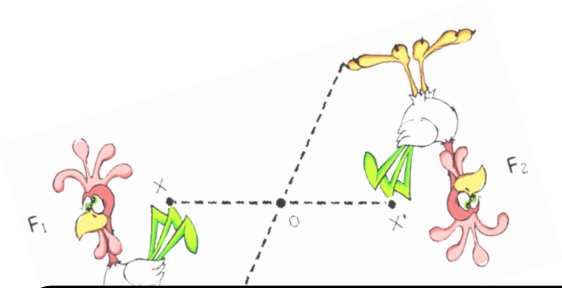
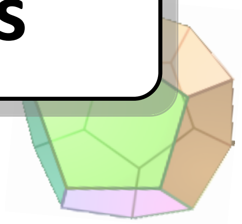
Centre de Recherche de la HAUTE ECOLE
de la Communauté française en HAINAUT



Mathématiques élémentaires



Polyèdres euclidiens convexes à faces régulières isométriques

Cellule de géométrie – Catégorie pédagogique de la HEH

DEMAL Michel
demal.michel@skynet.be

DRAMAIX Jérémy
jeremy.dramaix@gmail.com

HIGNY Samuel
higny_samuel@hotmail.com

MALAGUARNERA Angelo
angelo.malaguarnera@gmail.com

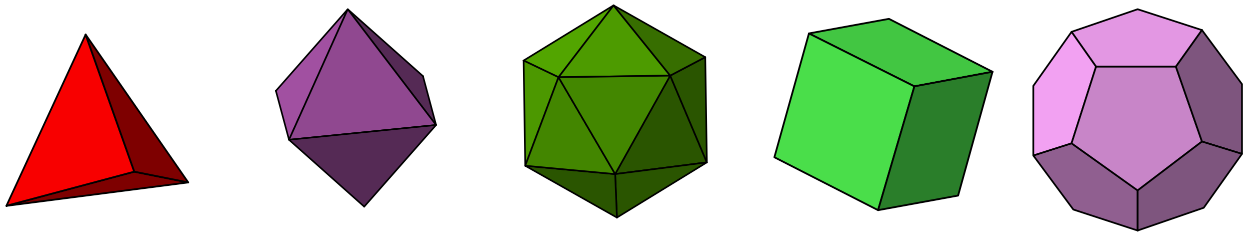
Avec la collaboration de

ADABBO F. - DUJARDIN S. - PILAETE C.

Polyèdres euclidiens convexes à faces régulières isométriques

1. Introduction

Dans ses éléments, Euclide affirme et démontre qu'il n'existe que cinq polyèdres euclidiens convexes à faces régulières isométriques; ce sont les fameux polyèdres platoniciens.



Le tétraèdre	L'octaèdre	L'icosaèdre	Le cube	Le dodécaèdre

Fort de cette affirmation, le problème de la détermination de tous les polyèdres euclidiens convexes à faces régulières isométriques ne suscita plus, pendant environ 23 siècles, de regard critique.

En 1930, E. Dijsterhuis, attire l'attention sur l'homogénéité des faces et des sommets pour les polyèdres platoniciens et cite le bitétraèdre à faces régulières isométriques pour réfuter la thèse d'Euclide.

S'agissait-il d'une erreur d'Euclide passée inaperçue pendant 23 siècles?

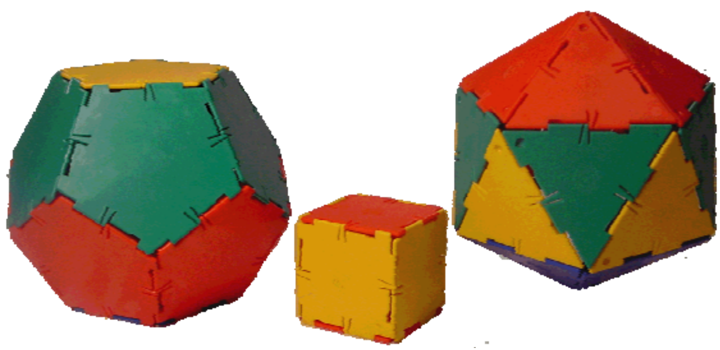
Plusieurs auteurs répondent négativement à cette question; ils suggèrent qu'Euclide avait implicitement imposé la contrainte supplémentaire des sommets identiques.

En 1947, B. Van der Waerden et H. Freudenthal, résolvent le problème de la détermination de tous les polyèdres euclidiens convexes à faces régulières isométriques, qu'ils soient ou non homogènes en leurs sommets.

2. Définition

Les **polyèdres euclidiens convexes à faces régulières isométriques** sont des polyèdres euclidiens convexes dont toutes les faces sont des polygones réguliers isométriques.

Exemples:



3. Propriétés associées aux P.E.C.F.R.I.

En un sommet d'un P.E.C.F.R.I., il ne peut arriver que des triangles équilatéraux, des carrés ou des pentagones réguliers.

La détermination des n-gones réguliers pour construire des P.E.C.F.R.I. découle de la condition nécessaire

$$\sum_{i=1}^{p} \hat{\alpha}_i < 360° \qquad \text{où } p \in \mathbb{N} \text{ et } p \geq 3 \qquad (1)$$

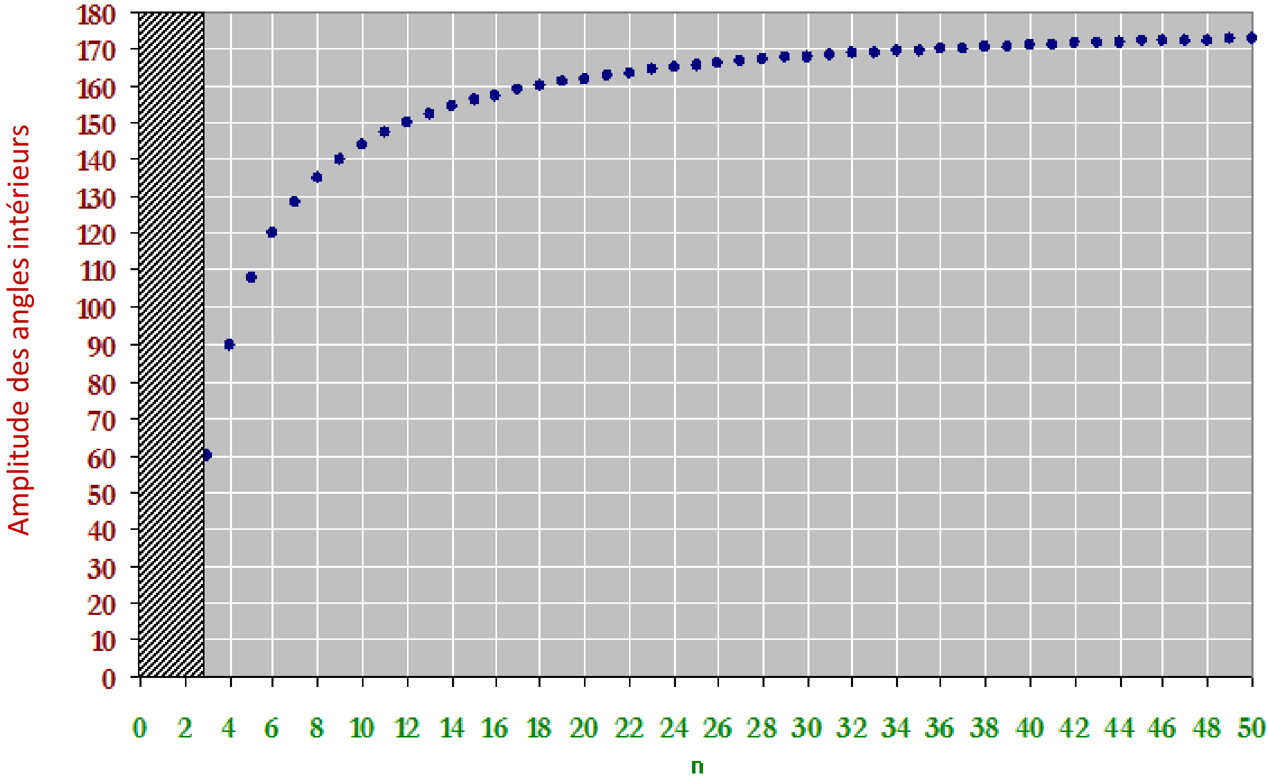
et sur le fait que l'amplitude des angles intérieurs des n-gones réguliers est une fonction strictement croissante d'un nombre de côtés.

