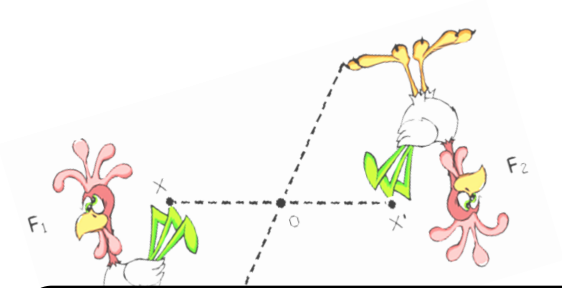
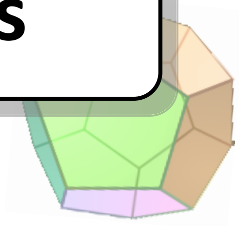
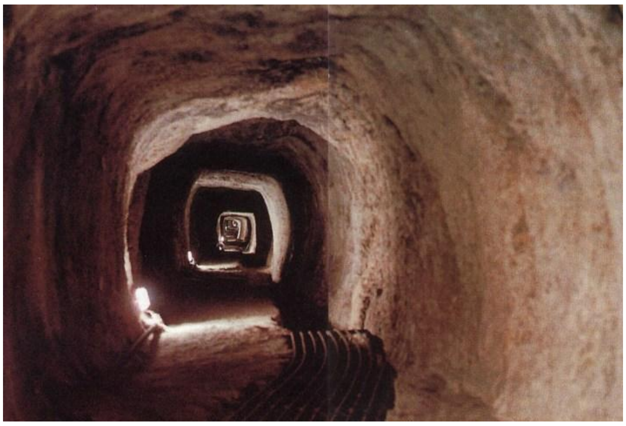
Centre de Recherche de la HAUTE ECOLE
de la Communauté française en HAINAUT



Mathématiques élémentaires



L'énigme du tunnel de Samos



Cellule de géométrie – Catégorie pédagogique de la HEH

DEMAL Michel
demal.michel@skynet.be

DRAMAIX Jérémy
jeremy.dramaix@gmail.com

HIGNY Samuel
higny_samuel@hotmail.com

MALAGUARNERA Angelo
angelo.malaguarnera@gmail.com

Partie théorique 1 – **Le tunnel de Samos**

Au 6$^{\text{ème}}$ siècle avant Jésus Christ, sur l'île de Samos (là où serait né Pythagore), Polycrate (un tyran de l'île) décida de faire creuser un tunnel qui aurait pour but de ravitailler sa ville en eau sans que cet approvisionnement ne puisse être facilement coupé en cas de siège. Ce tunnel se présenterait alors sous la forme d'un aqueduc souterrain et devrait traverser un petit mont (le Mont Kastro) sous l'Acropole de Samos sur une longueur d'environ 1km. L'aqueduc puiserait sa source de l'autre côté de la montagne. De plus, il devrait être quasi-horizontal afin de permettre l'écoulement naturel des eaux jusqu'à la ville.

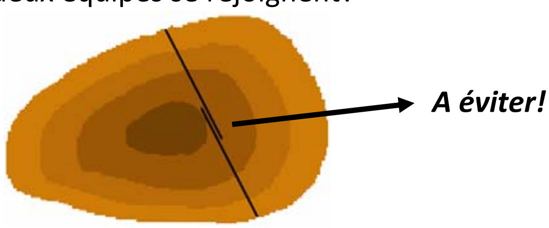
C'est Eupalinos (fils de Naustrophus et élève de Pythagore) qui fut désigné comme architecte-ingénieur de l'ouvrage. Celui-ci, afin de gagner du temps, demanda à deux équipes de creuser simultanément des deux côtés de la montagne. Il ne lui fallut tout de même pas moins de 10 ans pour parvenir à ses fins.

Aujourd'hui, même si on ne sait toujours pas exactement comment Eupalinos réalisa ses plans et que bon nombre d'hypothèses circulent, on peut être sûr qu'ils ne doivent rien au hasard. Tentons d'y voir un peu plus clair.

Lors de la réalisation de ce tunnel, trois questions se sont posées à Eupalinos (l'architecte-ingénieur de l'ouvrage):

- ✓ Comment garder l'horizontale pour permettre l'écoulement des eaux?

- ✓ Comment déterminer la direction dans laquelle le tunnel doit être percé aux deux extrémités pour que les deux équipes se rejoignent?



- ✓ Comment estimer la longueur du tunnel?

