régulière

B. Les différents types de pyramides (convexes)

1) Les pyramides à base régulière (Py.B.R.)

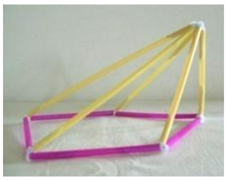
Ce sont des pyramides dont la base est un polygone régulier.

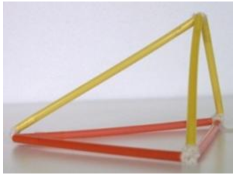
Celles-ci se subdivisent en deux catégories:

- Les pyramides droites à base régulière (Py.D.B.R.): les arêtes latérales sont de même longueur[3].

[3] **Propriété:** Le sommet d'une pyramide droite à base régulière se trouve sur la perpendiculaire qui passe par le centre du cercle circonscrit à la base.

- Les pyramides non droites à base régulière (Py.N.D.B.R.): les arêtes latérales n'ont pas toutes la même longueur.





2) Les pyramides à base non régulière (Py.B.N.R)

Ce sont des pyramides dont la base est un polygone non régulier.

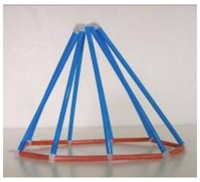
Celles-ci se subdivisent en deux catégories:

- Les pyramides droites à base non régulière (Py.D.B.N.R.): les arêtes latérales sont de même longueur.



Remarque: La base d'une pyramide droite non régulière est inscrite dans un cercle.

- Les pyramides non droites à base non régulière (Py.N.D.B.N.R.): les arêtes latérales n'ont pas toutes la même longueur.


Remarque: La base d'une pyramide non droite non régulière n'est pas inscrite dans un cercle.

LES DIFFERENTS TYPES D'ANTIPRISMES

A. Définition

Les antiprismes sont des polyèdres constitués de deux faces polygonales isométriques (n-gone) parallèles reliées directement par des triangles. Les faces polygonales sont les bases et les triangles sont les faces latérales.

Les antiprismes peuvent se classer en deux catégories:

- Les antiprismes à bases régulières
- Les antiprismes à bases non régulières

Chaque catégorie se divise en deux sous-catégories:

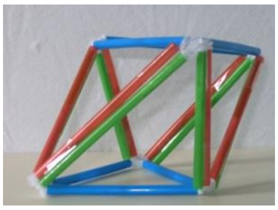
- Les antiprismes droits
- Les antiprismes non droits

Antiprismes

- Antiprismes à bases régulières Ap.B.R.
  - Antiprismes droits à bases régulières Ap.D.B.R.
  - Antiprismes non droits à bases régulières Ap.N.D.B.R.
- Antiprismes à bases non régulières Ap.B.N.R.
  - Antiprismes droits à bases non régulières Ap.D.B.N.R.
  - Antiprismes non droits à bases non régulières Ap.N.D.B.N.R.

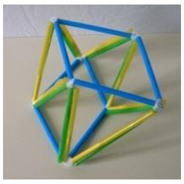
Exemples:

Antiprisme droit à bases régulières



Antiprisme non droit à bases régulières

Antiprisme droit à bases non régulières



Antiprisme non droit bases non régulières

B. Les différents types d'antiprismes

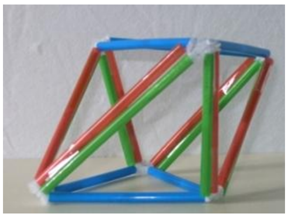
1) Les antiprismes à bases régulières (Ap.B.R.)

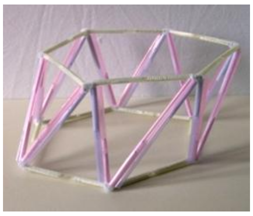
Ce sont des antiprismes dont les bases sont des polygones réguliers.

Ceux-ci se subdivisent en deux catégories:

- Les antiprismes droits à bases régulières (Ap.D.B.R.): les arêtes latérales sont de même longueur (isométriques).

- Les antiprismes non droits à bases régulières (Ap.N.D.B.R.): les arêtes latérales ne sont pas toutes de même longueur.



