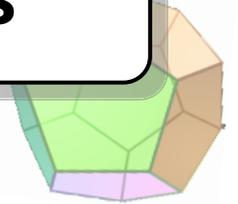
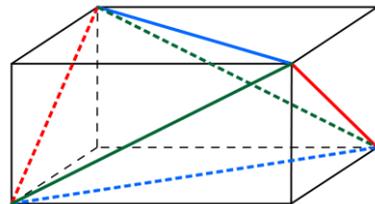
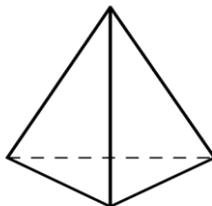
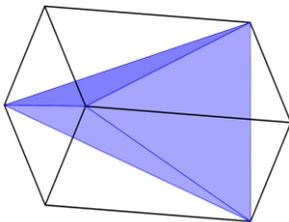


# Mathématiques élémentaires



## Tétraèdres euclidiens à faces isométriques (T.E.F.I.)



## Cellule de géométrie – Catégorie pédagogique de la HEH

DEMAL Michel  
[demal.michel@skynet.be](mailto:demal.michel@skynet.be)

DRAMAIX Jérémy  
[jeremy.dramaix@gmail.com](mailto:jeremy.dramaix@gmail.com)

HIGNY Samuel  
[higny\\_samuel@hotmail.com](mailto:higny_samuel@hotmail.com)

MALAGUARNERA Angelo  
[angelo.malaguarnera@gmail.com](mailto:angelo.malaguarnera@gmail.com)

Avec la collaboration de

ADABBO F. - GOETGEBUER C. - PILAETE C.

Le tétraèdre régulier est bien connu depuis Platon (5<sup>e</sup> siècle avant notre ère) et une de ses particularités est que toutes ses faces sont des triangles équilatéraux isométriques.

Nous nous proposons dans cet exposé:

1. de montrer, via un logiciel informatique, l'existence d'une infinité de tétraèdres euclidiens dont les faces sont des triangles isométriques non-équilatéraux;
2. de préciser la nature des triangles avec lesquels il est possible d'obtenir de tels tétraèdres euclidiens.
3. de construire ensemble de tels tétraèdres.

Ce sera aussi l'occasion de montrer l'utilité de quelques propriétés classiques de géométrie plane et de trigonométrie.

# Tétraèdres euclidiens à faces isométriques (T.E.F.I.)

## Plan

### 1. Les tétraèdres euclidiens

### 2. Les tétraèdres euclidiens à faces isométriques (T.E.F.I.)

Recherche de tous les T.E.F.I.

#### 2.1. Existence des tétraèdres euclidiens à faces isométriques

2.1.1. Approche intuitive

2.1.2. Briques et tétraèdres euclidiens à faces isométriques

#### 2.2. Tétraèdres euclidiens à faces isométriques et types de triangles

2.2.1. Première idée, la brique

2.2.2. Deuxième idée, le développement

2.2.3. Essais de construction de T.E.F.I.

2.2.4. Photos des T.E.F.I. obtenus grâce aux modèles

2.2.5. Pour quelles raisons dans les cas des triangles obtusangles et rectangles, il n'est pas possible de construire le tétraèdre euclidien à faces isométriques? Où se trouve le problème?

2.2.6. Conclusion

### 3. Annexe

3.1. Polygones euclidiens: définition

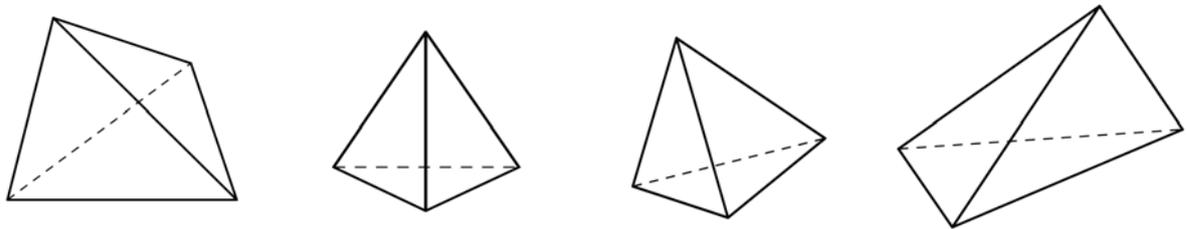
3.2. Polyèdres euclidiens: définition

## 1. Les tétraèdres euclidiens

Un **tétraèdre euclidien** est un polyèdre euclidien<sup>(\*)</sup> dont toutes les faces sont des triangles.