$$\hat{\alpha}_n = 180° - \frac{360°}{n} \qquad \text{où } n \geq 3 \qquad (2)$$

Tableau et graphe de la fonction discrète: "$180° - \dfrac{360°}{n} = \hat{\alpha}_n$"

n	$\mathbf{180° - \dfrac{360°}{n}}$
3	60°
4	90°
5	108°
6	120°
7	128,575714°
8	135°
9	140°
10	144°
⋮	⋮
50	172,8°
100	176,4°
⋮	⋮
360	179°
⋮	⋮
n	$180° - \dfrac{360°}{n}$
⋮	⋮
∞	180°

Nuage de points de la fonction discrète: $"180° - \frac{360°}{n} = \hat{\alpha}_n"$

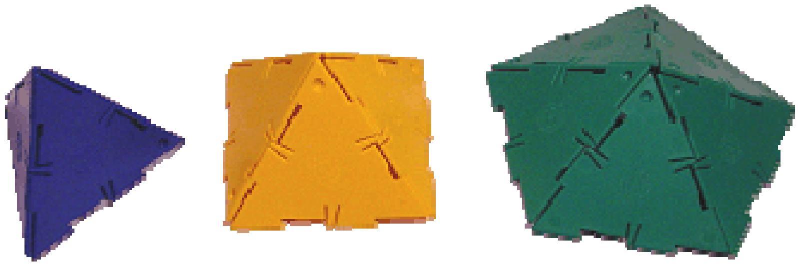


4. Vision géométrique

- ✓ **En un sommet d'un P.E.C.F.R.I., il peut arriver trois, quatre, cinq triangles équilatéraux.**

Ceci est la conséquence du fait que la condition (1) est vérifiée pour 3-4-5 triangles. En effet, la somme des amplitudes des angles vaut respectivement 3 x 60° = 180°; 4 x 60° = 240° et 5 x 60° = 300°.

A partir de six triangles, la somme des amplitudes des angles arrivant au sommet considéré est supérieure ou égale à 6 x 60° = 360°.



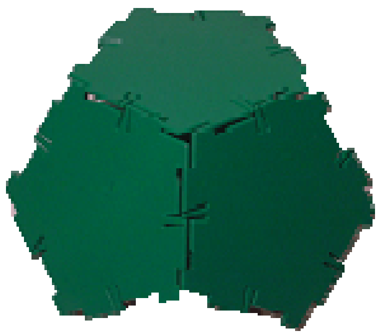
✓ **En un sommet d'un P.E.C.F.R.I., il ne peut arriver que trois carrés.**

Ici aussi, la condition (1) est vérifiée pour trois carrés. En effet, la somme des amplitudes des angles vaut 3 x 90° = 270°. A partir de quatre carrés en un sommet, la somme des amplitudes des angles est supérieure ou égale à 4 x 90° = 360°.

✓ **En un sommet d'un P.E.C.F.R.I., il ne peut arriver que trois pentagones réguliers.**

Le même raisonnement donne, pour trois pentagones réguliers, la somme d'amplitude des angles de 3 x 108° = 324°.

A partir de quatre pentagones réguliers, la somme des amplitudes des angles est également supérieure ou égale à 4 x 108° = 432°.



Pour les n-gones où n ≥ 6, la condition (1) n'est plus vérifiée. En effet, de par la proposition (2): $\hat{\alpha}_n \geq 120°$; $\forall$ n ≥ 6.

De plus, comme il faut au minimum trois polygones en un sommet, la somme des angles faces en ce sommet sera supérieure ou égale à 3 x 120° = 360°.

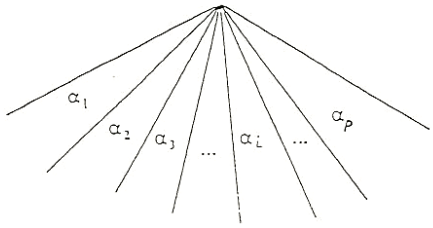
D'où $\forall$ n ≥ 6:

$$\sum_{i=1}^{p} \hat{\alpha}_i \geq 3 \cdot 120° = 360°$$

5. Vision algébrique

La condition (1) impose qu'en chaque sommet d'un polyèdre euclidien convexe :

$$\sum_{i=1}^{p} \hat{\alpha} = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 + \ldots + \hat{\alpha}_i + \ldots + \hat{\alpha}_p < 360° \quad \textit{où } p \geq 3$$