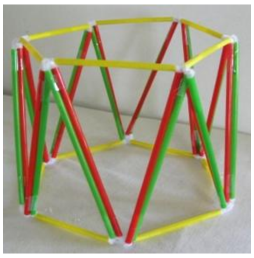


2) Les antiprismes à bases non régulières (Ap.B.N.R)

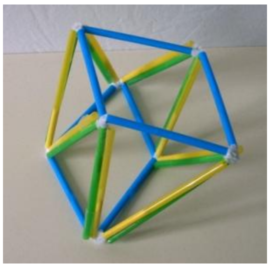
Ce sont des antiprismes dont les bases sont des polygones non réguliers.

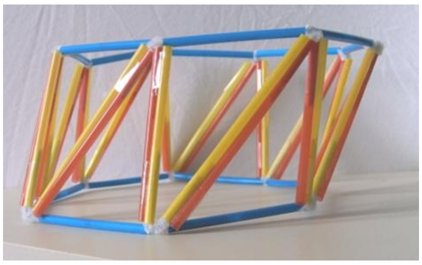
Ceux-ci se subdivisent en deux catégories:

- Les antiprismes droits à bases non régulières (Ap.D.B.N.R.): les arêtes latérales sont de même longueur (isométriques).



- Les antiprismes non droits à bases non régulières (Ap.N.D.B.N.R.): les arêtes latérales ne sont pas toutes de même longueur.





SYNTHESES DES CLASSEMENTS VISUELS DES PRISMES, DES PYRAMIDES ET DES ANTIPRISMES EUCLIDIENS CONVEXES

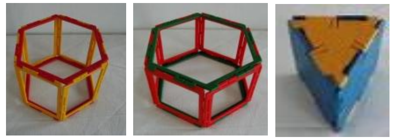
Dans les trois pages suivantes se trouvent les synthèses des trois classements visuels des prismes, des pyramides et des antiprismes.

Classement des prismes

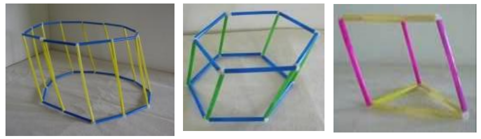
Prismes

P.B.R.
Prismes à bases régulières

P.D.B.R.
Prismes droits à bases régulières



P.N.D.B.R.
Prismes non droits à bases régulières



P.B.N.R.
Prismes à bases non régulières

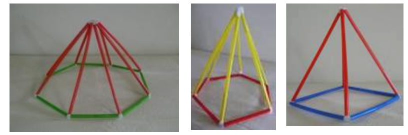
P.D.B.N.R.
Prismes droits à bases non régulières

P.N.D.B.N.R.
Prismes non droits à bases non régulières

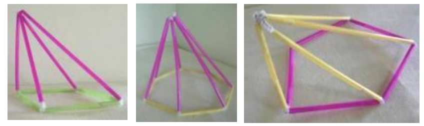
Classement des pyramides

Pyramides

- Py.B.R. — Pyramides à base régulière
  - Py.D.B.R. — Pyramides droites à base régulière

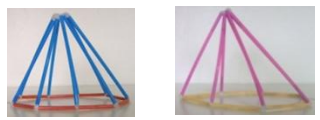


  - Py.N.D.B.R. — Pyramides non droites à base régulière



- Py.B.N.R. — Pyramides à base non régulière
  - Py.D.B.N.R. — Pyramides droites à base non régulière

