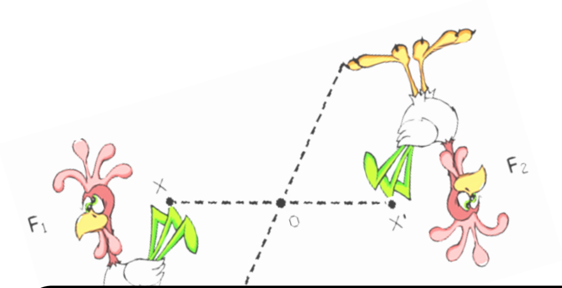
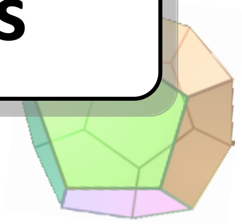
Centre de Recherche de la HAUTE ECOLE
de la Communauté française en HAINAUT

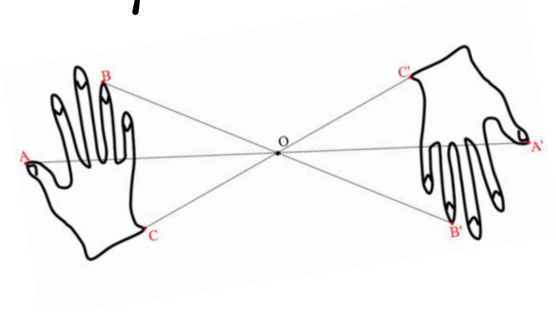


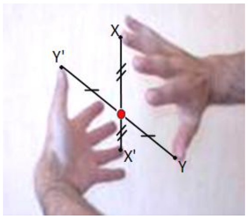
Mathématiques élémentaires



Symétries orthogonales et symétries centrales en géométrie plane et en géométrie dans l'espace:

Déplacements ou retournements?





Cellule de géométrie – Catégorie pédagogique de la HEH

DEMAL Michel
demal.michel@skynet.be

DRAMAIX Jérémy
jeremy.dramaix@gmail.com

HIGNY Samuel
higny_samuel@hotmail.com

MALAGUARNERA Angelo
angelo.malaguarnera@gmail.com

POPELER Danielle
d.popeler@skynet.be

Avec la collaboration de
DUBUCQ J.

L'atelier a pour objet de lever les confusions et les ambiguïtés existant au niveau des déplacements et des retournements en géométrie plane et en géométrie de l'espace tant du point de vue théorique que des modèles généralement choisis pour les illustrer.

En particulier, nous aborderons les cas des symétries centrales et des symétries orthogonales et montrerons que celles-ci ne gardent pas le même statut suivant que l'on se situe dans le plan ou dans l'espace.

Plan

Partie théorique 1 – Importance des déplacements et des retournements de l'espace pour les sciences et les mathématiques

1. "Le paradoxe des mathématiques citoyennes": Le cas de la géométrie

Il existe actuellement, dans notre société, un paradoxe entre, d'une part,

"le souhait de former le citoyen lambda, pour qu'il comprenne, qu'il maîtrise les réalités scientifiques et technologiques qui l'entourent"

et, d'autre part,

"le refus de cette même société à inclure dans l'enseignement obligatoire, les outils géométriques nécessaires à la compréhension, à la maîtrise de ces réalités scientifiques et technologiques"

Ce n'est pourtant pas fautes d'appels de scientifiques de tout haut niveau pour qu'une véritable formation géométrique efficace et utile, en concordance avec les évolutions scientifiques et technologiques actuelles, soit donnée aux élèves de l'enseignement obligatoire.

A titre de simples exemples, citons ***Georges CHARPAK, Roland OMNES*** et ***Francis BUEKENHOUT*** ainsi que quelques situations scientifiques et mathématiques où les déplacements et les retournements du plan et de l'espace (vus comme isométries qui conservent ou inversent les orientations) sont indispensables pour les comprendre.

1.1. Citations de Georges CHARPAK, Roland OMNES et Francis BUEKENHOUT

Georges CHARPAK et Roland OMNES

"Sans la science, on ne peut rien comprendre aujourd'hui au monde moderne.
Rien n'est plus important que de donner aux jeunes l'éducation (scientifique) dont ils ont besoin, qui fera d'eux des hommes et des femmes libres, capables de comprendre l'Univers qui les entoure et sa signification.
Il le faut, d'urgence, avant que des gourous, des marchands, des adorateurs de légendes ou des illuminés aient le temps de s'emparer d'eux.
Qu'ils aient des savants le vrai savoir …"

Extrait de "Soyez savants, devenez prophètes"- éd. Odile JACOB.
Georges CHARPAK est prix NOBEL(1992) de physique et physicien au CERN.
Roland OMNES est physicien théoricien et professeur émérite à la Faculté des Sciences de Paris XI -ORSAY.

Francis BUEKENHOUT

"Une autre géométrie élémentaire connaît une explosion dans les domaines les plus divers comme la chimie, la cristallographie, la biologie, la technologie, l'architecture, la robotique.
La liste n'est pas exhaustive, toutes les sciences, au sens le plus large, sont concernées; de même que les arts et la culture en général.
Il est urgent que la géométrie cesse de se replier sur un réduit minuscule et sans ambition, sur un statut de science morte. Il faut que la géométrie participe au développement de la science, de la technologie et de la culture».

F. BUEKENHOUT est membre de l'académie des sciences de Belgique

Cette "autre géométrie" s'appelle "**La Géométrie des Transformations"**.

Dans la géométrie des transformations, les transformations sont perçues comme des outils qui permettent, grâce à leurs propriétés, de:

- découvrir et/ou démontrer les propriétés des objets géométriques du plan et de l'espace;
- créer des figures ayant des régularités "répétitives" (frises – rosaces – tapisseries);
- classer des objets du plan et de l'espace;
- percevoir si un objet est orienté ou non orienté (paires d'objets énantiomères - formes "gauche" ou "droite" d'un objet - molécules chirales);
- créer des objets (snub-cube; snub-dodécaèdre);
- …

Cette géométrie se base sur les 3 piliers suivants:

1. les figures et les solides géométriques;
2. les transformations du plan et de l'espace (en particulier les similitudes en mathématiques élémentaires);
3. le concept qui "relie" les propriétés des transformations aux propriétés des objets, c'est-à-dire sur la notion de "*symétrie au sens large"* ou d'*"automorphisme".*

   Par automorphisme, il faut comprendre la notion simple de **"*transformation qui superpose un objet à lui-même tout en conservant sa structure".***

Pour ce dernier point, plusieurs autres personnalités du monde scientifique attirent aussi l'attention sur l'importance fondamentale du concept de **"*symétrie au sens large"*** *ou* ***"d'automorphisme"*** en sciences et en mathématiques.

<u>A ce sujet, ils précisent</u>:

"La symétrie est un aspect fascinant de la nature, mais c'est aussi un concept scientifique fondamental qui a envahi les mathématiques, la physique, la chimie et jusqu'à la biologie. Peut-être Paul VALERY y songeait-il quand il écrivait: 'Il n'y a pas de choses simples, mais il y a une manière simple de voir les choses'."

Jean SIVARDIERE

"La symétrie (scientifique) est fondamentale dans les sciences quelles que soient les disciplines. La symétrie est partout. Elle permet de décrire de manière précise de nombreux systèmes, de clarifier et de simplifier l'étude de leurs propriétés. Des résultats très importants peuvent ainsi être prédits de manière rigoureuse sans que l'on ait à faire appel à des théories mathématiques sophistiquées."

Jean SIVARDIERE

"La symétrie (scientifique) est un outil de notre perception car elle permet de réduire de manière importante les informations nécessaires à la connaissance globale d'un objet, d'une figure, d'un événement. Pourtant elle n'est pas enfermée dans une spécialité mais apparaît plutôt comme un concept transversal relevant aussi bien des sciences exactes que des sciences du vivant, voire des disciplines artistiques."

Gilles COHEN – TANNOUDJI (prix Nobel de physique 1997) et Yves SECQUIN

" …tant de choses peuvent être connues sur la structure même d'un objet grâce à ses automorphismes (symétries)."

FREUDENTHAL

"Les modèles de symétrie sont intrinsèques à tous les aspects de la perception et semblent jouer un rôle essentiel dans <u>les processus créatifs</u> à la fois en sciences et en arts.
Sans une conscience de l'importance de tels concepts abstraits pour les réponses cathartiques qui étayent l'effort humain, il est douteux que les présentes tentatives désespérées faites en vue d'améliorer la quantité et la qualité des relations (en recherche scientifique et développement ou en arts) ne conduisent à rien d'autre que l'échec."

Harry W. KROTO (Prix Nobel de chimie 1996)

"La symétrie est une notion universelle et un principe simplificateur.
Trouver la symétrie cachée est souvent la clé de l'énigme.
Mathématiques, sciences, arts, histoire des idées, rien n'échappe à la symétrie.
La nature préfère la symétrie ou, notion encore plus fascinante, la "presque-symétrie", source de l'évolution. Et que dire des intrigantes "brisures de symétrie" ?
Pourquoi la symétrie fascine t- elle l'esprit humain ?
Pourquoi est-elle un outil d'analyse si puissant? Un début de réponse se trouve peut-être dans la remarque suivante de Montesquieu: "La raison qui fait que la symétrie plaît à l'âme, c'est qu'elle lui épargne de la peine, qu'elle soulage, et qu'elle coupe, pour ainsi dire, l'ouvrage par la moitié."