Comme toutes les faces sont des n-gones réguliers isométriques, (1) devient:

$$\sum_{i=1}^{p} \hat{\alpha}_i < 360°$$

$$\Leftrightarrow \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 + \ldots + \hat{\alpha}_i + \ldots + \hat{\alpha}_p < 360° \qquad \textit{où } p \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \left(180° - \frac{360°}{n_1}\right) + \left(180° - \frac{360°}{n_2}\right) + \ldots + \left(180° - \frac{360°}{n_i}\right) + \ldots + \left(180° - \frac{360°}{n_p}\right) < 360° \qquad \textit{où } i: 1 \ldots p,\ n_i \geq 3 \textit{ et } p \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \left(180° - \frac{360°}{n}\right) + \left(180° - \frac{360°}{n}\right) + \ldots + \left(180° - \frac{360°}{n}\right) + \ldots + \left(180° - \frac{360°}{n}\right) < 360° \qquad \textit{car } n_1 = n_2 = \ldots = n_p = n$$

$$\Leftrightarrow p \cdot 180° - p \cdot \frac{360°}{n} < 360° \qquad \textit{où } n,\ p \geq 3$$

$$\Leftrightarrow 180° \cdot \left(p - \frac{2p}{n}\right) < 2 \cdot 180° \qquad \textit{où } n,\ p \geq 3$$

$$\Leftrightarrow p - \frac{2p}{n} < 2 \qquad \textit{où } n,\ p \geq 3$$

$$\Leftrightarrow p - 2 < \frac{2p}{n} \qquad \textit{où } n,\ p \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{p-2}{p} < \frac{2}{n} \qquad \textit{où } n,\ p \geq 3$$

$$\Leftrightarrow n < \frac{2p}{p-2} \qquad \textit{où } n,\ p \geq 3$$

La résolution de cette inéquation du premier degré en les variables <u>entières</u> "n et p" permet de déterminer le nombre de faces qui peuvent se placer en un sommet d'un P.E.C.F.R.I. ainsi que le type de n-gones réguliers. La condition

$$n < \frac{2p}{p-2} \qquad \textit{avec } n,\ p \geq 3$$

donne, pour:

a) n = 3 (les triangles équilatéraux), les valeurs de p égales à 3-4-5. En effet,

$$3 < \frac{2\,p}{(p-2)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$3\,p - 6 < 2\,p$$

$$\Leftrightarrow$$

$$p < 6 \quad \text{avec } p \geq 3$$

C'est-à-dire p = 3-4-5 pour n = 3.

En un sommet d'un P.E.C.F.R.I., il peut arriver trois, quatre ou cinq triangles équilatéraux.

b) n = 4 (les carrés); la valeur de p est égale à 3. En effet,

$$4 < \frac{2\,p}{(p-2)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$4\,p - 8 < 2\,p$$

$$\Leftrightarrow$$

$$p < 4 \quad \text{avec } p \geq 3$$

C'est-à-dire p = 3 pour n = 4.

En un sommet d'un P.E.C.F.R.I., il peut arriver trois carrés.

c) n = 5 (les pentagones réguliers), la valeur de p est égale à 3. En effet,

$$5 < \frac{2\,p}{(p-2)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$5\,p - 10 < 2\,p$$

$$\Leftrightarrow$$

$$p < \frac{10}{3}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$p < 3{,}333\ldots \quad \text{avec } p \geq 3$$

C'est-à-dire p = 3 pour n = 5.

En un sommet d'un P.E.C.F.R.I., il peut arriver trois pentagones réguliers.

d) Pour $n \geq 6$, les valeurs de "p" sont inférieures à 3, ce qui est contraire aux conditions initiales $p \geq 3$ et $n \geq 3$. En effet,

$$n \geq 6 \text{ et } n < \frac{2\,p}{(p-2)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$6 \leq n < \frac{2\,p}{(p-2)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$6 < \frac{2\,p}{(p-2)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$6\,P - 12 < 2\,p$$

$$\Leftrightarrow$$

$$4\,p < 12$$

$$\Leftrightarrow$$

$$p < 3 \;\text{ avec } p \geq 3$$

On conclut que pour les n-gones réguliers à plus de six côtés, il n'est pas possible d'en assembler au moins trois.

6. Conclusion

Les polyèdres euclidiens convexes formés de carrés ou de pentagones réguliers ont tous les sommets de degré 3 (cubes, dodécaèdres réguliers).

Les polyèdres euclidiens convexes formés de triangles équilatéraux isométriques ont des sommets de degrés 3-4-5, mélangés ou non.

7. Les deltaèdres euclidiens convexes

7.1. Définition

Les **deltaèdres euclidiens convexes** sont des polyèdres euclidiens convexes dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux.

		
Tétraèdre régulier (4 faces)	**Dipyramide triangulaire** (6 faces)	**Icosaèdre régulier** (20 faces)

7.2. Propriétés des deltaèdres euclidiens convexes

- ✓ Les deltaèdres euclidiens considérés étant convexes, ils vérifient la relation d'Euler "F + S – A = 2" (condition nécessaire).

- ✓ Le nombre d'arêtes est lié au nombre de faces par la relation 3 F = 2 A. En effet, comme toute face contient trois arêtes et que toute arête est incidente à deux faces, on a:

$$A = \frac{3F}{2} \Leftrightarrow 2\,A = 3\,F \qquad (1)$$

Corollaire: Tout deltaèdre contient un nombre pair de faces. En effet, supposons que le nombre de faces soit un nombre impair, c'est-à-dire un nombre de la forme 2 n + 1 avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

Le nombre d'arêtes du deltaèdre considéré serait alors de la forme:

$$A = \frac{3\,(2\,n+1)}{2} = \frac{6\,n+3}{2} = (3\,n+1) + \frac{1}{2}$$

C'est-à-dire que le deltaèdre aurait une demi-arête, ce qui est bien évidemment impossible.

- ✓ Le nombre de sommets est égal au nombre de sommets de degré 3, plus le nombre de sommets de degré 4, plus le nombre de sommets de degré 5.

- ✓ Si "X" représente le nombre de sommets de degré 3, "Y" le nombre de sommets de degré 4 et "Z" le nombre de sommets de degré 5, alors:

$$S = X + Y + Z \qquad (2)$$

- ✓ De plus, comme le nombre de faces en un sommet correspond au nombre d'arêtes arrivant en ce sommet et que toute arête détermine exactement deux sommets, il vient:

$$A = \frac{3\,X + 4\,Y + 5\,Z}{2}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$2\,A = 3\,X + 4\,Y + 5\,Z$$

7.3. Détermination des deltaèdres euclidiens convexes

La recherche des différents deltaèdres euclidiens convexes peut s'envisager à partir de la détermination du nombre de sommets de degré 3, 4 ou 5 qui peuvent exister sur des deltaèdres euclidiens convexes.

Comme, potentiellement, les trois types de sommets peuvent se retrouver simultanément sur les deltaèdres euclidiens convexes, cette détermination reviendra donc à rechercher les solutions en "X", "Y", "Z" du système suivant:

$$\begin{cases} X + Y + Z = S \\ F + S - A = 2 \\ 3\,X + 4\,Y + 5\,Z = 2 \cdot A \\ 3\,F = 2\,A \end{cases}$$

où "X", "Y" et "Z" représentent respectivement le nombre de sommets de degré 3, 4 ou 5, "F" le nombre de faces, "S" le nombre de sommets et "A" le nombre d'arêtes des deltaèdres recherchés.