  - Py.N.D.B.N.R. — Pyramides non droites à base non régulière

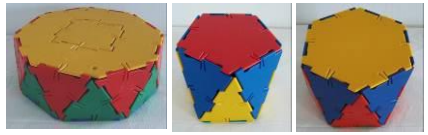


Classement des antiprismes

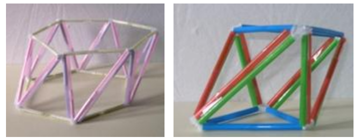
Antiprismes

Ap.B.R.
Antiprismes à bases régulières

Ap.D.B.R.
Antiprismes droits à bases régulières

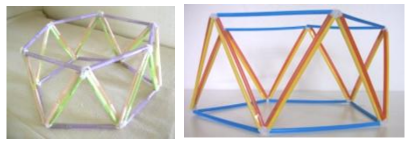


Ap.N.D.B.R.
Antiprismes non droits à bases régulières

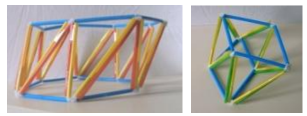


Ap.B.N.R.
Antiprismes à bases non régulières

Ap.D.B.N.R.
Antiprismes droits à bases non régulières



Ap.N.D.B.N.R.
Antiprismes non droits à bases non régulières



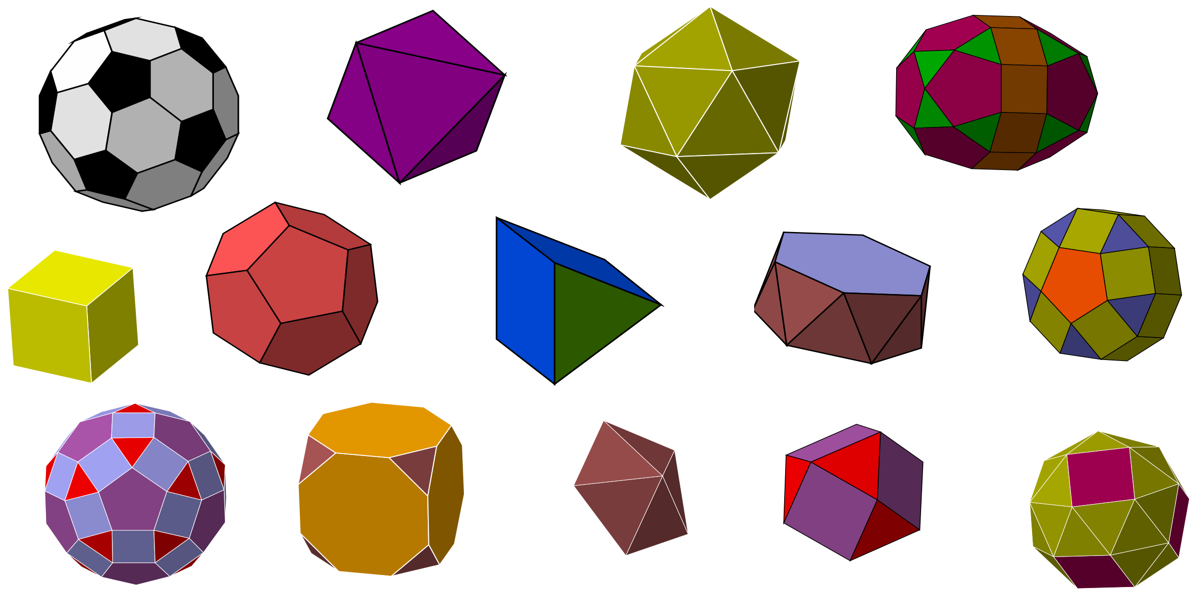
6.3. Classements des polyèdres euclidiens convexes en fonction de la régularité des faces

Introduction

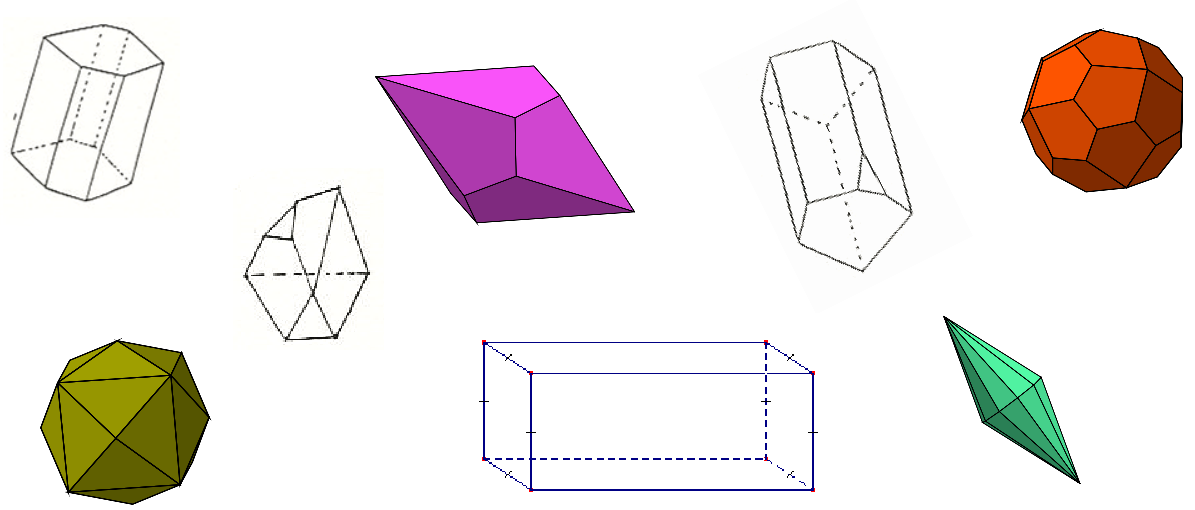
Les polyèdres euclidiens convexes peuvent aussi se classer en fonction de la régularité des faces. Si toutes les faces sont des polygones réguliers, on parle dans ce cas de polyèdres euclidiens convexes à faces régulières (P.E.C.F.R.). Si par contre il existe au moins une face qui ne soit pas un polygone régulier, on parle de polyèdres euclidiens convexes à faces non régulières (P.E.C.F.N.R.).