TANGENTE - Mars/Avril 2002 - n°85.

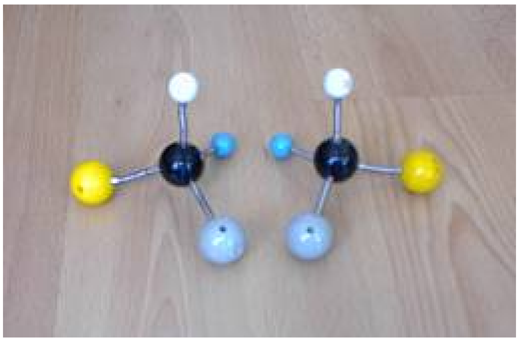
1.2. Exemples de situations scientifiques et mathématiques où les déplacements et les retournements du plan et de l'espace (vus comme isométries qui conservent ou inversent les orientations) sont indispensables pour les comprendre:

1.1.1. Déplacements et/ou retournements de l'espace et la chiralité en chimie (ou les molécules d'orientation différentes)

Semblablement à nos mains qui sont isométriques mais d'orientations différentes (puisque l'une est gauche et l'autre est droite), certaines molécules peuvent apparaître sous deux formes: une forme dite "gauche" et une forme dite "droite". On parle alors *des deux formes énantiomères de la molécule*.

Main gauche

Main droite



Ces deux molécules de formes différentes mais de constituants identiques possèdent les mêmes propriétés physiques mais pas chimiques.
Ainsi, la molécule de limonène sent *le citron* sous une forme et *l'orange* sous l'autre forme.

Pour savoir si une molécule existe sous la forme "gauche" et sous la forme "droite", il suffit d'observer (même indirectement) sa structure géométrique.

Premier cas:

Si une molécule est *superposable à elle-même par un retournement* de l'espace, alors elle ne possède *pas de forme "gauche"* ni de forme *"droite"*; elle est *achirale*.

Ou de manière équivalente

Si une molécule admet *un automorphisme du type retournement,* alors elle ne possède *pas de forme "gauche" ni de forme" droite"*; elle est *achirale*.

Ou encore de manière pratique:

Si une molécule admet ***un centre de symétrie ou un plan de symétrie,*** *elle est achirale.*

Deuxième cas:

Si une molécule est superposable à elle-même *uniquement par un automorphisme du type déplacement,* alors, elle est *chirale* et peut apparaître sous une forme "gauche" et sous une autre forme "droite"(les formes "s" et "r").

Cette notion de chiralité, bien que connue depuis la fin du 19e siècle, est fondamentale au niveau des propriétés chimiques comme le montre l'article de Jacques PONCIN écrit dans le journal Belge "LE SOIR" du 11-10-2001:

"Les molécules telles nos deux mains"

Un Nobel américano-japonais - JACQUES PONCIN

"Le prix Nobel de chimie a cette année couronné trois pionniers de la catalyse inverse optique. Ainsi formulé, l'objet des travaux de William Knowles, Ryoji Noyori et Barry Sharpless peut sembler bien hermétique. Pourtant, la technique qu'ils ont inventée a déjà eu de nombreuses applications, notamment en pharmacie. Au point qu'ils auraient presque pu recevoir le Nobel de la médecine.

Au départ, une découverte franco-hollandaise du XIXe, qui montre que les produits chimiques sont des mélanges de deux types de molécules, les unes dites "s", les autres "r". Cette propriété fut qualifiée de chiralité, d'après le mot grec qui signifie "main", dans la mesure où les molécules, les énantiomères comme on dit, "s" et "r" se ressemblent et diffèrent comme nos deux mains.

Cette trouvaille serait restée une curiosité s'il ne s'était avéré que la chiralité avait une grande importance dans la nature. Ainsi, le même produit, le limonène sent le citron s'il est "s", l'orange, s'il est "r", ce qui s'explique par le fait que nous sommes dotés de récepteurs très spécifiques, qui donc ne réagissent qu'à un énantiomère. Moins anecdotique (hélas) : un énantiomère de la thalidomide (Softenon) est un médicament anti-nausées pour les femmes enceintes, l'autre provoque des dommages irréversibles aux fœtus... On l'a appris un peu tard...

Ceci signifie clairement que, lorsqu'on fabrique un médicament, il convient d'être attentif à la possible réaction différente de l'organisme face aux deux types de molécules. Ainsi, pour aider l'organisme d'un parkinsonien à fabriquer à nouveau un peu de la dopamine qui manque à son cerveau, il faut lui en donner le précurseur dans sa forme "1".

Et c'est précisément en essayant de fabriquer de la "L-dopa" que William Knowles, chimiste de la firme Monsanto, de Saint-Louis, dans le centre des Etats-Unis, a compris que pour réaliser des synthèses chimiques dont il ne sort qu'un énantiomère, il fallait les catalyser (les "doper") avec des produits ayant eux-mêmes une chiralité bien déterminée.

C'est ainsi qu'il fut le premier à réaliser des synthèses asymétriques, un travail que reprit et amplifia un chercheur de l'université de Nagoya, Ryoji Noyori. A eux deux, ils se partagent la moitié du Nobel. L'autre moitié du prix va à un chercheur du Scripps Institute(Californie), Barry Sharpless qui appliqua le même principe à un autre type de réactions. Les deux premiers avaient travaillé sur l'hydrogénation. Sharpless fit de même avec l'oxygénation, ouvrant la porte à de nombreuses applications industrielles dans les domaines des médicaments, des édulcorants, des insecticides."

Un autre exemple qui montre l'importance de la chiralité (et donc de la Géométrie des Transformations) est celui lié à la compréhension de la maladie de la vache folle:

Le professeur Stanley Prunier a mis en évidence que les vaches folles étaient porteuses de prions d'un type. L'hypothèse de S. Prunier pour expliquer la maladie de la vache folle est que *les protéines pathogènes ont la même composition chimique que les protéines saines mais sous l'autre forme.*

Cette découverte lui valut le prix Nobel de médecine en 1997.

1.1.2. Déplacements et/ou retournements de l'espace et le classement des cristaux

Le classement des cristaux fait appel à la notion de groupes de symétries, d'automorphismes. Les cristaux sont classés selon 230 groupes de symétries.

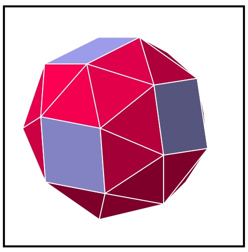
1.1.3. Déplacements et/ou retournements de l'espace et du plan et l'étude des objets géométriques

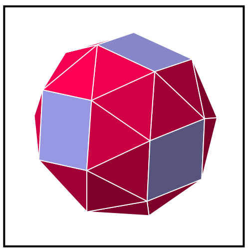
Les exemples simples ci-dessous illustrent également l'importance des transformations du plan ou de l'espace dans la modélisation en géométrie:

- les 7 types de frises classées selon les groupes de symétries qui les conservent;
- les 17 types de tapisseries périodiques classées aussi selon les groupes de symétries qui les conservent;
- le classement des polyèdres convexes à faces régulières en polyèdres réguliers (les polyèdres transitifs en leurs faces et en leurs sommets) et les semi-réguliers (les polyèdres transitifs en leurs sommets);
- le classement des pavages du plan avec des polygones réguliers, en pavages réguliers (c'est à dire, les pavages transitifs en leurs faces et en leurs sommets) et les pavages semi-réguliers (c'est à dire, les pavages transitifs seulement en leurs sommets);
- les créations d'objets à partir de l'orbite d'un point.

  En particulier, les snub-cube et snub-dodécaèdre sont obtenus respectivement à partir des groupes des déplacements qui conservent le cube et le dodécaèdre.

  - Snub-cube: polyèdre où en chaque sommet s'attachent 4 triangles équilatéraux et un carré.

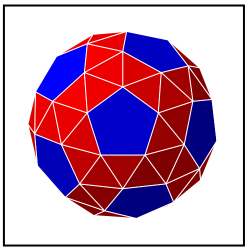


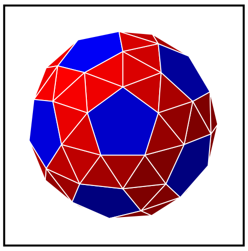


Engendré à partir des déplacements qui superposent un cube à lui-même.

Il existe sous une forme une forme gauche et sous une forme droite.

- <u>Snub-dodécaèdre</u>: polyèdre où en chaque sommet s'attachent 4 triangles équilatéraux et un pentagone régulier;





Engendré à partir des déplacements qui superposent un dodécaèdre à lui-même.

Il existe sous une forme une forme gauche et sous une forme droite.

- l'économie dans la recherche des propriétés des constituants d'un objet.