De plus, ce système d'équations peut se réduire à: $3\,X + 2\,Y + Z = 12$ où $X, Y, Z \in N$

En effet, de F +S- A = 2 et de 3 F = 2 A, il vient: $\dfrac{2\,A}{3} + S - A = 2$

Comme $2\,A = 3\,X + 4\,Y + 5\,Z$ et $S = X + Y + Z$, on a:

$$\frac{3\,X + 4\,Y + 5\,Z}{3} + X + Y + Z - \frac{3\,X + 4\,Y + 5\,Z}{2} = 2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$2\,(3\,X + 4\,Y + 5\,Z) + 6\,(X + Y + Z) - 3\,(3\,X + 4\,Y + 5\,Z) = 12$$

$$\Leftrightarrow$$

$$3\,X + 2\,Y + Z = 12 \quad \text{avec } X, Y, Z \in \mathbb{N} \qquad (4)$$

Remarquons que (4) est une condition nécessaire portant sur X, Y et Z car elle est obtenue à partir de la condition nécessaire d'Euler (F + S – A = 2). L'identification des différentes deltaèdres euclidiens convexes se ramène donc à la recherche des solutions en X, Y, Z de la condition nécessaire $3\,X + 2\,Y + Z = 12$ avec $X, Y, Z \in \mathbb{N}$.

Ces solutions sont:

	X(3)	Y(4)	Z(5)	S = X + Y + Z	$A = \frac{3X + 4Y + 5Z}{2}$	$F = \frac{2A}{3}$	
1	0	0	12	12	30	20	icosaèdre
2	0	1	10	11	27	18	
3	0	2	8	10	24	16	*
4	0	3	6	9	21	14	*
5	0	4	4	8	18	12	*
6	0	5	2	7	15	10	*
7	0	6	0	6	12	8	octaèdre
	0	7	-2 Δ	∄	∄	∄	
8	1	0	9	10	24	16	
9	1	1	7	9	21	14	
10	1	2	5	8	18	12	
11	1	3	3	7	15	10	
12	1	4	1	6	12	8	
13	2	0	6	8	18	12	
14	2	1	4	7	15	10	
15	2	2	2	6	12	8	
16	2	3	0	5	9	6	bitétraèdre
17	3	0	3	6	12	8	
18	3	1	1	5	9	6	
19	4	0	0	4	6	4	tétraèdre

Ce tableau, solutions en X, Y, Z, fait apparaître 19 solutions potentielles.

De plus, il met en évidence qu'au maximum un deltaèdre euclidien convexe peut posséder vingt faces. Parmi les 19 solutions, montrons que 11 de celles-ci sont à rejeter.

Considérons d'abord les deltaèdres pour lesquels il existe au moins un sommet d'ordre 3 ($X \neq 0$). Deux solutions au moins sont admissibles: en effet, en partant du sommet de degré 3, on peut fermer le trièdre en ajoutant un quatrième triangle équilatéral et obtenir le tétraèdre régulier (figure 1):

Les sommets de la base jaune sont tous d'ordre 3.

(figure 1)

ou bien ajouter trois triangles équilatéraux au trièdre et obtenir le bitétraèdre:

Les sommets de la base jaune sont tous d'ordre 4.

(figure 2)

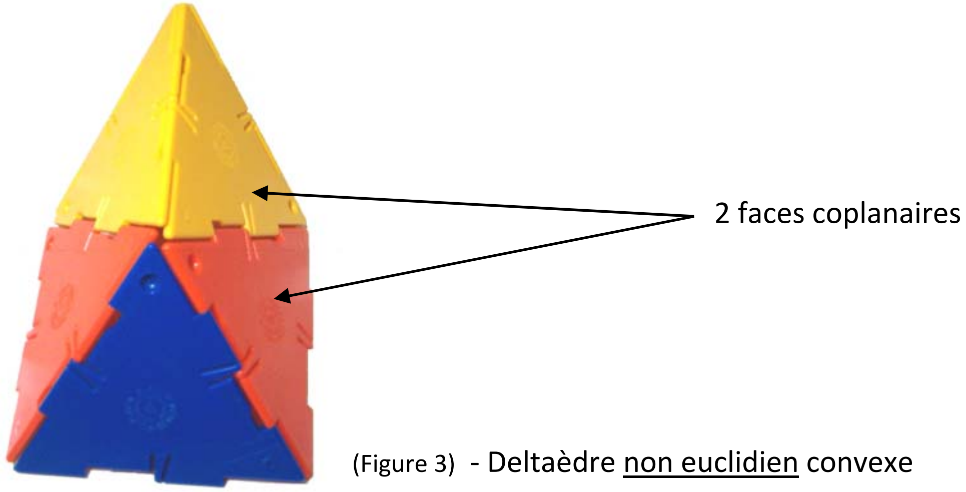
Il s'agit des solutions correspondant aux solutions ($X = 4, Y = 0, Z = 0$) et ($X = 2, Y = 3, Z = 0$).

Montrons que ce sont les seuls deltaèdres euclidiens convexes possibles lorsque le deltaèdre euclidien convexe possède <u>au moins</u> un sommet d'ordre 3 ($X \geq 1$).

En effet, si on désire construire un deltaèdre euclidien différent des deux cas précédent, il faut obligatoirement avoir au moins cinq triangles à l'un des sommets de la base jaune.

On constate alors que le deltaèdre obtenu n'est pas convexe (voir définition).

<u>Non-convexe</u>



(Figure 3) - Deltaèdre non euclidien convexe

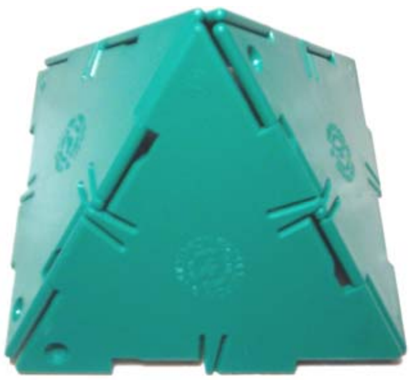
On voit apparaître deux faces triangulaires coplanaires (un losange).

L'insertion d'un cinquième triangle équilatéral (triangle bleu) à l'un des sommets de la base jaune fait apparaître soit une face plane en forme de losange (deux triangles équilatéraux isométriques coplanaires), soit un deltaèdre euclidien non convexe, ce qui, dans les deux cas, est inacceptable[1].

Comme il est impossible d'avoir des sommets de degré supérieur à 5, on en conclut donc que si $X \geq 1$, alors seuls deux cas sont acceptables (les solutions 16 et 19) et dix autres solutions du tableau sont à rejeter (les cas 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18).