Dans ce paragraphe, nous décrivons, les deux classements usuels des polyèdres euclidiens convexes à faces régulières.

Exemples de polyèdres euclidiens convexes à faces régulières:



Exemples de polyèdres euclidiens convexes à faces non toutes régulières:



Classements des polyèdres euclidiens convexes à faces régulières (P.E.C.F.R.)

6.3.1. Introduction

Les classements décrits dans ce paragraphe s'appuient sur les travaux de Norman W. Johnson et de V.A. Zalgaller.

Le *premier classement* que nous appelons *"Classement visuel"* ou *"Classement selon l'homogénéité des faces et l'homogénéité des sommets"* est le classement spontané que des personnes (élèves ou adultes) proposent lorsqu'ils observent pour la première fois les P.E.C.F.R.

Le *second classement* que nous appelons *"Classement scientifique"* ou *"Classement selon la transitivité des faces et la transitivité des sommets"* est le classement que les scientifiques proposent actuellement. Il se base sur la notion de "symétries au sens large" ou d' "automorphismes(*)" associés aux objets analysés.

(*) Un automorphisme est une transformation qui superpose un objet à lui-même, tout en conservant la structure (les caractéristiques) de celui-ci.

6.3.2. Classement visuel ou classement selon l'homogénéité des faces et l'homogénéité des sommets

Le classement des polyèdres euclidiens convexes selon l'homogénéité des faces(*) et l'homogénéité des sommets(**) se décompose en 2 familles; chacune d'elle se décompose en 2 sous-familles.

(*) Un polyèdre est homogène en ses faces si et seulement si toutes les faces sont isométriques.

(**) Un polyèdre est homogène en ses sommets si et seulement si, en chaque sommet, on a les mêmes polygones isométriques ou non isométriques, dans la même position relative et dans le même ordre.

A. Les polyèdres euclidiens convexes à faces régulières isométriques (P.E.C.F.R.I.)

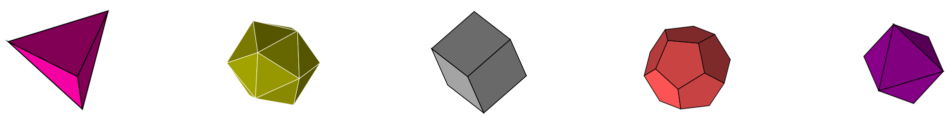
Cliquer ci-contre pour plus d'informations sur les P.E.C.F.R.I. P.E.C.F.R.I.

Un polyèdre euclidien convexe est à faces régulières isométriques si et seulement si il est formé uniquement de polygones réguliers ayant tous le même nombre de côtés (isométriques).

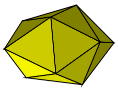
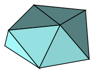
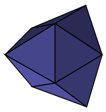
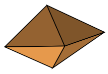
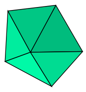
Un polyèdre euclidien convexe à faces régulières isométriques est un *polyèdre* homogène en ses faces.

Ceux-ci se subdivisent en deux catégories:

- Les polyèdres euclidiens convexes à faces régulières isométriques et homogènes en leurs sommets (P.E.C.F.R.I.H.S.); il en existe exactement 5, ce sont les polyèdres platoniciens, ils sont identiques aux cinq réguliers.