  En effet, il suffit de connaître les propriétés d'un point ou d'une partie de l'objet pour connaître automatiquement les propriétés de tous les points appartenant à l'orbite du point analysé ou à l'orbite de la partie analysée. Ainsi, si on connaît les propriétés d'un point non-particulier d'un cube, on connaît automatiquement les propriétés des 48 points appartenant à l'orbite du point non-particulier. Pour connaître, par exemple, les propriétés de tous les points de la surface d'un cube, il suffit de connaître les propriétés de tous les points de la " figure de base", c'est-à-dire, pour le cube, les propriétés de tous les points d'un "triangle de base" dont les 3 sommets sont respectivement le sommet d'une face, le milieu d'une arête incidente au sommet considéré et le centre d'une face incidente à l'arête considérée. Le "triangle de base" représente 1/48$^{\text{ème}}$ de la surface du cube.

Partie théorique 2 – **Une "genèse spiralée" des déplacements et des retournements de l'espace pour l'enseignement obligatoire**

1. Définitions scientifiques "actuelles" des déplacements et des retournements du plan et de l'espace

Contrairement à l'époque de l'étude des transformations géométriques pour elles-mêmes, les définitions des déplacements et des retournements du plan ou de l'espace *en Géométrie des Transformations ne s'appuient plus sur les composées paires ou impaires de symétries orthogonales ou de symétries bilatérales* (par rapport à un plan) mais bien *sur les notions de permutations qui conservent les distances (les isométries) et* d'orientations de l'espace considéré.

Ainsi, **en Géométrie des transformations du plan:**

- *les déplacements* sont les permutations qui conservent les distances et les orientations du plan;
- *les retournements* sont les permutations qui conservent les distances et *inversent les orientations* du plan;

Ou, de manière équivalente:

- *les déplacements* sont les permutations qui conservent les distances et les *types de **dessins** de mains (ou de dessins de pieds)*;
- *les retournements* sont les permutations qui conservent les distances et *inversent les types de **dessins** de mains (ou de dessins de pieds)*.

Remarques: On peut montrer que, dans le plan:

- les ***déplacements*** se réduisent aux rotations (symétries centrales) et aux translations (voir en annexe).
- les ***retournements*** se réduisent aux symétries orthogonales et aux symétries glissées (voir en annexe).

en Géométrie des Transformations de l'espace:

- *les déplacements* sont les permutations qui conservent les distances et les orientations de l'espace (voir annexe 1);
- *les retournements* sont les permutations qui conservent les distances et *inversent les orientations* de l'espace (voir annexe 1);

Ou, de manière équivalente:

- *les déplacements* sont les permutations qui conservent les distances et les types de mains *(ou de pieds)*;
- *les retournements* sont les permutations qui conservent les distances et *inversent les types de mains (ou de pieds)*.

Remarque 1: On peut montrer que dans l'espace:

- *les **déplacements*** se réduisent aux rotations, aux translations et aux vissages (voir page 28 du texte);

- *les **retournements*** se réduisent aux symétries centrales, symétries bilatérales (symétries par rapport à un plan), aux antirotations et aux symétries bilatérales glissées (voir page 28 du texte).

Remarque 2: Les repères lévogyres et dextrogyres de l'espace ou les deux " véritables" orientations de l'espace (voir annexe 1) sont isomorphes aux mains droite et gauche et font l'objet aussi d'une convention nominative comme les noms de nos mains.

2. "Genèse spiralée" des déplacements et des retournements de l'espace pour l'enseignement obligatoire de 5 à 18 ans

1.1. Modèles concrets, images mentales et transformations

Nul besoin de rappeler que, pour des non initiés vierges de toute compétence et de toute connaissance, la compréhension et la maîtrise des transformations du plan et de l'espace passe par l'appropriation de bonnes images mentales.

Nul besoin de rappeler non plus que l'appropriation d'images mentales passe par des manipulations de modèles concrets et par tous les élèves.
("Manipuler, manipuler, il en restera toujours quelque chose!")

Un bon modèle d'une transformation est un modèle qui:

- recouvre toutes les caractéristiques et toutes les propriétés de la transformation considérée;
- est en concordance avec la théorie liée à la transformation en question.

Pour l'étude **des déplacements et des retournements de l'espace**, la difficulté à surmonter est la **non matérialisation concrète des retournements**.

Dès lors, il faut faire prendre conscience *(à l'aide de notre corps)* que n'importe quelle partie de notre corps ne peut effectuer que des déplacements de l'espace. Ainsi, quoi que nous fassions, **notre main droite (réelle) restera toujours notre main droite (réelle)** et ne deviendra jamais notre main gauche (réelle).

Pour obtenir, par exemple, un retournement de l'espace, on peut utiliser un miroir. Mais *le miroir ne donne qu'une image* ***virtuelle*** *inversée de la réalité* ! Ainsi, **face à un miroir**, **une main gauche réelle** devient **une main droite virtuelle** *(donc non réelle*).

1.2. Genèse spiralée des déplacements et des retournements du plan et de l'espace

Au départ, *"faut-il commencer par la Géométrie des Transformations du Plan ou par la Géométrie des Transformations de l'Espace?"*. Nos nombreuses expériences nous incitent à répondre: *"Ni par l'une, ni par l'autre!".*

Le cours doit être constitué d'une succession d'activités où il existe des va-et-vient continuels entre la géométrie plane et la géométrie de l'espace tout en accordant **une priorité à l'étude de la géométrie plane**.

Cette position s'appuie sur les deux remarques suivantes:

1) de 0 à 6 ans, les enfants se sont déjà familiarisés aux objets de l'espace;
2) l'objectif à poursuivre dès le primaire n'est pas de développer une géométrie où l'on se contente de décrire des objets géométriques (une géométrie de **description)**, mais bien une géométrie des transformations: **structurée, cohérente et progressive** où de véritables activités mathématiques sont rencontrées (y compris les prémices des preuves).

   Dans la géométrie des transformations :

   - d'une part, des embryons de justifications sur les solides sont élaborés et ceux-ci sont presque toujours basés sur des propriétés de figures planes;
   - d'autre part, des règles de la géométrie des transformations de l'espace doivent être acquises. En particulier, celle du procédé pour distinguer les déplacements des retournements de l'espace.

Le seul moyen permettant de distinguer les déplacements et les retournements de l'espace que nous croyons abordable à la fin du primaire et au secondaire est la règle *de la non-conservation (inversion) des mains par les retournements* et *de la conservation des mains par les déplacements*.

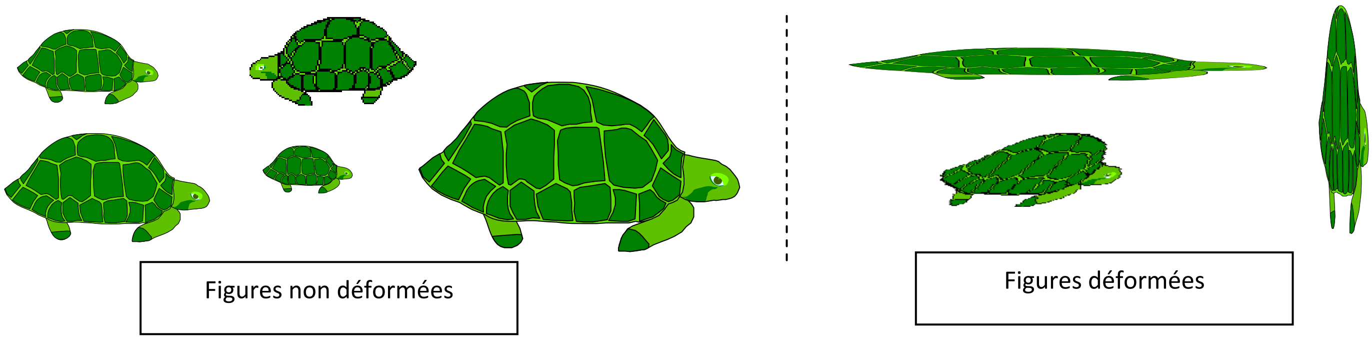
En effet, comme dit ci-avant, les mains sont "isomorphes" aux orientations dextrogyre et lévogyre de l'espace (voir annexe 1).

Comme il n'est pas possible de matérialiser ***concrètement*** *cette inversion dans l'espace, cette règle s'accepte comme une extension de la même règle pour le plan.* Dans le plan, celle-ci peut se concrétiser et s'acquérir sans difficulté grâce aux dessins de mains sur **transparents** et à l'utilisation de ceux-ci pour modéliser les retournements et les déplacements du plan.

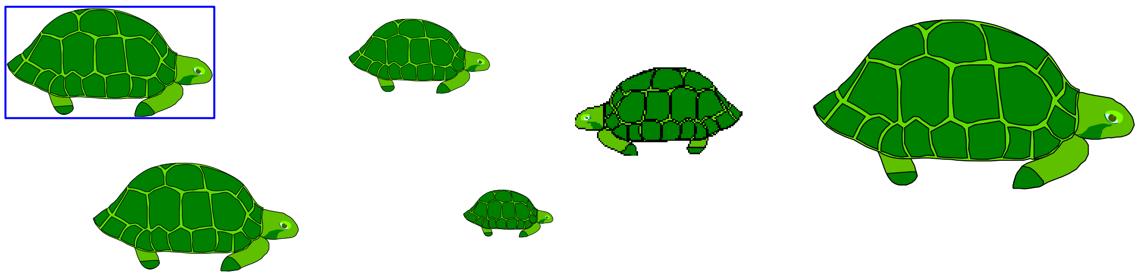
2.2.1. Approche intuitive de 5 à 12 ans

La modélisation des transformations du plan se concrétise, dans un premier temps, grâce à des **transparents**.