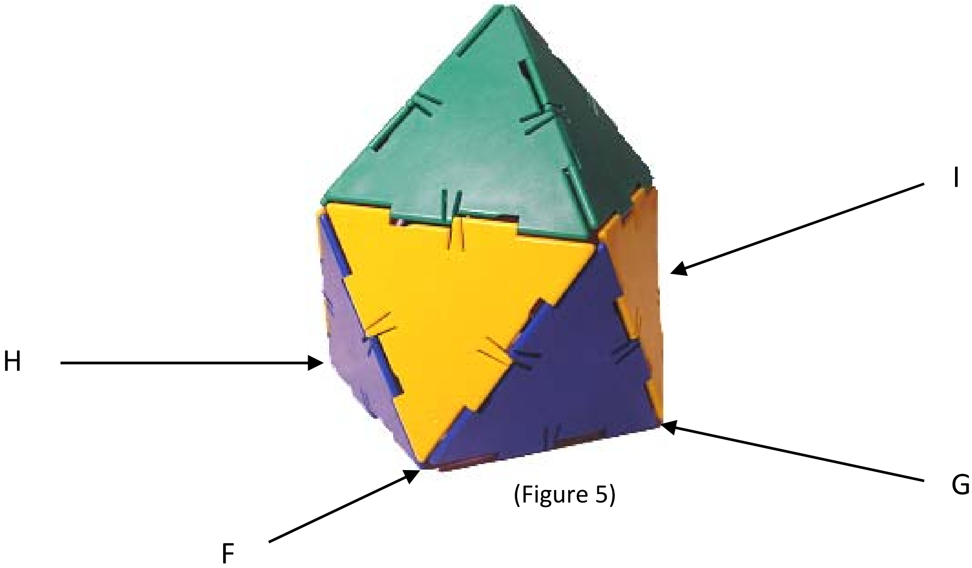
Pour terminer, il reste à analyser les solutions des deltaèdres euclidiens "potentiels" n'ayant pas de sommets d'ordre 3 ($X = 0$). Parmi ceux-ci, seule la solution 2 (le deltaèdre à 18 faces) n'existe pas. S'il existait, ce deltaèdre devrait avoir un seul sommet d'ordre 4 et dix sommets d'ordre 5. Sa non-existence, ici aussi, peut facilement se voir grâce aux "polydrons".

On part de l'unique sommet de degré 4 (figure 4) et on continue la construction du deltaèdre euclidien convexe en formant des sommets de degré 5 à la base de la pyramide à base carrée (figure 5).



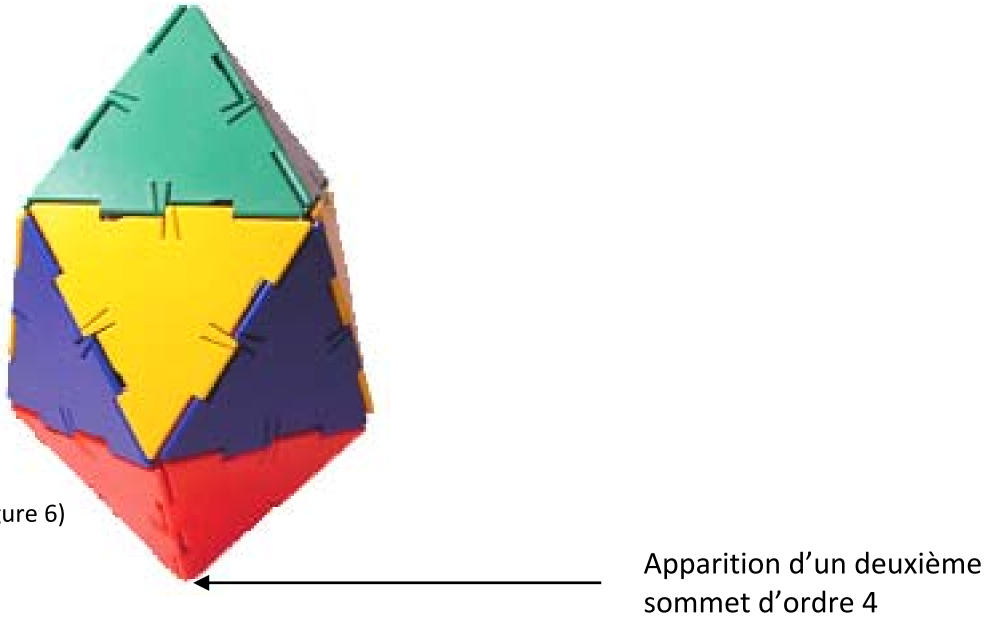
(Figure 4)

[1] Ces deux faits peuvent très facilement être montrés avec des triangles du type "polydron" comme illustrent les photos.



(Figure 5)

Il apparaît les sommets F, G, H et I. Comme ceux-ci doivent être tous de degré 5, il faut encore ajouter quatre nouveaux triangles équilatéraux autour des sommets F, G, H et I pour satisfaire cette contrainte.



(Figure 6)

Cet ajout fait apparaître un nouveau sommet de degré 4 (figure 6). Ceci est inacceptable puisque cela contredit l'hypothèse de départ qui affirmait qu'il n'existait qu'un seul sommet d'ordre 4. Dès lors, le deltraèdre à 18 faces est à rejeter.

L'existence des deltaèdres convexes correspondant aux solutions (1, 3, 4, 5, 6 et 7) est montrée grâce toujours aux "polydrons".

 Icosaèdre régulier (20 faces)	 (16 faces)
 (14 faces)	 (12 faces)
 Dipyramide pentagonale (10 faces)	 Octaèdre régulier (8 faces)

<u>Remarques</u>:

L’analyse des solutions admissibles fait apparaître:

1) qu’il existe des deltaèdres dont tous les sommets sont respectivement de degré 3, 4 ou 5;
2) qu’il existe des deltaèdres avec des sommets de degré (3-4) et (4-5);
3) qu’il n’existe pas de deltaèdres avec simultanément des sommets de degré 3, 4 et 5.

8. Les polyèdres euclidiens convexes à faces carrées

Un raisonnement analogue aux deltaèdres euclidiens convexes fait apparaître que les polyèdres convexes à faces carrées sont déterminés à partir du système suivant:

$$\begin{cases} F + S - A = 2 & \\ 4\,F = 2\,A & \text{(toutes les faces contiennent quatre arêtes et chacune d'elle appartient à deux faces)} \\ S = X & \text{(tous les sommets sont de degré 3 et il n'existe pas de sommet de degré 4 et 5)} \\ A = \dfrac{3X}{2} & \text{(en chaque sommet, il arrive trois arêtes et toute arête détermine deux sommets)} \end{cases}$$

Ce système est équivalent à "X = 8".

En effet : $F + S - A = 2$ et $4F = 2A$ permet d'écrire: $\dfrac{A}{2} + S - A = 2 \iff A + 2\,S - 2\,A = 4$

$S = X$ et $A = \dfrac{3X}{2}$ donnent: $\dfrac{3X}{2} + 2\,X - 3\,X = 4$

$$\iff$$

$$3\,X + 4\,X - 6\,X = 8$$

$$\iff$$

$$X = 8$$

Cette unique solution affirme qu'il n'existe qu'un seul polyèdre euclidien convexe à faces carrées. De plus, celui-ci possède huit sommets, (3 x 8)/2 arêtes = 12 arêtes et 12/2 faces = 6 faces.