(\* voir annexe page 21)

Exemples:

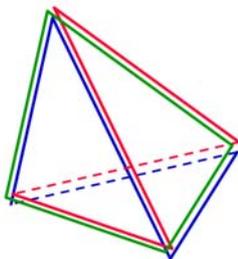


- Tétra vient du grec et signifie quatre.
- Si un polyèdre euclidien contient quatre faces, alors celles-ci sont nécessairement des triangles.
- Le tétraèdre euclidien est le polyèdre euclidien qui possède le plus petit nombre de faces.

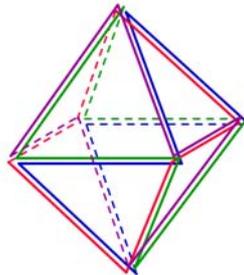
**Remarque:** Euclidien au sens où les faces sont des polygones plans.

Il existe des polyèdres où les faces sont des polygones gauches (non plans): les polyèdres de Petrie.

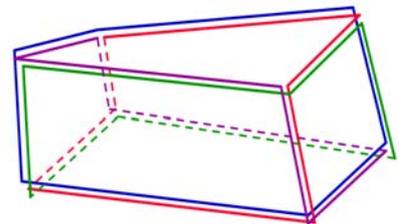
À une couleur correspond un polygone gauche



3 faces gauches



4 faces gauches



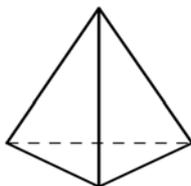
4 faces gauches

## 2. Les tétraèdres euclidiens à faces isométriques (T.E.F.I.)

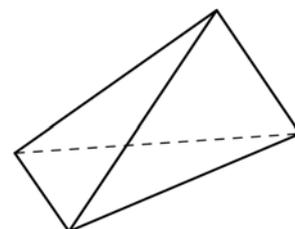
Un **tétraèdre euclidien à faces isométriques** est un tétraèdre dont les quatre faces sont des triangles isométriques.

Exemples:

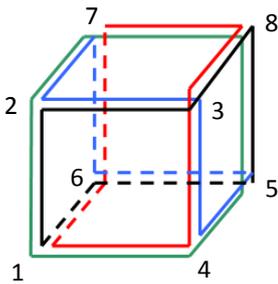
Tétraèdre régulier à faces isométriques  
(toutes les faces sont des triangles équilatéraux)



Tétraèdre non régulier à faces isométriques



**Remarque:** Le tétraèdre de Petrie ou cube de Petrie est un polyèdre à faces non planes isométriques formé de quatre hexagones gauches réguliers isométriques.



Ce sont les 4 hexagones réguliers suivants:

L'hexagone rouge (7 – 8 – 3 – 4 – 1 – 6)

L'hexagone bleu (7 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6)

L'hexagone vert (7 – 8 – 5 – 4 – 1 – 2)

L'hexagone noir (2 – 3 – 8 – 5 – 6 – 1)

## Recherche de tous les T.E.F.I.

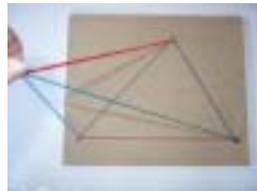
### 2.1. Existence des tétraèdres euclidiens à faces isométriques

#### 2.1.1. Approche intuitive

Traçons un triangle dans un plan de l'espace. Il nous semble alors possible de trouver un point de l'espace qui, lorsqu'on le relie à chacun des sommets du triangle, forme un tétraèdre euclidien à faces isométriques.



Tétraèdres euclidiens à faces non isométriques

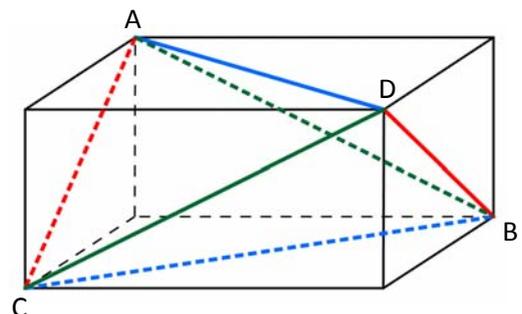
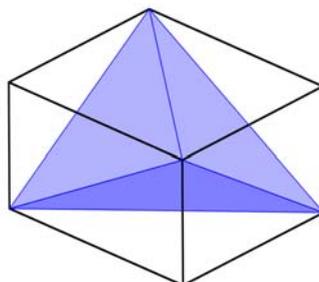
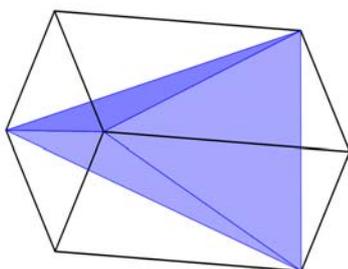