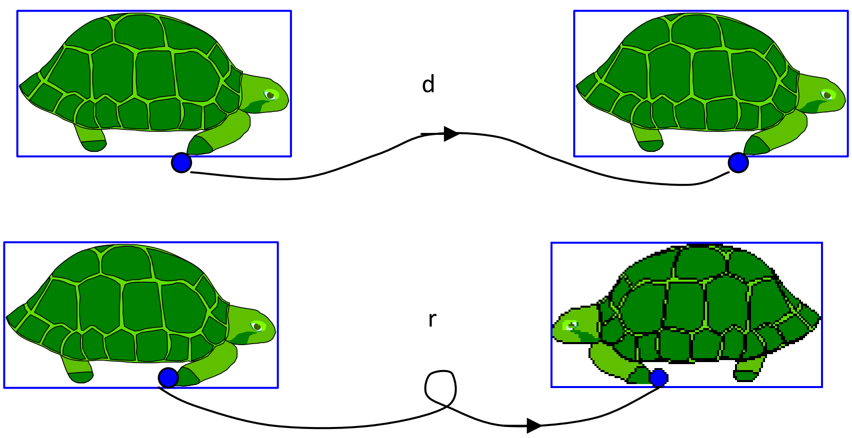
1) Figures déformées – figures non déformées (semblables)



2) Figures semblables (isométriques – réduites – agrandies)



3) Figures isométriques déplacées – figures isométriques retournées (définitions intuitives)



<u>Premières définitions intuitives</u>:

- ✓ Deux figures planes sont **isométriques** si et seulement si on peut "passer" de l'une à l'autre à l'aide d'une feuille transparente.

- ✓ Deux figures planes sont superposables par **un déplacement** (d) du plan si le transparent qui permet de passer de l'une à l'autre peut "rester" entièrement dans le plan.

- ✓ Deux figures planes sont superposables par **un retournement** (r) du plan si on peut "passer" de l'une à l'autre **en retournant une seule fois le transparent**.

4) <u>Objets (de l'espace) orientés – Objets isométriques déplacés – Objets isométriques retournés</u>

<u>Première étape</u>

Comment passer d'une photo à l'autre *(à l'aide d'une photo isométrique reproduite sur transparent)*? Par un "déplacement" ou par un retournement *(du transparent)*?



<u>Deuxième étape</u>

Objets "isométriques" des deux orientations différentes.
Comparaison des objets et tri.

Troisième étape

Repérer les objets identiques à ceux représentés sur les photos.




Quatrième étape

- Repérer individuellement deux objets identiques ou "déplacés".

Ils sont dits identiques ou "déplacés" quand on peut remplacer l'un par l'autre sans que l'on voie de différence (d'orientation).

- Repérer individuellement deux objets "retournés" l'un par rapport à l'autre.

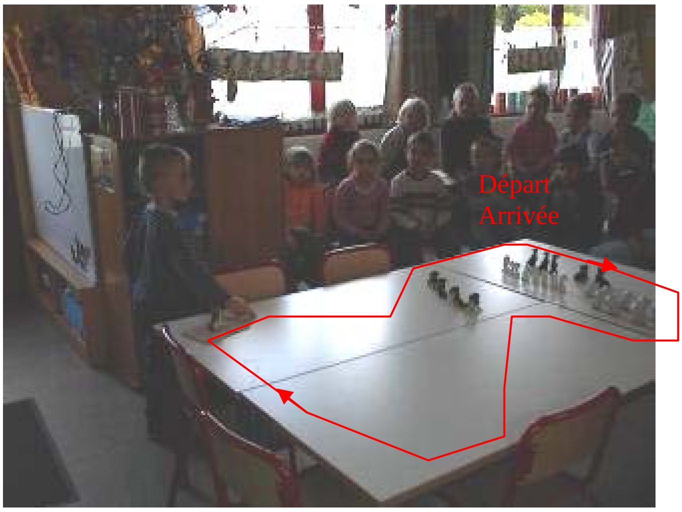
Ils sont dits "retournés" quand on ne peut pas remplacer l'un par l'autre sans que l'on voie de différence (d'orientation).

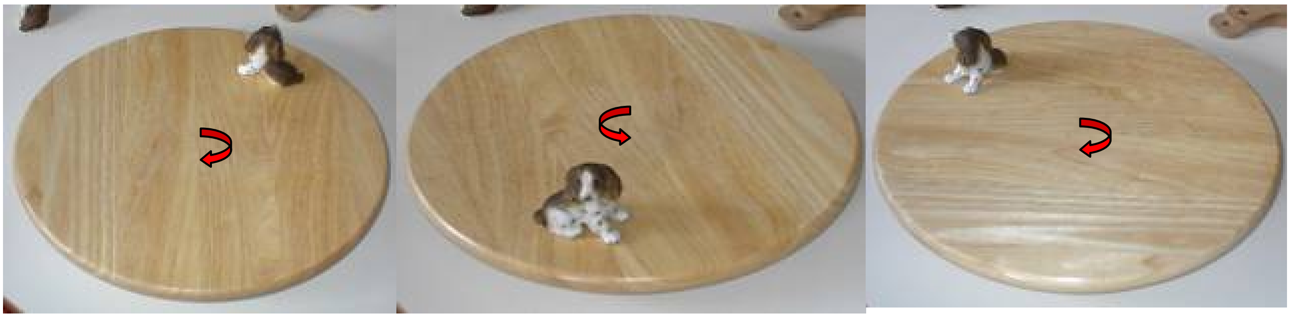
5) Déplacements physiques d'objets dans l'espace et images d'objets dans un miroir (retournement de l'espace)

A) Déplacements d'objets dans l'espace

Constater que:

Après un déplacement, l'objet "de départ" et l'objet "d'arrivée" sont identiques (ils ont la même orientation) – *un déplacement dans l'espace conserve l'orientation des objets*.





B) Retournements d'objets dans l'espace

Constater que:

Après une *symétrie bilatérale* (retournement), l'objet "de départ" et l'objet "d'arrivée" sont inversés ou retournés l'un par rapport à l'autre (ils sont d'orientations différentes) – *un retournement dans l'espace inverse l'orientation des objets.*

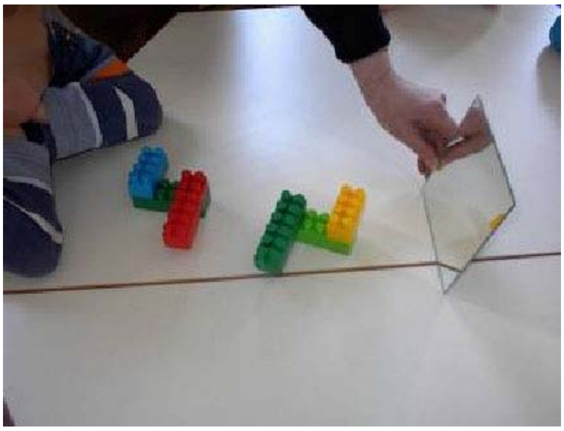
Remarque: *Les objets utilisés sont évidemment des objets orientés.*

Première étape

Parmi les deux objets, repérer le même objet que celui vu "dans le miroir".

Deuxième étape

Construire l'objet vu dans le miroir (objet retourné).

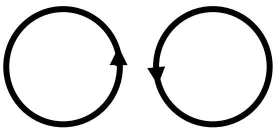


6) Notions conservées (ou inversées) par les déplacements et les retournements du plan; en particulier les cercles orientés (horlogique et antihorlogique), les dessins de mains (gauche et droite) et les repères lévogyre et dextrogyre *(à partir de la 4e année primaire)*.

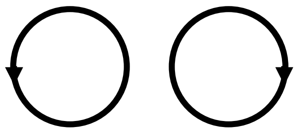
Exemples:

Préciser si, pour "passer" d'un dessin à l'autre, il est possible de le faire:

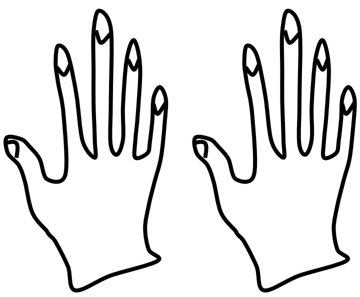
- par un déplacement du transparent;
- par un retournement du transparent.