Il s'agit, bien entendu, du bon vieux cube que nous côtoyons tous depuis notre enfance.

Cube

9. Les polyèdres convexes à faces pentagonales

Ici aussi, le même raisonnement que pour les deltaèdres euclidiens convexes et l'étude des polyèdres euclidiens convexes à faces carrées nous amènent à résoudre le système:

$$\begin{cases} F + S - A = 2 \\ 5\,F = 2\,A \\ S = X \\ A = \dfrac{3X}{2} \end{cases}$$

L'unique solution est donnée par X = 20. Elle affirme, ici aussi, qu'il n'existe qu'un seul polyèdre euclidien convexe à faces pentagonales. Cet unique polyèdre possède 12 sommets, (3x.20)/2 arêtes = 30 arêtes et (2 x 30)/5 faces = 12 faces.

Il s'agit bien entendu du dodécaèdre régulier.

Dodécaèdre

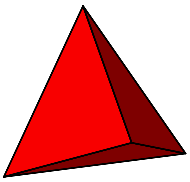
10. Conclusion

L'étude des P.E.C.F.R.I a mis en évidence qu'il en existe exactement dix. Parmi ceux-ci, cinq sont homogènes en leurs sommets (les cinq platoniciens). Les cinq autres sont non homogènes en leurs sommets et sont formés uniquement de triangles équilatéraux isométriques.

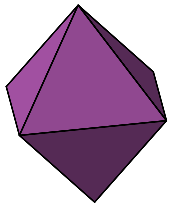
11. Classement des P.E.C.F.R.I.

Parmi les 10 polyèdres euclidiens convexes à faces régulières isométriques; 5 sont homogènes en leurs sommets. Ce sont les 5 polyèdres platoniciens; ils sont identiques aux polyèdres convexes réguliers.

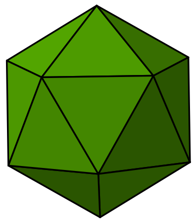
Les P.E.C.F.R.I.H.S.: OU Les polyèdres platoniciens (réguliers)



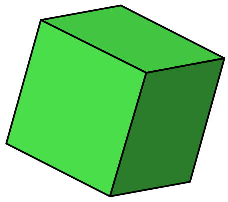
Le tétraèdre



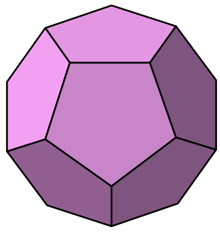
L'octaèdre



L'icosaèdre



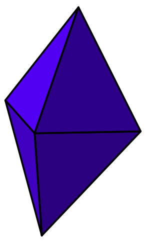
Le cube



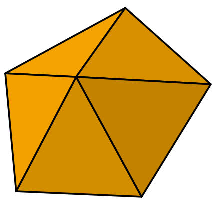
Le dodécaèdre

Les 5 autres polyèdres euclidiens convexes à faces régulières isométriques et non-homogènes en leurs sommets sont décrits ci-dessous. Ils sont tous formés de triangles équilatéraux.

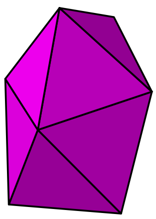
Les P.E.C.F.R.I.N.H.S.:



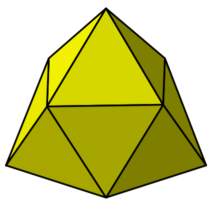
Le diamant triangulaire



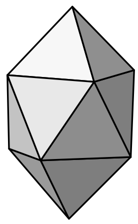
Le diamant pentagonal



Le snub disphénoïde



Le prisme triangulaire triaugmenté



La pyramide carrée gyroallongée

Parmi les 10 polyèdres euclidiens convexes à faces régulières isométriques (P.E.C.F.R.I.); 8 sont formés de triangles équilatéraux, un de carrés (le cube) et un de pentagones réguliers (le dodécaèdre régulier).

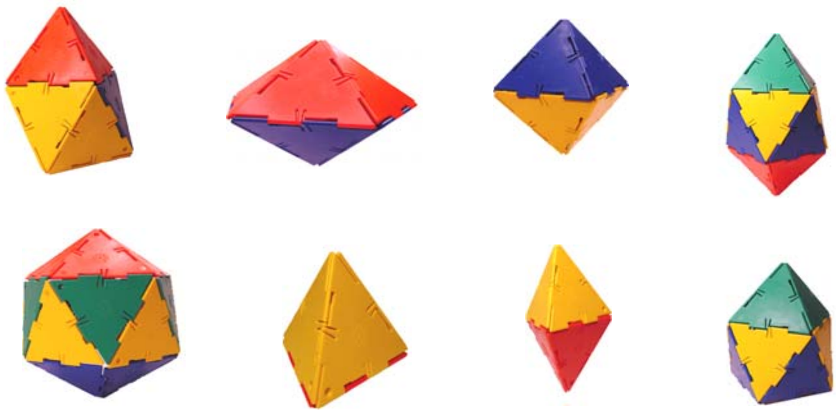
Les 10 polyèdres euclidiens convexes à faces régulières isométriques

Cube 	**Dodécaèdre régulier** 
Dipyramide pentagonale (10 faces) 	**Octaèdre régulier** (8 faces) 
Icosaèdre régulier (20 faces) 	(16 faces) 
Tétraèdre régulier (4 faces) 	**Dipyramide triangulaire** (6 faces) 
(14 faces) 	(12 faces) 

12. À propos de la contrainte "euclidien" dans les P.E.C.F.R.I.

Nous venons de montrer qu'il existe exactement dix P.E.C.F.R.I.:

8 deltaèdres:

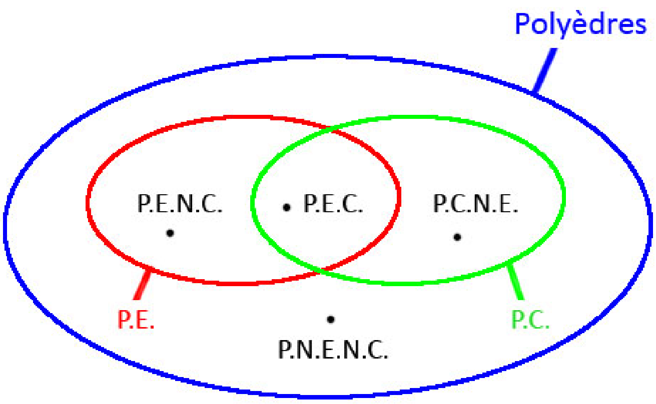


1 cube:

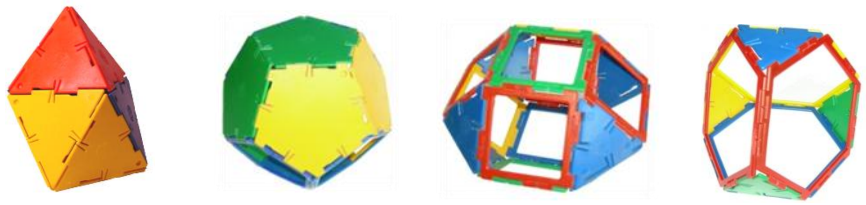
1 dodécaèdre:

Rappel: Un polyèdre *euclidien* (convexe ou non convexe) est tel que deux faces contigües ne sont pas coplanaires.