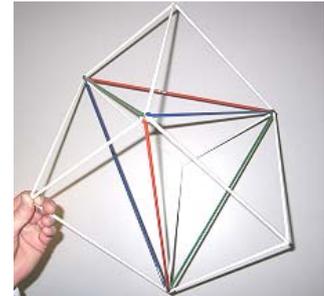
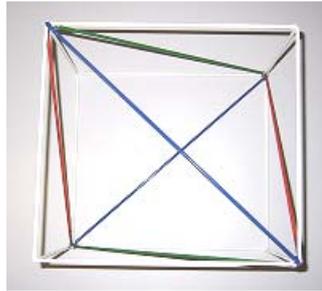
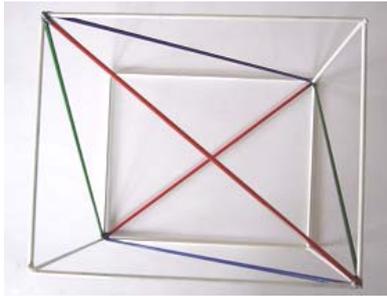
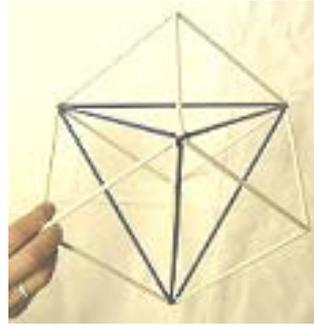
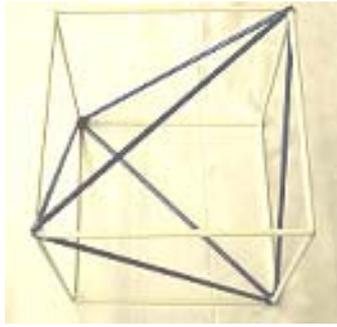
Tétraèdres euclidiens à faces isométriques



#### 2.1.2. Briques et tétraèdres euclidiens à faces isométriques

Dans tout parallélépipède rectangle, il est possible de construire un tétraèdre euclidien à faces isométriques. Ces tétraèdres sont formés de triangles dont les côtés sont respectivement les diagonales des trois types de faces de la "brique". Ces quatre triangles sont isométriques car dans tout parallélépipède rectangle, les faces opposées sont des rectangles isométriques et dans tout rectangle, les diagonales sont isométriques.





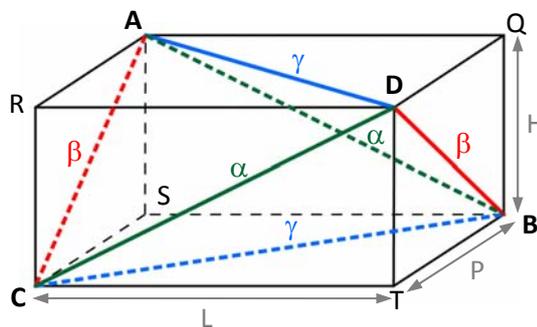
## 2.2. Tétraèdres euclidiens à faces isométriques et types de triangles

⇒ Peut-on construire des T.E.F.I. avec n'importe quels types de triangles?

### 2.2.1. Première idée, la brique

Le parallélépipède rectangle est déterminé en fonction de L, P et H. Comme ces longueurs (L, P et H) peuvent varier indépendamment les unes des autres, nous pouvons obtenir une infinité de briques non isométriques, une infinité de faces rectangulaires différentes et par suite une infinité de longueurs différentes pour les côtés des triangles isométriques (les diagonales des faces). Il semble donc possible d'obtenir toutes les longueurs possibles pour les trois côtés des triangles isométriques.

Cette idée est illustrée par une animation. Retournez à la page d'accueil du CD afin de l'effectuer.