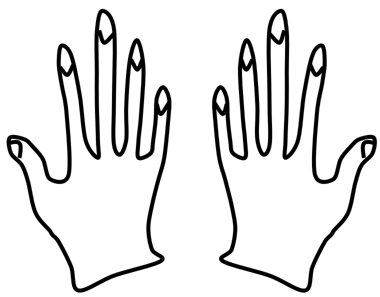
d	r



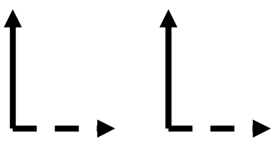
d	r



d	r



d	r

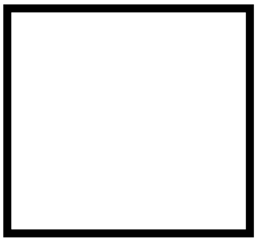


d	r

d	r

7) Figures superposables à elles-mêmes par déplacements et/ou retournements du plan (automorphismes de figures)

carré

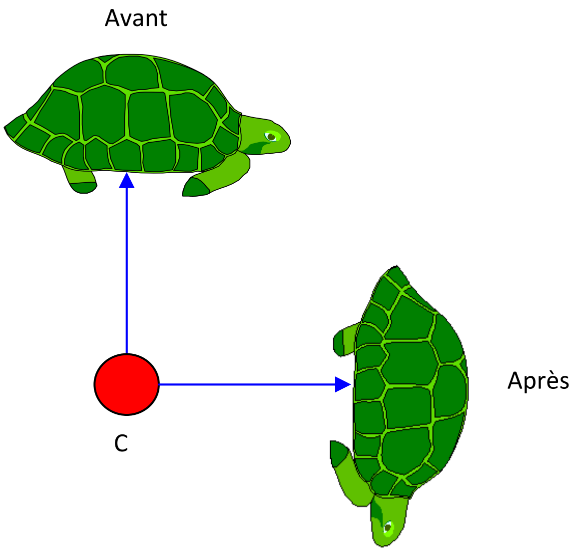


d	r

rectangle quelconque

d	r

8) Rotations du plan *(à partir de la 4^e^ année primaire)*

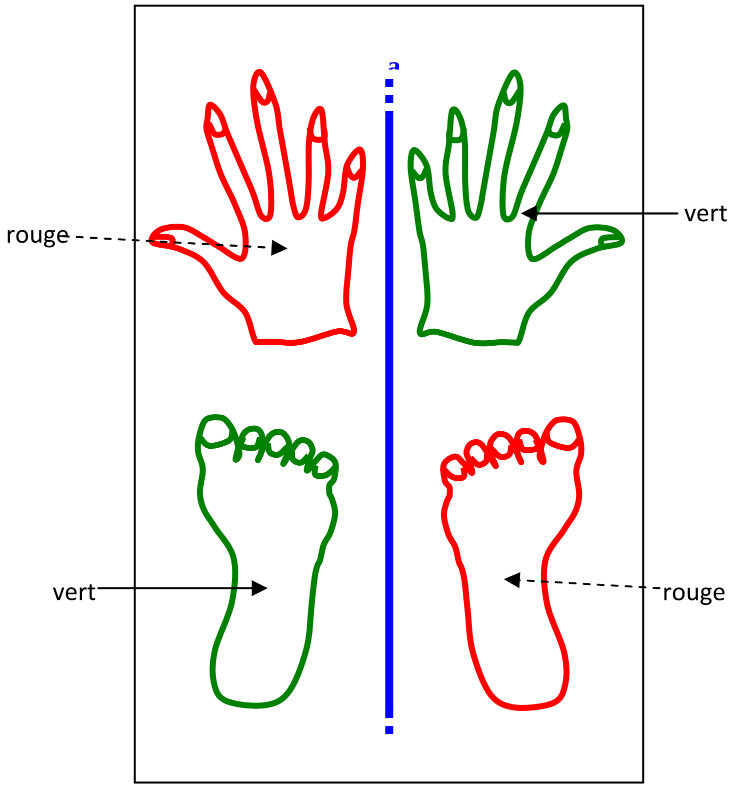


Première définition intuitive:

- Une **rotation** est un déplacement du plan qui admet un point fixe (ou tous les points fixes)

9) <u>Symétries orthogonales du plan *(à partir de la 4e année primaire)*</u>

Comment "passer" de tout rouge à tout vert?



<u>Première définition intuitive</u>:

- Une **symétrie orthogonale** est un retournement du plan qui admet une droite de points fixes

<u>Remarque</u>: Pour la genèse de l'étude des symétries orthogonales planes, se référer au document *"Le pliage d'une feuille de papier, bon modèle de représentation d'une symétrie orthogonale plane?".*

10) <u>Initiation aux symétries centrales</u>

Etant donnés, dans l'espace, le milieu d'un segment et une de ses extrémités, détermine l'autre extrémité de ce segment.

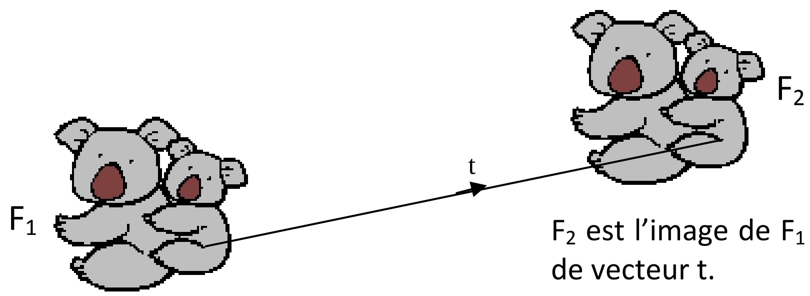
2.2.2. Approche formelle des déplacements et des retournements à partir de 13 ans

1) Translation du plan

Dans un plan, une translation est une transformation qui transporte tous les points du plan dans la même direction, le même sens et de la même longueur.

Une translation est un déplacement qui admet zéro point fixe ou tous les points fixes.

Illustration:



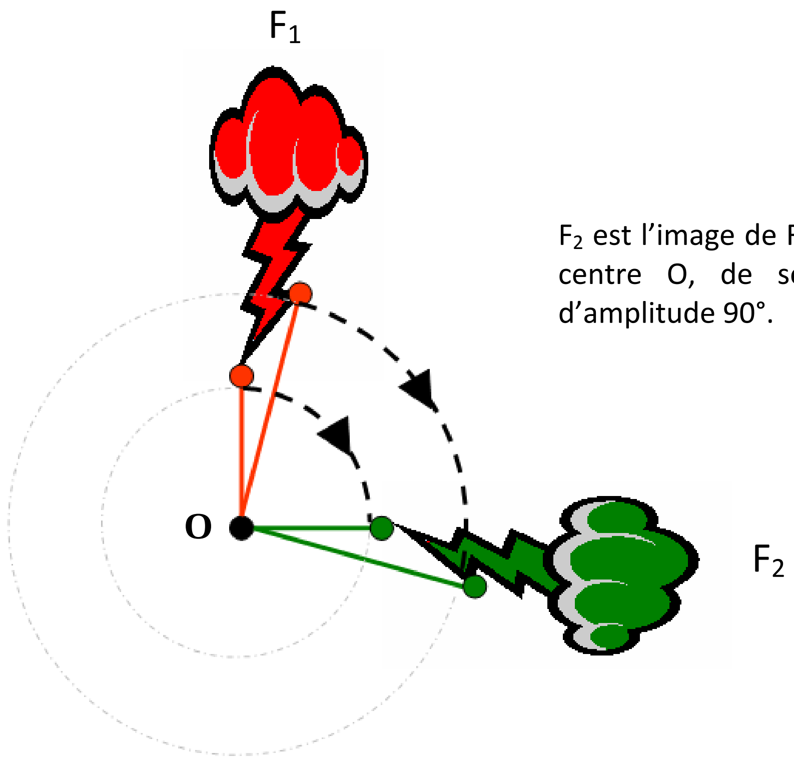
F_2 est l'image de F_1 par la translation de vecteur t.

2) Rotation du plan

Dans un plan, une rotation est une transformation du plan qui transporte tous les points du plan:

- sur des arcs de cercles de même centre (concentriques);
- dans le même sens (horlogique ou antihorlogique);
- d'un même angle.

Illustration:



F_2 est l'image de F_1 par la rotation de centre O, de sens horlogique et d'amplitude 90°.

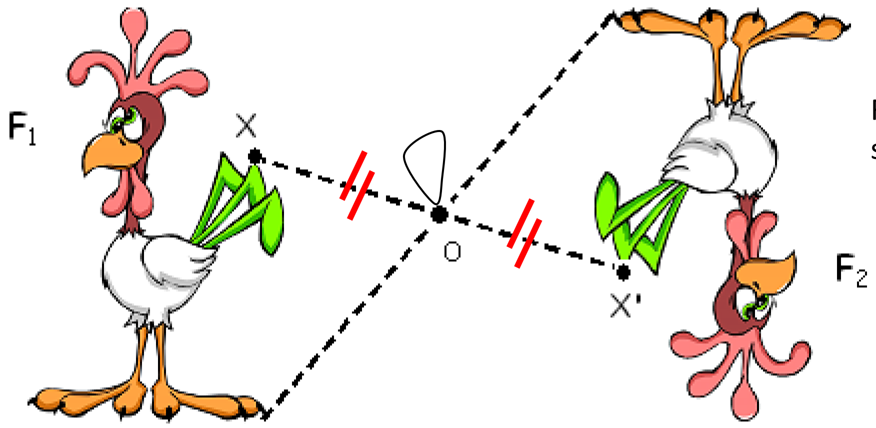
Une rotation du plan est un déplacement du plan qui admet un point fixe ou tous les points fixes.