- Les polyèdres euclidiens convexes à faces régulières isométriques et non-homogènes en leurs sommets (P.E.C.F.R.I.N.H.S.); il en existe aussi exactement 5, ce sont des polyèdres euclidiens convexes formés des triangles équilatéraux.

B. Les polyèdres euclidiens convexes à faces régulières non (toutes) isométriques (P.E.C.F.R.N.I.)

Par définition, un polyèdre à faces régulières est non-homogène en ses faces si et seulement si il possède au moins deux faces régulières ayant un nombre de côtés différents.

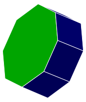
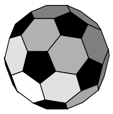
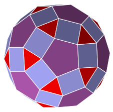
Les P.E.C.F.R.N.I. sont non-homogènes en leurs faces.

Ceux-ci se subdivisent en deux catégories:

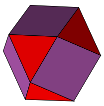
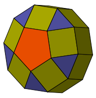
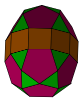
✓ **Les polyèdres euclidiens convexes à faces régulières non (toutes) isométriques et homogènes en leurs sommets (P.E.C.F.R.N.I.H.S.); ils sont au nombre de 16 types.**

Ce sont:

- Les deux familles infinies de prismes et d'antiprismes;
- Les 13 polyèdres archimédiens;
- La gyrobicoupole carrée allongée (Polyèdre de J.C.P Miller)

✓ **Les polyèdres euclidiens convexes à faces régulières non (toutes) isométriques et non-homogènes en leurs sommets (P.E.C.F.R.N.I.N.H.S.); ils sont au nombre de 86.**

Remarque

Si on accepte de considérer les deux familles infinies des prismes et antiprismes comme deux types de polyèdres euclidiens convexes à faces régulières, alors on peut considérer qu'il en existe 112 types différents.

P.E.C.F.R.I.H.S (il en existe exactement 5)

P.E.C.F.R.I.N.H.S (il en existe exactement 5)

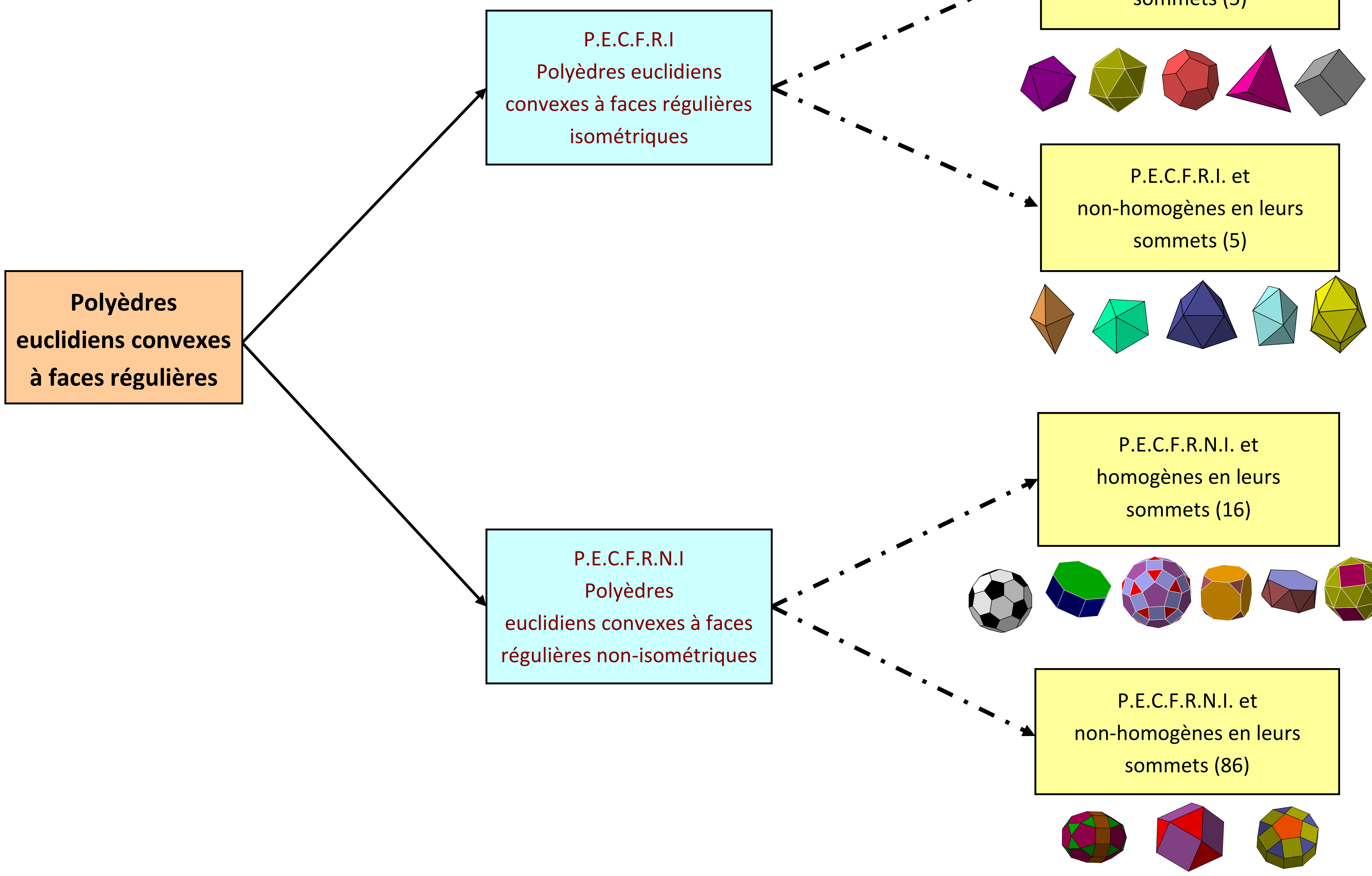
P.E.C.F.R.N.I.H.S (16 types)