En effet, calculons la longueur des trois côtés ( $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ ) des quatre triangles isométriques:

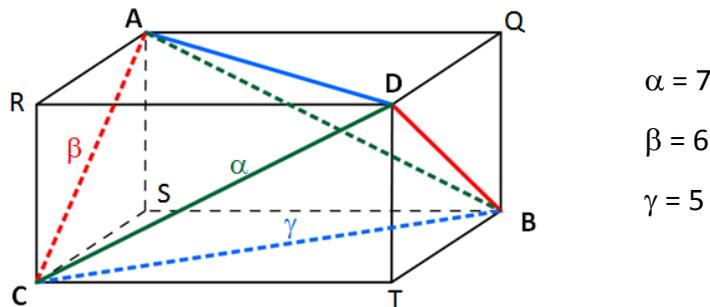
- Considérons le triangle rectangle DTC, par Pythagore, on a:  $\alpha = \sqrt{L^2 + H^2}$
- Considérons le triangle rectangle BTD, par Pythagore, on a:  $\beta = \sqrt{H^2 + P^2}$
- Considérons le triangle rectangle CTB, par Pythagore, on a:  $\gamma = \sqrt{L^2 + P^2}$

Dès lors, vu que  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  dépendent uniquement de L, P et H, il semble possible d'obtenir toutes les valeurs possibles pour ces trois longueurs si l'on fait varier un ou plusieurs de ces trois paramètres indépendants (L, P et H).

De plus, connaissant les dimensions d'un tétraèdre ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ), il est possible de trouver les dimensions de la brique qui lui est associée.

**Exemple numérique:**

Soit un tétraèdre ABCD dont les dimensions sont les suivantes:



Voici les égalités obtenues par Pythagore dans le triangle ARD:

$$\begin{aligned} |AR|^2 + |RD|^2 &= |AD|^2 \\ |AR|^2 + |RD|^2 &= \gamma^2 \\ |AR|^2 + |RD|^2 &= 25 \quad (1) \end{aligned}$$

Voici les égalités obtenues par Pythagore dans le triangle ARC:

$$\begin{aligned} |AR|^2 + |RC|^2 &= |AC|^2 \\ |AR|^2 + |RC|^2 &= \beta^2 \\ |AR|^2 + |RC|^2 &= 36 \quad (2) \end{aligned}$$

Voici les égalités obtenues par Pythagore dans le triangle CRD:

$$\begin{aligned} |CR|^2 + |RD|^2 &= |DC|^2 \\ |CR|^2 + |RD|^2 &= \alpha^2 \\ |CR|^2 + |RD|^2 &= 49 \quad (3) \end{aligned}$$

De l'équation (1), nous pouvons déduire que:  $|RD|^2 = 25 - |AR|^2$

De l'équation (2), nous pouvons déduire que:  $|RC|^2 = 36 - |AR|^2$

Remplaçons ceci dans l'équation (3):

$$36 - |AR|^2 + 25 - |AR|^2 = 49$$

$$61 - 2|AR|^2 = 49$$

$$12 = 2|AR|^2$$

$$6 = |AR|^2$$

$$|AR| = \pm\sqrt{6} \quad \text{mais comme } |AR| \text{ est une distance, } |AR| = \sqrt{6}$$

$$\text{Dès lors, } |RD|^2 = 25 - |AR|^2$$

$$|RD|^2 = 25 - 6$$

$$|RD|^2 = 19$$

$$|RD| = \pm\sqrt{19} \quad \text{mais comme } |RD| \text{ est une distance, } |RD| = \sqrt{19}$$

$$|RC|^2 = 36 - |AR|^2$$

$$|RC|^2 = 36 - 6$$

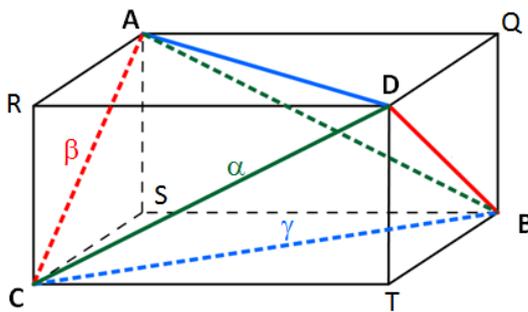
$$|RC|^2 = 30$$

$$|RC| = \pm\sqrt{30} \quad \text{mais comme } |RC| \text{ est une distance, } |RC| = \sqrt{30}$$

Ce qui nous montre que la brique a une longueur (L) de  $\sqrt{19}$ , une profondeur (P) de  $\sqrt{6}$  et une hauteur (H) de  $\sqrt{30}$ .