3) Symétrie centrale plane

Dans un plan, une symétrie centrale de centre O est une transformation du plan qui transporte tout point X sur son image X' tels que :

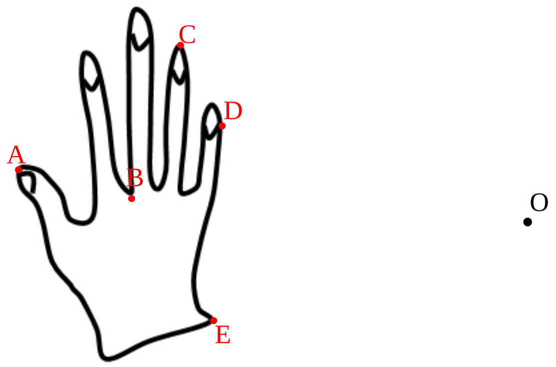
- X, O, X' sont alignés;
- | XO | = | OX' |.

Illustration:

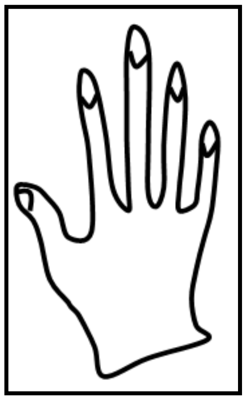


F_2 est l'image de F_1 par la symétrie centrale de centre O

Exercice:



1) Trouve les images des points A, B, C, D et E par la symétrie centrale de centre O.
2) Positionne correctement le transparent afin d'obtenir l'image du dessin de la main droite par la symétrie centrale de centre O.
3) Précise si une symétrie centrale dans le plan est un déplacement ou un retournement.



(à imprimer sur transparent)

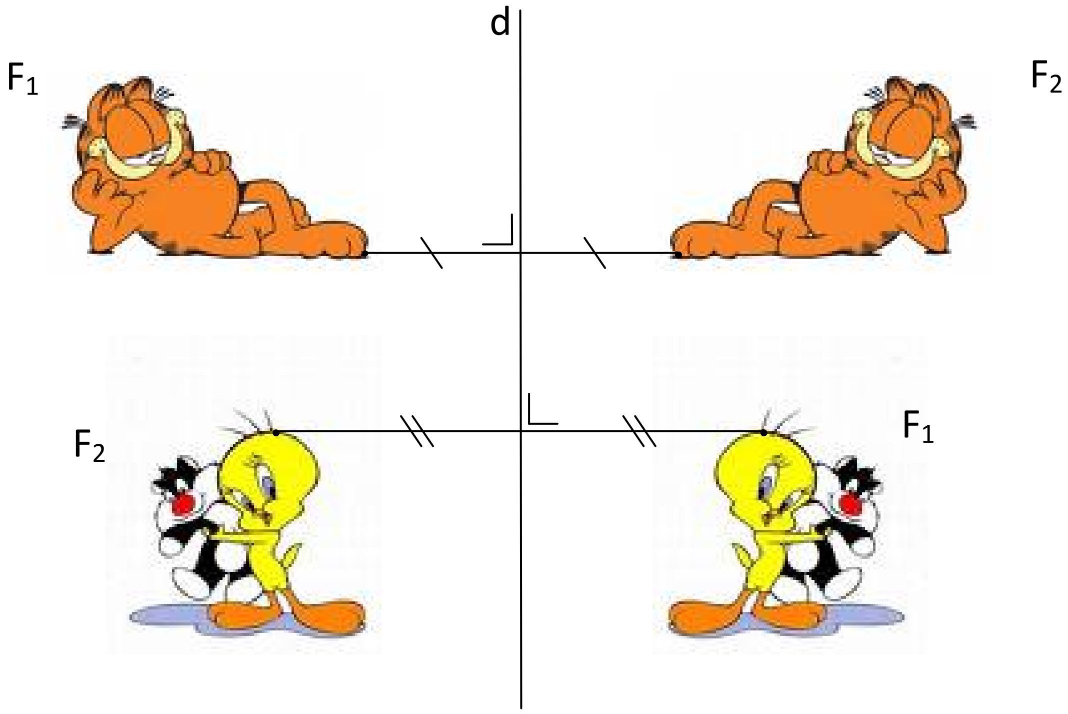
Une symétrie centrale du plan est un déplacement du plan qui admet un point fixe et est équivalente à une rotation de 180°.

4) Symétrie orthogonale plane d'axe "d"

Dans le plan, une symétrie orthogonale d'axe « d » est une transformation du plan, qui applique tout point X de l'espace sur son image X' où:

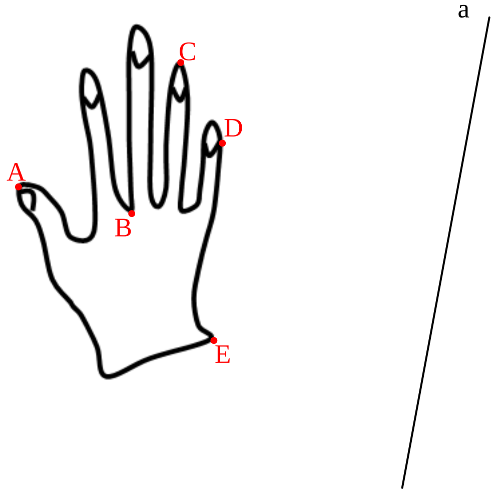
- si le point X n'appartient pas à la droite "d",
    - la droite XX' est perpendiculaire à la droite "d";
    - la distance du point X' à la droite "d" est égale à la distance du point X à la droite "d".
- si le point X appartient à la droite "d", le point X est sa propre image (X = X').

Illustration:

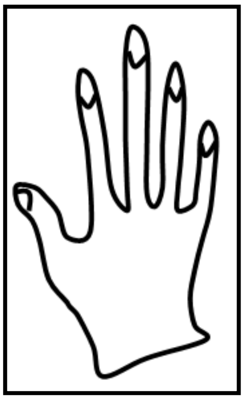


Les "F_2" sont les images des "F_1" par
la symétrie orthogonale d'axe d.

Exercice:



1) Trouve les images des points A, B, C, D et E par la symétrie orthogonale d'axe a.
2) Positionne correctement le transparent afin d'obtenir l'image du dessin de la main droite par la symétrie orthogonale d'axe a.
3) Précise si une symétrie orthogonale dans le plan est un déplacement ou un retournement.



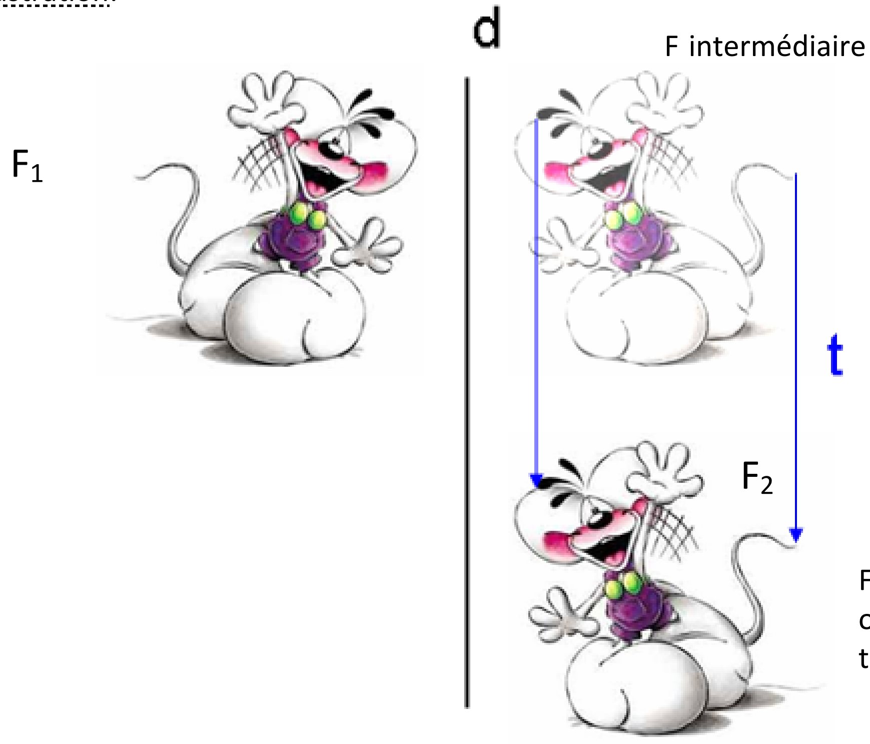
(à imprimer sur transparent)

Une symétrie orthogonale du plan est un retournement du plan qui admet une droite de points fixes.

5) Symétrie glissée plane

Dans un plan, une symétrie glissée est une symétrie orthogonale suivie d'une translation dont la direction est parallèle à l'axe de la symétrie orthogonale.