P.E.C.F.R.N.I.N.H.S (86 types)

112 types

Le schéma ci-après synthétise le classement "visuel" des polyèdres euclidiens convexes à faces régulières.

Classement des polyèdres euclidiens convexes à faces régulières selon l'homogénéité des faces et selon l'homogénéité des sommets



6.3.3. Classement scientifique ou classement selon la transitivité des faces et des sommets

Le classement scientifique se décompose en 3 sous-familles et comme indiqué avant, il fait appel au concept de "symétries au sens large" ou d’"automorphismes" des objets analysés.

Pour rappel:

- Par automorphisme d’un objet on entend transformation qui superpose un objet à lui-même, tout en conservant la structure (les caractéristiques) de celui-ci.

- Par polyèdre transitif en ses faces on entend que toute face peut être appliquée sur toute autre face par un automorphisme (une symétrie au sens large) du polyèdre.

- Par polyèdre transitif en ses sommets on entend que tout sommet peut être appliqué sur tout autre sommet par un automorphisme (une symétrie au sens large) du polyèdre.

A. Les polyèdres euclidiens réguliers

Il s’agit des polyèdres euclidiens convexes à faces régulières qui sont transitifs en leurs faces et en leurs sommets (P.E.C.F.R.T.F.T.S.). Ils sont au nombre de cinq. Ce sont les cinq polyèdres platoniciens.

B. Les polyèdres euclidiens semi-réguliers

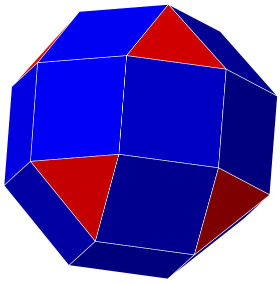
Il s’agit des polyèdres euclidiens convexes à faces régulières (non-isométriques) et qui sont transitifs en leurs sommets (P.E.C.F.R.N.I.T.S.). Ils sont de 15 types:

- Les 13 polyèdres archimédiens;
- Les 2 familles de prismes et d’antiprismes.

Remarques

1. Si on fait abstraction, dans les polyèdres euclidiens semi-réguliers que les faces sont non-isométriques alors les polyèdres réguliers sont évidemment des polyèdres semi-réguliers.

2. Les polyèdres euclidiens semi-réguliers diffèrent des P.E.C.F.R.N.I.H.S. uniquement par le polyèdre de J.C.P Miller (la gyrobicoupole carrée allongée) qui n’est pas transitif en ses sommets.