### Exemple algébrique:

Soit un tétraèdre ABCD dont les dimensions sont  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ .



Voici les égalités obtenues par Pythagore dans le triangle ARD:

$$|AR|^2 + |RD|^2 = |AD|^2$$

$$|AR|^2 + |RD|^2 = \gamma^2 \quad (1)$$

Voici les égalités obtenues par Pythagore dans le triangle ARC:

$$|AR|^2 + |RC|^2 = |AC|^2$$

$$|AR|^2 + |RC|^2 = \beta^2 \quad (2)$$

Voici les égalités obtenues par Pythagore dans le triangle CRD:

$$|CR|^2 + |RD|^2 = |DC|^2$$

$$|CR|^2 + |RD|^2 = \alpha^2 \quad (3)$$

De l'équation (1), nous pouvons déduire que:

$$|RD|^2 = \gamma^2 - |AR|^2$$

De l'équation (2), nous pouvons déduire que:

$$|RC|^2 = \beta^2 - |AR|^2$$

Remplaçons ceci dans l'équation (3):

$$\beta^2 - |AR|^2 + \gamma^2 - |AR|^2 = \alpha^2$$

$$\beta^2 + \gamma^2 - 2|AR|^2 = \alpha^2$$

$$\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 = 2|AR|^2$$

$$\frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2} = |AR|^2$$

$$|AR| = \pm \sqrt{\frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2}} \text{ mais comme } |AR| \text{ est une distance,}$$

$$|AR| = \sqrt{\frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2}} \text{ avec la contrainte: } \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 > 0$$

(strictement positif pour obtenir une "vraie" brique)

Dès lors,  $|RD|^2 = \gamma^2 - |AR|^2$

$$|RD|^2 = \gamma^2 - \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2}$$

$$|RD|^2 = \frac{2\gamma^2}{2} - \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2}$$

$$|RD|^2 = \frac{\gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2}{2}$$

$$|RD| = \pm \sqrt{\frac{\gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2}{2}} \text{ mais comme } |RD| \text{ est une distance,}$$

$$|RD| = \sqrt{\frac{\gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2}{2}} \text{ avec la contrainte: } \gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2 > 0$$

(strictement positif pour obtenir une "vraie" brique)

$$|RC|^2 = \beta^2 - |AR|^2$$

$$|RC|^2 = \beta^2 - \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2}$$

$$|RC|^2 = \frac{2\beta^2}{2} - \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2}$$

$$|RC|^2 = \frac{\beta^2 + \alpha^2 - \gamma^2}{2}$$

$$|RC| = \pm \sqrt{\frac{\beta^2 + \alpha^2 - \gamma^2}{2}} \text{ mais comme } |RC| \text{ est une distance,}$$

$$|RC| = \sqrt{\frac{\beta^2 + \alpha^2 - \gamma^2}{2}} \text{ avec la contrainte: } \beta^2 + \alpha^2 - \gamma^2 > 0$$

(strictement positif pour obtenir une "vraie" brique)

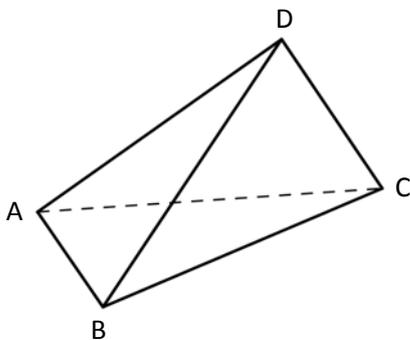
Ce qui nous montre que la brique a une longueur (L) de  $\sqrt{\frac{\gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2}{2}}$ , une profondeur (P) de  $\sqrt{\frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2}}$  et une hauteur (H) de  $\sqrt{\frac{\beta^2 + \alpha^2 - \gamma^2}{2}}$

avec les contraintes: 
$$\begin{cases} \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 > 0 \\ \gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2 > 0 \\ \beta^2 + \alpha^2 - \gamma^2 > 0 \end{cases}$$