Exemple:



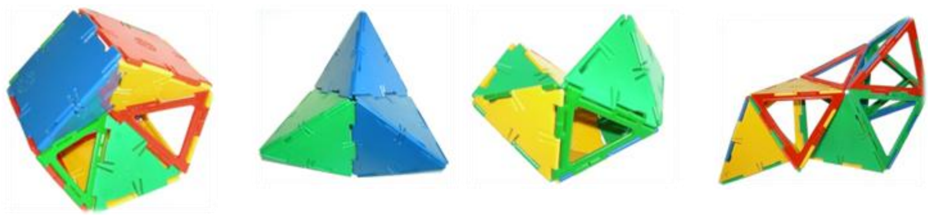
Polyèdres euclidiens convexes (P.E.C.)



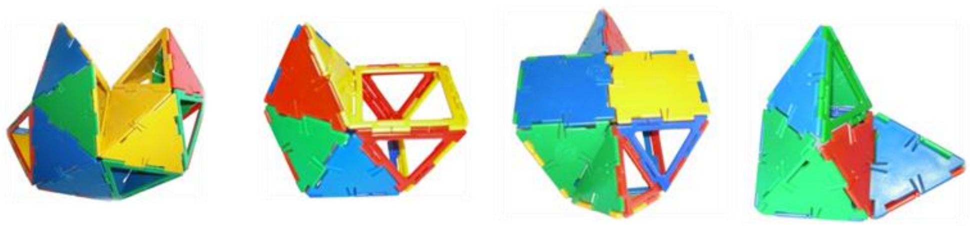
Polyèdres non euclidiens convexes (P.N.E.C.)

Polygones convexes (P.C.)

Polyèdres euclidiens non convexes (P.E.N.C.)

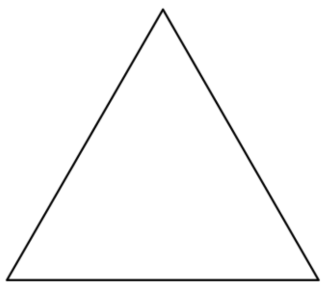


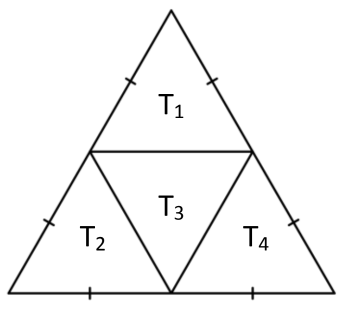
Polyèdres non euclidiens non convexes (P.N.E.N.C.)



Si dans les polyèdres convexes on "oublie" la contrainte "euclidien" alors il existe une double infinité de P.C.F.R.I.

En effet, en s'appuyant sur le théorème des milieux dans les triangles, on peut décomposer tout triangle équilatéral en quatre "petits" triangles équilatéraux isométriques.





"T_1 *iso* T_2 *iso* T_3 *iso* T_4"

Dès lors, à partir du *tétraèdre régulier*, il est possible d'obtenir des P.C.F.R.I. ayant:

4 x 1 faces isométriques 4×4^0 faces	4 x 4faces isométriques 4×4^1 faces	4 x 16faces isométriques 4×4^2 faces	…	4 x n faces isométriques 4×4^n faces $(n \in IN_0)$
				…

À partir du *bitétraèdre régulier*, il est possible d'obtenir des P.C.F.R.I. ayant:

6 x 1 faces isométriques 6×4^0 faces	6 x 4 faces isométriques 6×4^1 faces	6 x 16faces isométriques 6×4^2 faces	…	6 x n faces isométriques 6×4^n faces $(n \in IN_0)$
				…

Le même principe de décomposition des faces des autres deltaèdres euclidiens convexes permet d'obtenir d'autres P.C.F.R.I. ayant 8×4^n faces, 10×4^n faces, 12×4^n faces, 14×4^n faces, 16×4^n faces et 20×4^n faces.

Conclusion

Il existe une infinité de polyèdres convexes formés de triangles équilatéraux isométriques.

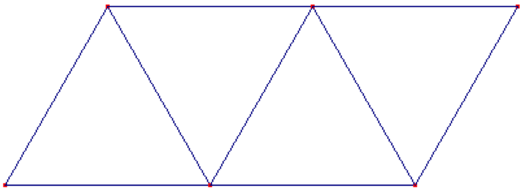
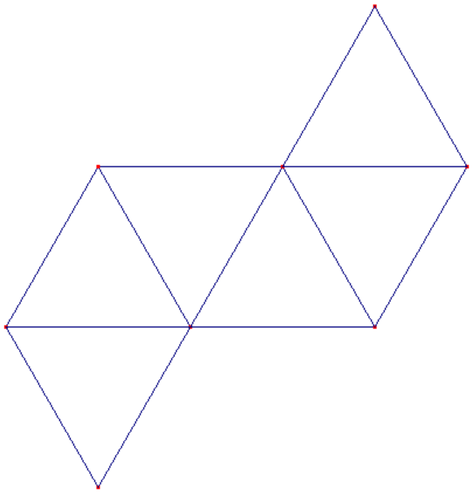
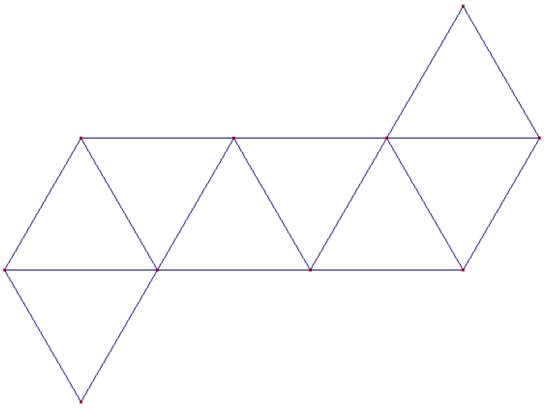
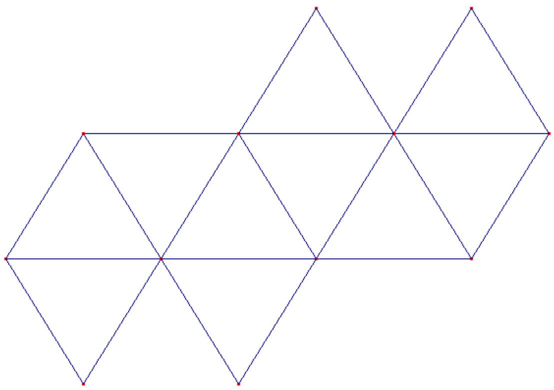
Remarque: En partant d'un cube, il est également possible de montrer qu'il existe une infinité de polyèdres convexes formés de carrés isométriques.