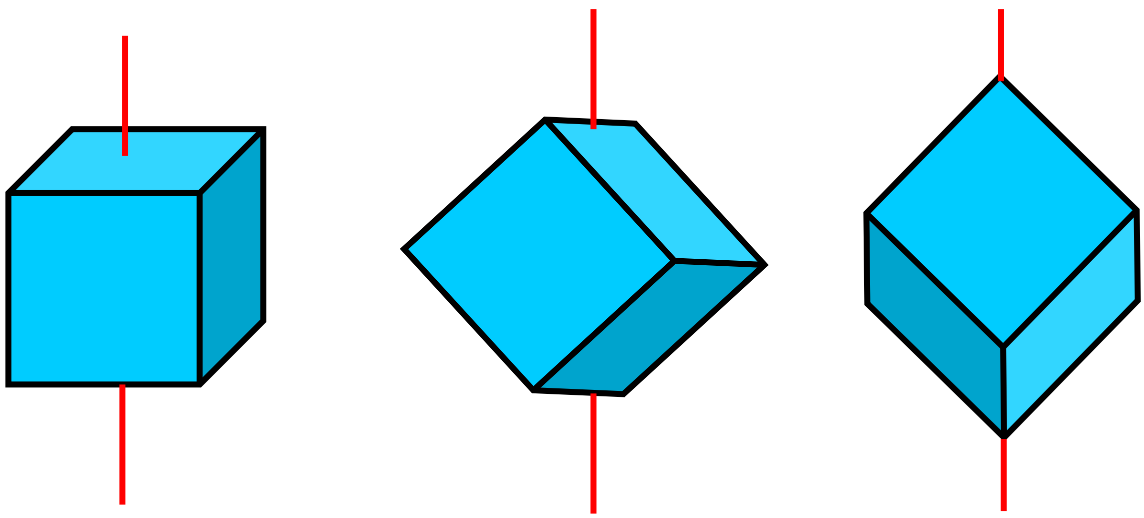
Illustration:



F_2 est l'image de F_1 par la symétrie orthogonale d'axe d suivie de la translation de vecteur t

Une symétrie glissée du plan est un retournement du plan qui n'admet pas de point fixe.

6) Axes de rotation d'un cube



axe d'ordre 4 | axe d'ordre 2 | axe d'ordre 3

7) Isométries planes, déplacements et retournements du plan (définitions formelles) à 15 ans

Isométries du plan – déplacements du plan – retournements du plan

- Les ***isométries planes*** sont des permutations planes qui conservent les distances.
- Les ***déplacements plans*** sont les isométries planes qui conservent les types d'orientations du plan (les types de dessins de mains).
- Les ***retournements plans*** sont les isométries planes qui inversent les types d'orientations du plan (les types de dessins de mains).

8) Isométries de l'espace – déplacements et retournements de l'espace (définitions formelles) (17/18ans)

Les isométries de l'espace

Les isométries de l'espace sont les permutations de l'espace qui conservent les distances.

Déplacements et retournements de l'espace.

Les isométries de l'espace se décomposent en "deux sous-familles" : les déplacements et les retournements de l'espace.

Les déplacements de l'espace

En géométrie élémentaire, une définition des déplacements de l'espace peut être donnée via les types de mains (ou de pieds) : *"un déplacement de l'espace est une isométrie de l'espace qui conserve les types de mains (ou de pieds)".*

Les retournements de l'espace

En géométrie élémentaire, une définition des retournements de l'espace peut être donnée via les types de mains ou de pieds : "*un retournement de l'espace est une isométrie de l'espace qui inverse les types de mains (ou de pieds)".*

On peut montrer que les déplacements sont de 3 types alors que les retournements sont de 4 types.

Les différents types de déplacements et de retournements sont illustrés à la page ci-après.

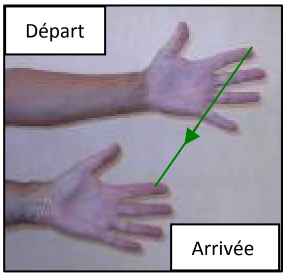
Types de déplacements et de retournements de l'espace

Isométries de l'espace

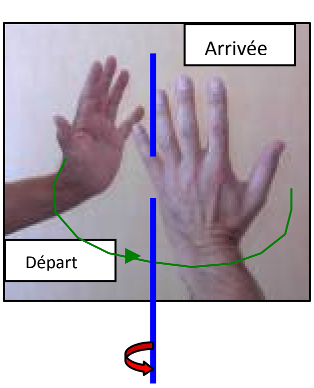
Déplacements

«Un déplacement de l'espace est une isométrie de l'espace qui conserve les types de mains (l'orientation)».

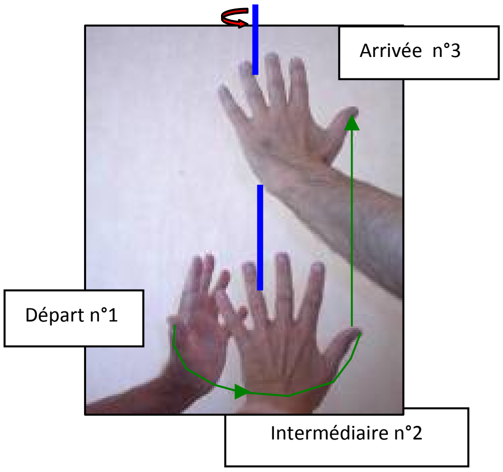
Translations de l'espace



Rotations de l'espace



Vissages de l'espace



Vissage: rotation suivie d'une translation dont la direction est parallèle à l'axe de la rotation.

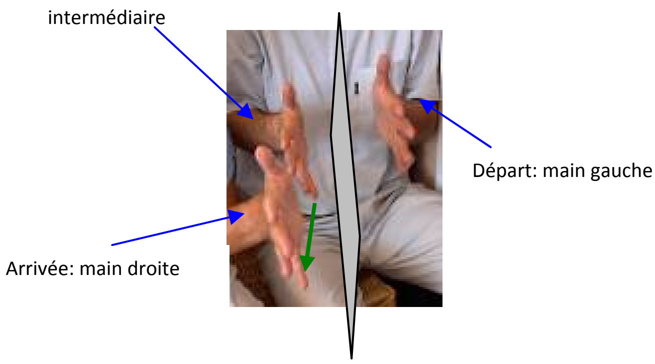
Retournements

"Un retournement de l'espace est une isométrie de l'espace qui inverse les types de mains (l'orientation)"

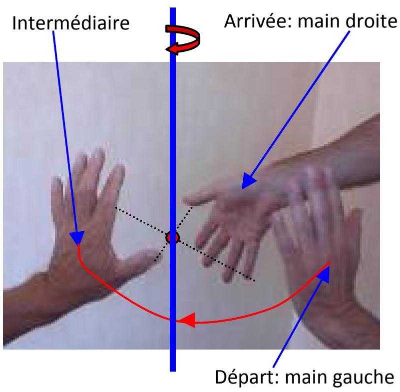
Symétries centrales de l'espace

Symétries bilatérales
(symétries par rapport à un plan)

Symétries bilatérales glissées



Antirotations



Symétrie bilatérale glissée: symétrie bilatérale suivie d'une translation dont la direction est parallèle au plan définissant la symétrie bilatérale.

Antirotation: rotation de l'espace suivie d'une symétrie centrale de l'espace dont le centre appartient à l'axe de la rotation.

Partie théorique 3 – **Les symétries centrales et orthogonales de l'espace**

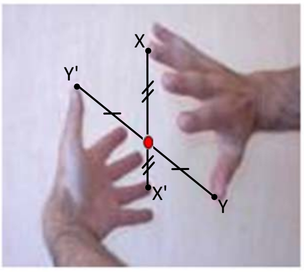
1. Symétrie centrale de l'espace

Dans l'espace, une symétrie centrale de centre O est une transformation de l'espace qui transforme tout point X de l'espace sur son image X' telle que:

- X, O, X' sont alignés
- $|XO| = |OX'|$

Illustration:

Main droite



Main gauche

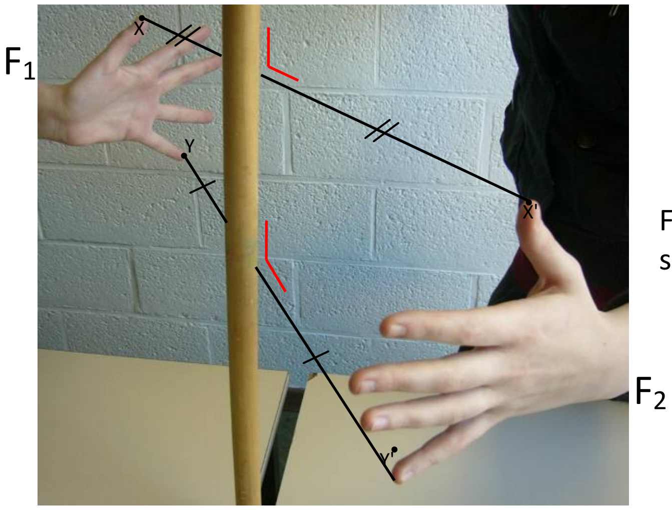
L'image d'une main droite (gauche) par une symétrie centrale de l'espace est une main gauche (droite), il en résulte donc que, dans l'espace, une symétrie centrale est un retournement de l'espace.

2. Symétrie orthogonale d'axe "d" de l'espace

Dans l'espace, une symétrie orthogonale d'axe "d" est une transformation de l'espace, qui applique tout point X de l'espace sur son image X' où:

- si le point X n'appartient pas à la droite "d",
  - la droite XX' est perpendiculaire à la droite "d";
  - la distance du point X' à la droite "d" est égale à la distance du point X à la droite "d".
- si le point X appartient à la droite "d", le point X est sa propre image (X = X').