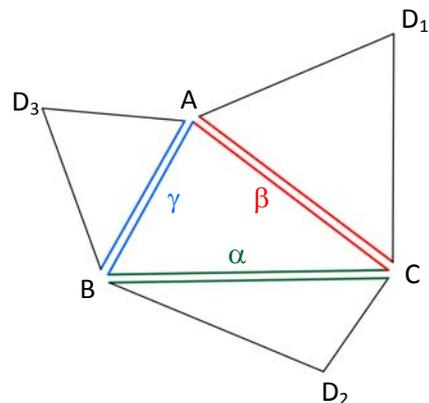
### 2.2.2. Deuxième idée, le développement

Pour construire des tétraèdres euclidiens à faces isométriques avec n'importe quels types de triangles nous aurions pu partir non pas de la brique mais bien d'un développement d'un tétraèdre euclidien à faces isométriques et montrer qu'il semble possible d'obtenir toutes les longueurs possibles pour les trois côtés des triangles isométriques.

**Dessin d'un T.E.F.I.:**



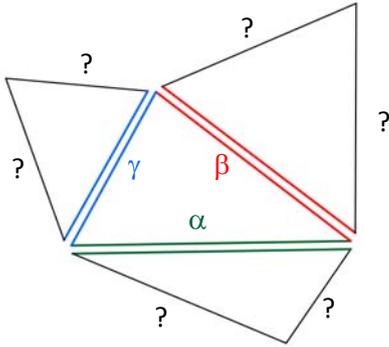
**Développement d'un T.E.F.I.:**



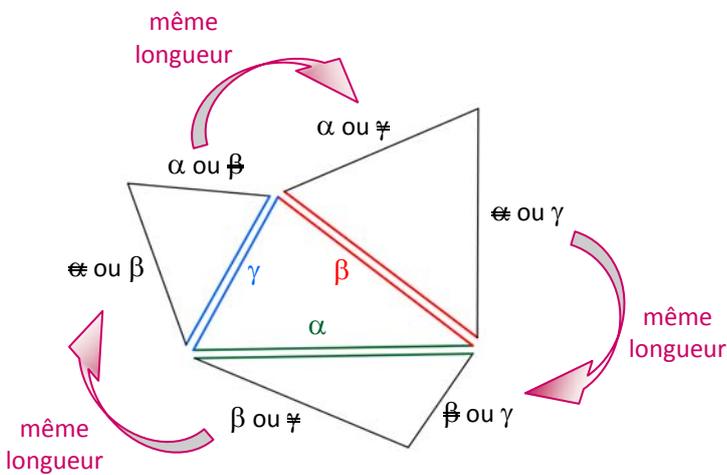
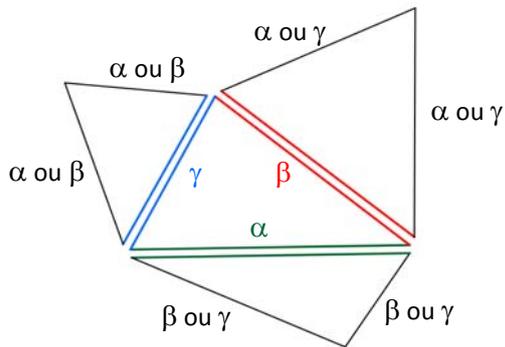
#### Remarque

Lors de l'assemblage des quatre triangles, les points  $D_1$ ,  $D_2$  et  $D_3$  sont confondus et deviennent le sommet D du tétraèdre ABCD.

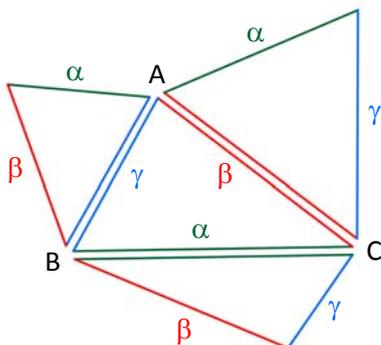
- Longueur des côtés dans le développement:



Comme les quatre triangles doivent être isométriques, ci-joint les différentes possibilités des longueurs des côtés des triangles.

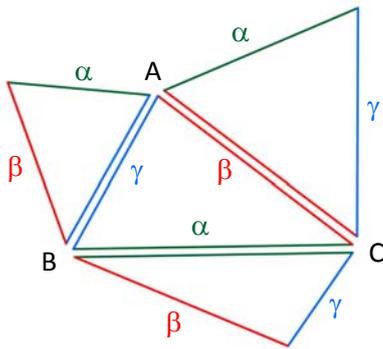


Comme dans un polyèdre, toute arête est incidente à deux faces, certaines possibilités de longueur sont à supprimer.