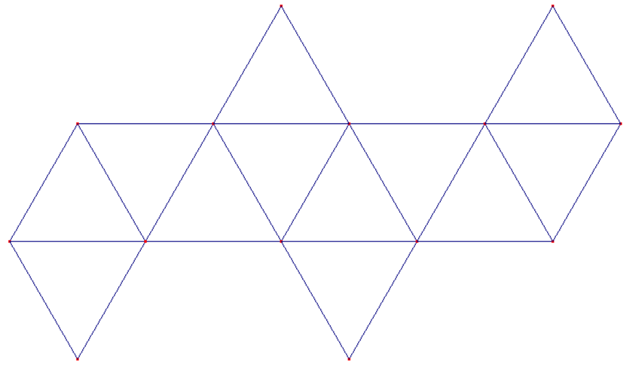
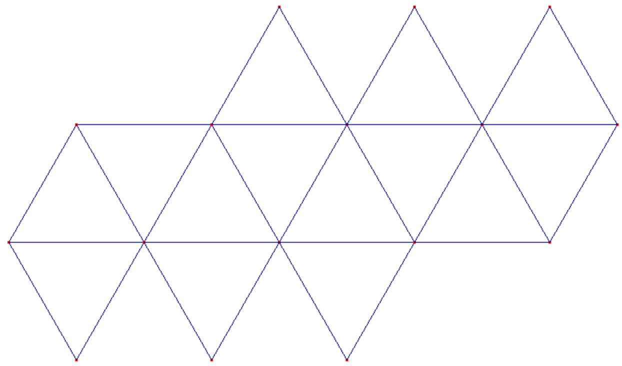
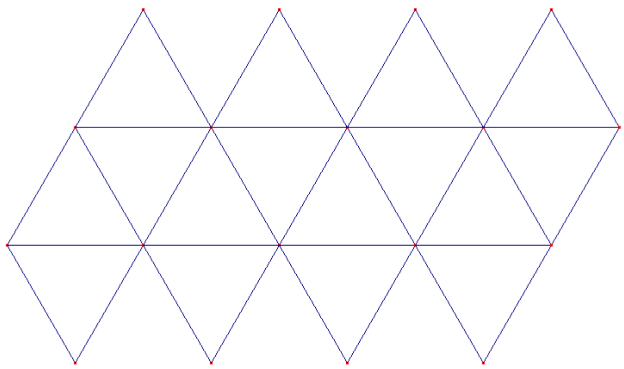
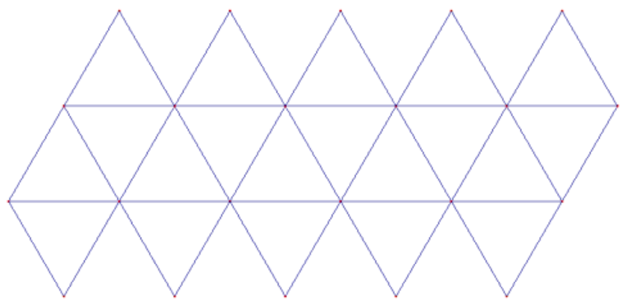
À partir du *cube*, il est possible d'obtenir des P.C.F.R.I. ayant:

6 x 1 faces isométriques 6×4^0 faces	6 x 4 faces isométriques 6×4^1 faces	6 x 16 faces isométriques 6×4^2 faces	…	6 x n faces isométriques 6×4^n faces $(n \in IN_0)$
				…

13. Les développements des P.E.C.F.R.I.

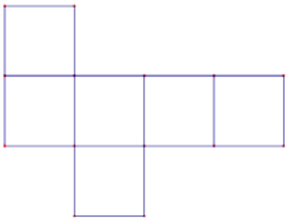
13.1. Les développements des 8 deltaèdres

<table>
<tr><td>Le tétraèdre
</td><td></td></tr>
<tr><td>La dipyramide triangulaire
</td><td></td></tr>
<tr><td>L’octaèdre régulier
</td><td></td></tr>
<tr><td>La di-pyramide pentagonale
</td><td></td></tr>
</table>

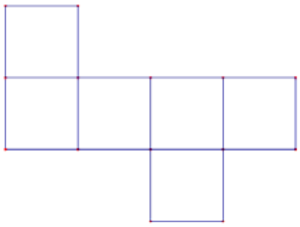
Le "12 faces" 	
Le "14 faces" 	
Le "16 faces" 	
L'icosaèdre régulier 	

13.2. Les 11 développements du cube

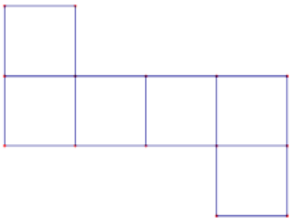
1.



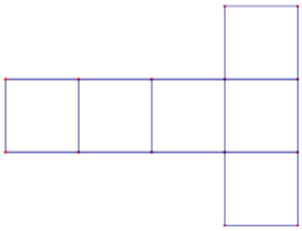
2.



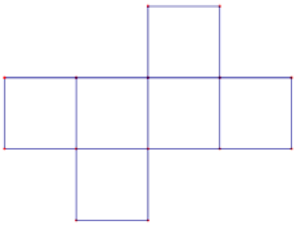
3.



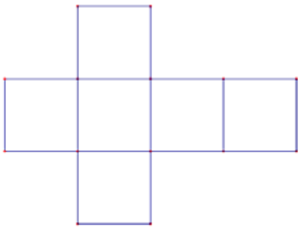
4.



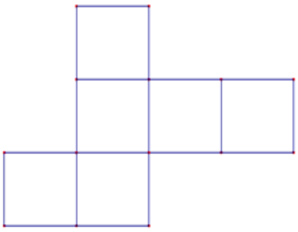
5.



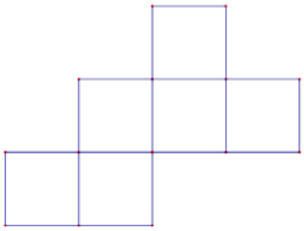
6.



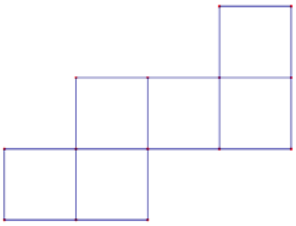
7.



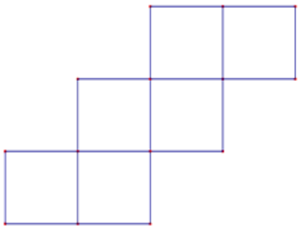
8.



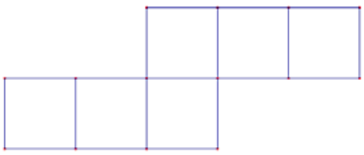
9.



10.



11.



13.3. Un développement du dodécaèdre