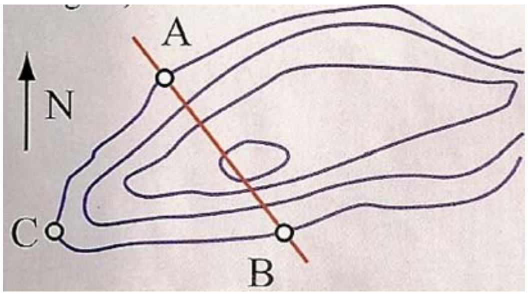
Retournez à la page d'accueil du CD afin de visionner la vidéo sur le tunnel de Samos.

Remarque: texte inspiré de "tangente n°132 janv.-févr. 2010" et du site "http://matoumatheux.ac-rennes.fr/geom/trigonometrie/samos.htm"

Partie théorique 2 – Résolution de l'énigme du tunnel de Samos

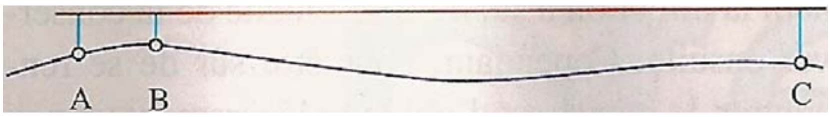
1) Comment garder l'horizontale pour permettre l'écoulement des eaux?

Eupalinos, connaissant l'endroit de l'entrée du tunnel, devait déterminer l'endroit de sa sortie tout en sachant que celui-ci devait être horizontal.
Si l'on regarde la carte topographique du lieu, on se rend compte qu'il était possible aux hommes d'Eupalinos de contourner la montagne par l'ouest en restant à niveau (ligne ACB):



Des preuves archéologiques nous montrent que les Samiens disposaient d'instruments pour déterminer l'horizontale: des sortes de gouttières en terre cuite dans lesquelles on versait de l'eau. L'horizontale était obtenue quand celle-ci ne s'écoulait pas. On peut imaginer qu'ils procédaient de cette manière et gardaient l'horizontale en plantant des pieux dont les sommets se trouvaient au même niveau. Cependant, si leurs "niveaux" mesuraient 2 m de long, il aurait fallu planter environ 1100 pieux (car la distance séparant le point A du point B en passant par l'ouest est de 2200 mètres). Les Samiens utilisèrent alors une petite astuce leur permettant de réduire considérablement le nombre de pieux à planter.

En effet, ils commencèrent par planter deux pieux distants l'un de l'autre d'environ 10 mètres et dont les sommets étaient à même niveau. Ils alignaient ensuite un pieu à environ 100 mètres en utilisant des visées oculaires et grâce aux deux autres pieux préalablement mis en place.



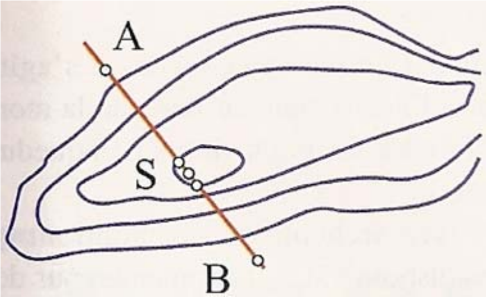
Cette technique leur permit de réduire le nombre de pieux à une cinquantaine (deux tous les 100 mètres environ).

<u>Remarque</u>: L'œil humain a une capacité de résolution de plus ou moins 1/120 de degré, ce qui signifie qu'on peut espérer, avec un viseur, une incertitude de moins de 2 cm sur 100m. Cela conduirait à une incertitude totale de 44 cm; ce qui parait tout à fait plausible lorsqu'on sait que l'erreur effective du tunnel est de 60 cm. L'hypothèse est donc tout à fait envisageable.

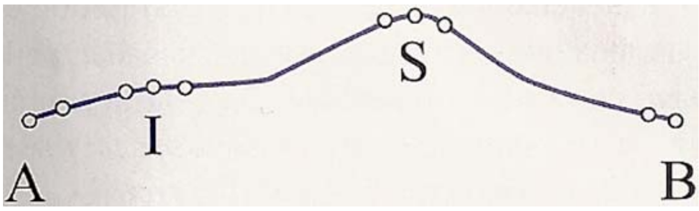
2) Comment déterminer la direction dans laquelle le tunnel doit être percé aux deux extrémités pour que les deux équipes se rejoignent?

La méthode des pieux:

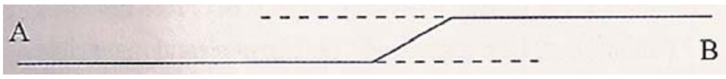
Cette méthode se base sur la topographie du terrain. Il s'en fallait de peu que l'on puisse voir les deux extrémités du tunnel du haut de l'Acropole. Il aurait, dans ce cas, suffit d'y aligner trois pieux puis de les aligner eux-mêmes (par essais successifs) avec des pieux plantés aux extrémités du tunnel à construire. Cette méthode est quasiment similaire à celle décrite à la page précédente, mais sans mise à niveau.