C. Les "autres" polyèdres

Il s'agit des polyèdres euclidiens convexes à faces régulières non-transitifs en leurs faces et non-transitifs en leurs sommets (P.E.C.F.R.N.T.F.N.T.S.). Il en existe 92.

On peut les scinder en 2 catégories:

- Les 5 polyèdres formés de triangles équilatéraux et non-transitifs en leurs sommets.
- Les 87 polyèdres formés de polyèdres euclidiens convexes à faces régulières non (toutes) isométriques et non-transitifs en leurs sommets.

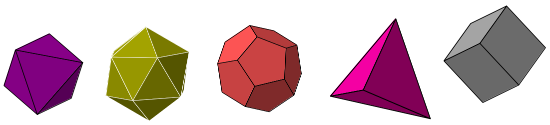
Le plus célèbre d'entre eux est le polyèdre de J.C.P Miller (la gyrobicoupole carrée allongée); on l'appelle également le pseudo-semi-régulier puisqu'en chaque sommet, il a la même répartition des polygones (triangle équilatéral, carré, carré, carré) mais il n'est pas transitif en ses sommets.

CLASSEMENT DES POLYÈDRES EUCLIDIENS CONVEXES À FACES RÉGULIÈRES SELON LA TRANSITIVITÉ DES FACES ET SELON LA TRANSITIVITÉ DES SOMMETS

P.E.C.F.R.

transitifs en leurs sommets et en leurs faces

(Il en existe exactement 5)



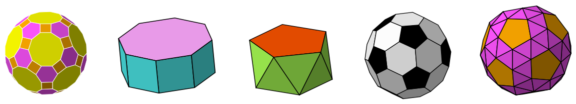
⟺ Les polyèdres euclidiens réguliers

P.E.C.F.R.N.I.

transitifs en leurs sommets

(15 types)

5 exemples:



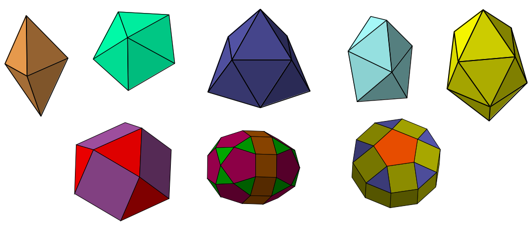
⟺ Les polyèdres euclidiens semi-réguliers

P.E.C.F.R.

non-transitifs en leurs sommets

(il en existe exactement 92)

8 exemples:



⟺ Autres

6.3.4. Synthèses des classements visuels et scientifiques

Dans les pages suivantes se trouve un descriptif exhaustif des polyèdres euclidiens convexes intervenant dans le classement visuel et le classement scientifique.

A. Le classement visuel

- **Polyèdres euclidiens convexes à faces régulières (P.E.C.F.R.)**
  - Polyèdres eulcidiens convexes à faces régulières isométriques (P.E.C.F.R.I.)
    - P.E.C.F.R.I. et homogènes en leurs sommets (P.E.C.F.R.I.H.S.)
    - P.E.C.F.R.I. et non-homogènes en leurs sommets (P.E.C.F.R.I.N.H.S.)
  - Polyèdres euclidiens convexes à faces régulières non-isométriques (P.E.C.F.R.N.I.)
    - P.E.C.F.R.N.I. et homogènes en leurs sommets (P.E.C.F.R.N.I.H.S.)
    - P.E.C.F.R.N.I. et non-homogènes en leurs sommets (P.E.C.F.R.N.I.N.H.S.)

Cliquer ci-contre pour le classement en images. C. VISUEL

B. Le classement scientifique

- **Polyèdres euclidiens convexes à faces régulières (P.E.C.F.R.)**
  - Polyèdres euclidiens convexes réguliers (P.E.C.F.R.T.F.T.S.) *(Il en existe exactement 5)*
  - Polyèdres euclidiens convexes semi-réguliers (P.E.C.F.R.N.I.T.S.) *(15 types)*
  - Autres polyèdres euclidiens convexes (P.E.C.F.R.N.T.S.) *(Il en existe exactement 92)*

Cliquer ci-contre pour le classement en images. C. SCIENTIFIQUE

7. Automorphismes des polyèdres euclidiens convexes

Cliquer ci-contre pour de plus amples informations sur les automorphismes des P.E.C. Automorphismes