Illustration:

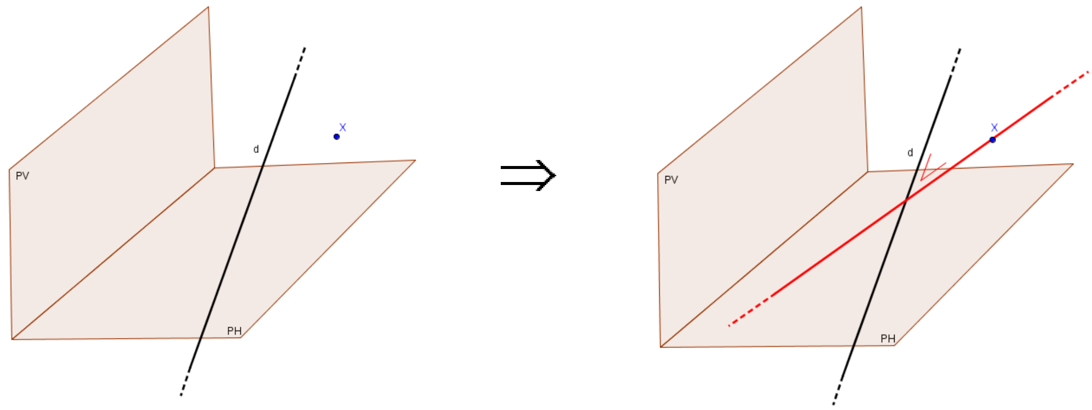


F_2 est l'image de F_1 par la symétrie orthogonale d'axe d.

L'image d'une main droite (gauche) par une symétrie orthogonale de l'espace est une main droite (gauche) il en résulte donc que, dans l'espace, une symétrie orthogonale est un déplacement de l'espace.

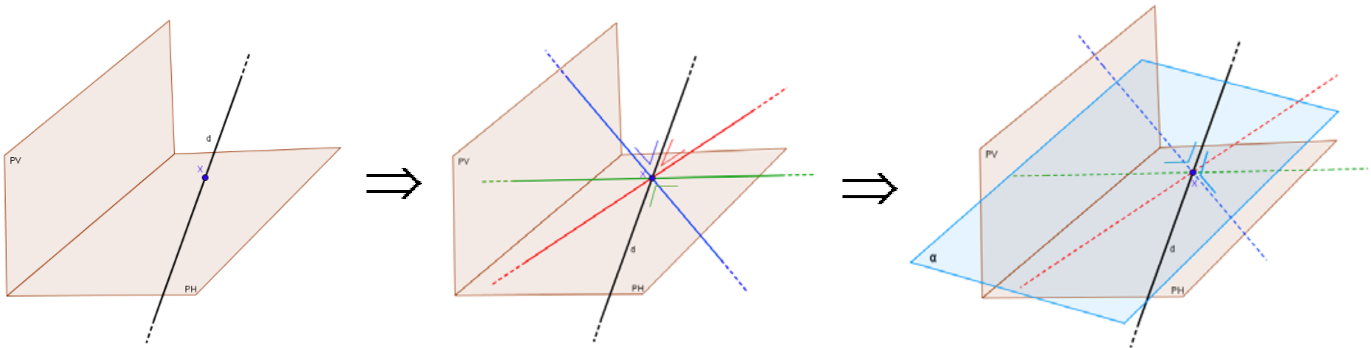
Remarque: Soient une droite "d" et un point "X" dans l'espace:

- si le point "X" n'appartient pas à la droite "d", alors, il existe une et une seule perpendiculaire à "d" passant par "X";



- si le point "X" appartient à la droite "d", alors, il existe une infinité de droites perpendiculaires à "d" passant par "X".

  Dans ce dernier cas l'ensemble des perpendiculaires à "d" passant par "X" forme le plan perpendiculaire à la droite "d" passant par "X".



Partie théorique 4 – **Conclusions**

Nous espérons, sur la base des exemples présentés, vous avoir convaincu de l'importance de la Géométrie des Transformations et en particulier des déplacements et des retournements de l'espace pour comprendre le monde qui nous entoure ainsi que de sa faisabilité dans l'enseignement obligatoire.

Cela peut sembler important voire difficile du point de vue de la matière à faire découvrir aux élèves mais la réponse est clairement **non**.

En effet, les élèves ont 13 années pour s'approprier ces concepts fondamentaux; 13 années pour se mouvoir dans un cadre théorique ***cohérent, structuré et progressif***; 13 années pour se familiariser avec des concepts qui leurs ouvrent les portes de nombreuses connaissances scientifiques et technologiques.

En fait, il s'agit de faire un choix pour la formation de nos élèves; il s'agit de permettre "à tout un chacun" d'accéder aux connaissances scientifiques et technologiques actuelles s'il le désire.

Comme dernière remarque, nous souhaitons encore préciser que:

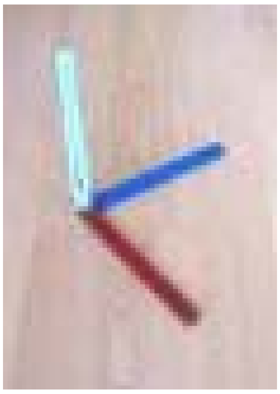
- Les exemples proposées dans ce texte ne sont qu'une toute petite partie du cours enseigné;
- le cours développé se compose de 4 spirales génétiques ***entrelacées***:
  - ✓ une pour les figures et solides géométriques;
  - ✓ une pour les transformations du plan et de l'espace;
  - ✓ une pour les premiers principes et les premières règles de la logique formelle;
  - ✓ une pour les principes et règles de la démarche scientifique.

Annexe – A propos des repères lévogyres et dextrogyres de l'espace

Les repères lévogyres et dextrogyres de l'espace ou les **deux " véritables" orientations** de l'espace.

Soient les deux repères (Bleu – Rouge – Vert) ou (B-R-V).

Lequel de ces deux repères est dit "lévogyre" ou "dextrogyre"?

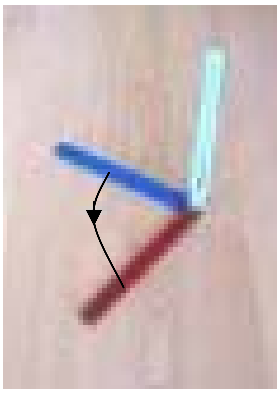


Nos mains "gauche et "droite" nous y aident, ainsi que les sens de rotation horlogique et antihorlogique.

Soit un repère (Bleu – Rouge – Vert) ou (B-R-V) formé de trois vecteurs orthonormés.

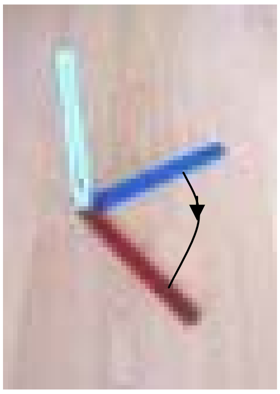
Pour préciser si le repère (B-R-V) est un repère lévogyre ou dextrogyre, on applique la règle conventionnelle suivante:

- le troisième vecteur (vert) symbolise la direction verticale.
- on observe le sens giratoire du "**plus petit angle**" (horlogique ou antihorlogique) pour "passer" du premier vecteur (bleu) au deuxième vecteur (rouge) et:
  - Si le sens est ***antihorlogique***, alors, le repère est ***dextrogyre***.
  - Si le sens est ***horlogique***, alors, le repère est ***lévogyre***.



Repère (B-R-V)

Repère dextrogyre



Repère (B-R-V)

Repère lévogyre

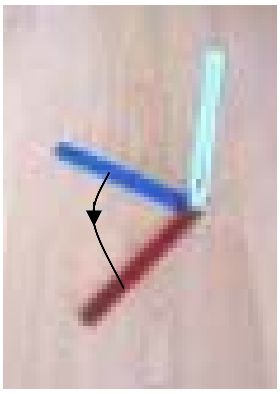
Analogie avec les mains

Le qualificatif lévogyre (gauche) ou dextrogyre (droit) se détermine par la règle des mains gauche ou droite explicitée ci-dessous.

- ✓ Le pouce de la main gauche ou de la main droite se positionne nécessairement comme le troisième vecteur (ici, le vert).

- ✓ Si le sens des doigts, pour "passer" - **par le plus petit angle** - du 1er vecteur (ici, bleu) au 2e vecteur (ici, rouge) est illustré par la main droite, alors le repère est dextrogyre.

Repère dextrogyre

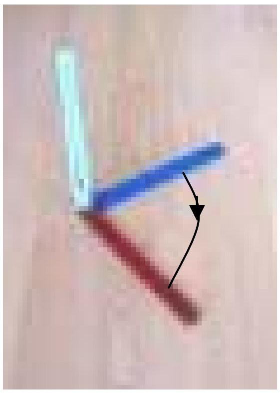


Repère (B-R-V)

Main droite

- ✓ Si le sens des doigts, pour "passer" – par le plus petit angle – du 1er vecteur (ici, bleu) au 2e vecteur (ici, rouge) est illustré par la main gauche, alors le repère est lévogyre.

Repère lévogyre



Repère (B-R-V)

Main gauche

Cette règle conventionnelle montre que les mains gauche et droite sont isomorphes aux repères lévogyre et dextrogyre. Elles peuvent donc servir à définir les déplacements et les retournements de l'espace.