Malheureusement, comme nous l'avons dit dans le paragraphe précédent, la topographie du terrain ne permettait pas d'adopter exactement cette solution. Cependant, une variante aurait très bien pu être envisagée: soit en surélevant le sommet au moyen d'une tour de dix mètres environ (système des bornes géodésiques en montagne), soit en plantant des pieux intermédiaires et en les alignant de proche en proche.



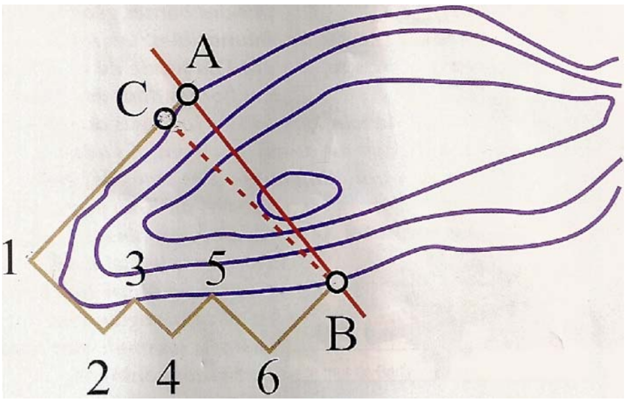
Ceci fait, les deux pieux situés à chaque extrémité donnent la direction à suivre. Il est "facile" de la conserver. Cependant, afin d'être certain de se rencontrer, le mieux est que l'une des deux équipes oblique un peu avant la moitié du tunnel. En effet, deux droites coplanaires non parallèles se rencontrent toujours.



Remarque: Sur le terrain, on remarque effectivement que l'une des branches présente des portions en zigzags. Ceci montre que l'architecte n'était pas du tout certain de ses calculs et qu'il ne voulait à tout prix pas manquer le deuxième tronçon qui, lui, reste rectiligne.

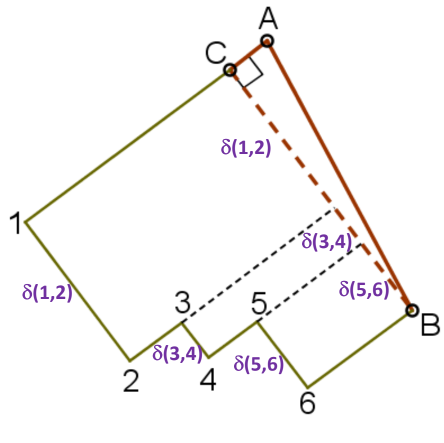
La méthode de Héron (les arpentages de Héron):

Cette méthode consistait à partir en ligne droite de l'entrée du tunnel (le point A) et à garder l'horizontale (préalablement déterminée lors de la recherche de la sortie du tunnel *(Cf. PP1 p.2)*). Une fois arrivé à l'extrémité de la courbe de niveau (voir dessin ci-dessous), il fallait bifurquer à angle droit et ainsi de suite jusqu'à la sortie du tunnel (le point B). De cette manière, une suite de points (de 1 à 6) était obtenue. Les samiens pouvaient alors placer un point C tel que ABC soit un triangle rectangle en C *($\delta(1,C) = \delta(2,3) + \delta(4,5) + \delta(6,B)$)*



Remarque: Les points 1 à 6 ainsi que les points A, B et C sont tous situés dans un même plan (horizontal).

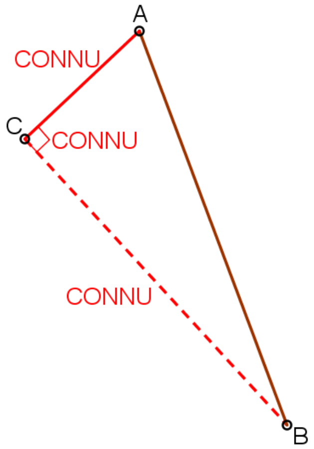
Les Samiens pouvaient facilement mesurer la distance séparant l'entrée du tunnel (le point A) et le point C. Ils savaient également que l'angle $\widehat{ACB}$ était droit (puisqu'ils avaient précisément construit le point C dans ce but).
Ajoutons à cela qu'ils pouvaient déduire la distance séparant le point C de la sortie du tunnel (le point B). En effet, on voit clairement sur le dessin que **$\delta(C,B) = \delta(1,2) + \delta(3,4) + \delta(5,6)$**.



Les samiens disposaient donc de trois informations:

- la longueur du segment [AC] *($= \delta(1,A) - \delta(1,C)$)*;
- l'amplitude de l'angle $\widehat{ACB}$ *($= 90°$);*
- la longueur du segment [CB] *($= \delta(1,2) + \delta(3,4) + \delta(5,6)$)*

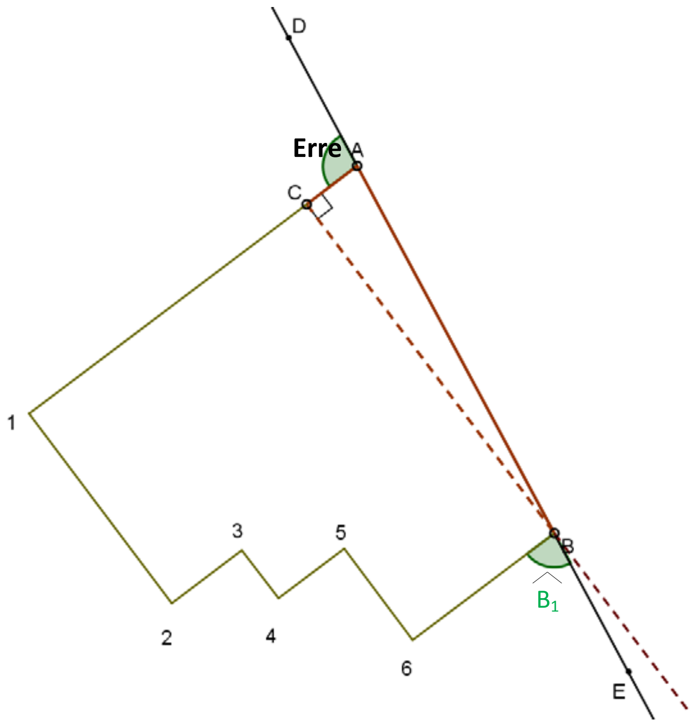
Ils se trouvaient donc dans la situation suivante:



Les Samiens purent, **grâce à la détermination univoque d'un triangle, conclure que celui-ci était aux dimensions uniques** *(Cf. PT2 4.)* ce qui, dès lors, leur permit de déterminer de manière unique les amplitudes des angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$ du triangle rectangle ACB. La connaissance de ces deux angles entraine donc la connaissance des directions horizontales à suivre en A et en B afin que les deux tunnels finissent par se rejoindre.

La direction à suivre en A est donnée par l'angle $\widehat{A_1}$ (180°– $\hat{A}$) que fait la droite AD avec le côté AC du triangle rectangle.

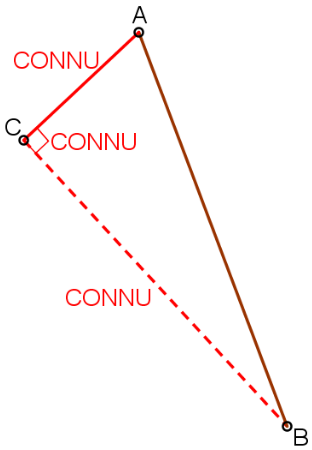
La direction à suivre en B est donnée par l'angle $\widehat{B_1}$ (90°– $\hat{B}$) que fait la droite BE avec la ligne de niveau (B,6).



Actuellement, grâce aux formules de trigonométrie *(Cf. AN6)*, il est aisé de déterminer par calculs l'amplitude des angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{CBA}$, et ainsi trouver les directions à suivre de part et d'autre de la montagne afin d'être certain de se rencontrer.

3) <u>Comment estimer la longueur du tunnel</u>?

Nous avons précédemment vu que les Samiens se retrouvaient, à la suite de plusieurs calculs et mesures, dans la situation suivante:



Grâce à la détermination univoque d'un triangle ***(Cf. PT2 4.)*****, ils savaient que ce triangle était aux dimensions uniques** et ils purent donc, sans aucun problème et en faisant appel à la notion de figures proportionnelles (qui semblait déjà connue empiriquement à l'époque) calculer la longueur du segment [AB], c'est-à-dire la longueur du tunnel.

Actuellement et toujours grâce aux formules de trigonométrie *(Cf. AN6)*, il est aisé de calculer la longueur du segment [AB], c'est-à-dire la longueur du tunnel.

<u>Remarque 1</u>: Les Samiens avaient déjà une première approximation de la longueur du tunnel suite à la connaissance de la longueur séparant le point C de la sortie du tunnel (le point B), autrement dit le segment [CB] *(Cf. PP1 p.4).*

<u>Remarque 2</u>: Le texte ci-dessus est inspiré de "tangente n°132 janv.-févr. 2010"