Dès lors, le développement d'un T.E.F.I. est nécessairement du type ci-joint.

- Angles des triangles et dessin "correct" du développement d'un T.E.F.I.

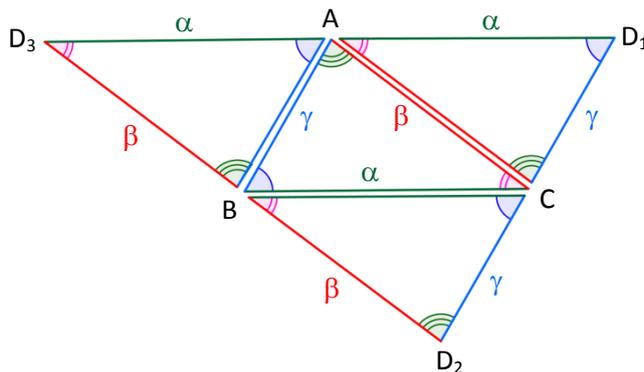


Comme la somme des angles intérieurs d'un triangle vaut  $180^\circ$ : en chaque sommet du développement, la somme des amplitudes des angles faces vaut  $180^\circ$ . En effet, en chaque sommet, on a:  $|\hat{A}| + |\hat{B}| + |\hat{C}| = 180^\circ$ .

(\*\* voir page 17)

**Remarque:** Il s'ensuit que:

- les côtés " $\alpha$ " sont alignés et A est le milieu du côté  $[D_3D_1]$ ;
- les côtés " $\beta$ " sont alignés et B est le milieu du côté  $[D_3D_2]$ ;
- les côtés " $\gamma$ " sont alignés et C est le milieu du côté  $[D_1D_2]$ .

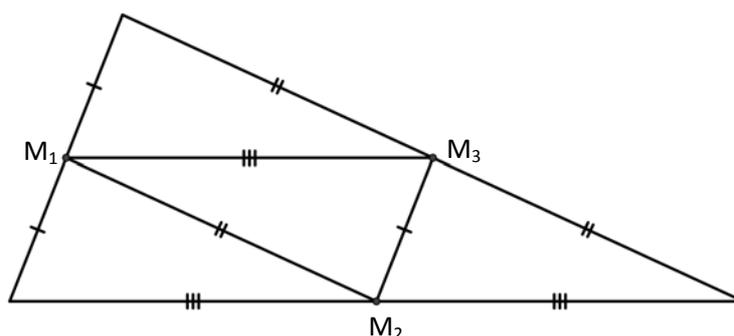


En conclusion, il semble possible de construire des T.E.F.I. avec n'importe quel type de triangle.

Grâce au théorème des milieux dans un triangle, deux techniques simples pour créer un développement d'un tétraèdre euclidien à faces isométriques en découlent.

### A. 1<sup>e</sup> technique

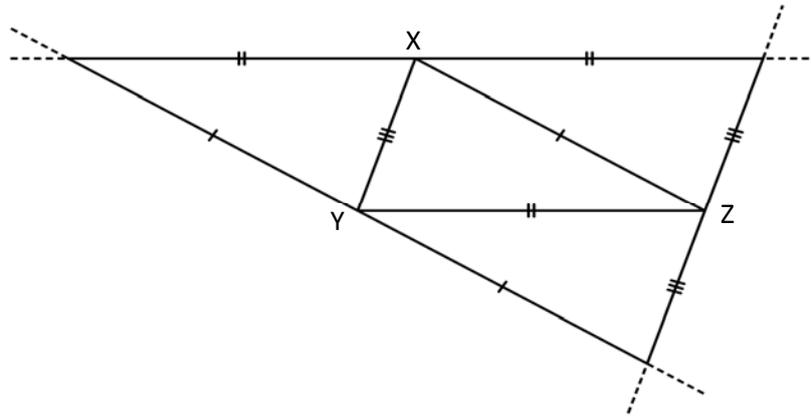
On part d'un triangle, on repère les milieux ( $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ) des côtés. On obtient ainsi aisément le développement d'un tétraèdre euclidien à faces isométriques.



**Remarque:** Le théorème des milieux et les propriétés des parallélogrammes permettent de justifier que les quatre triangles du développement sont isométriques.

### B. 2<sup>e</sup> technique

On part d'un triangle et on trace par chaque sommet une parallèle au côté opposé au sommet considéré. On obtient ainsi le développement d'un tétraèdre euclidien à faces isométriques.



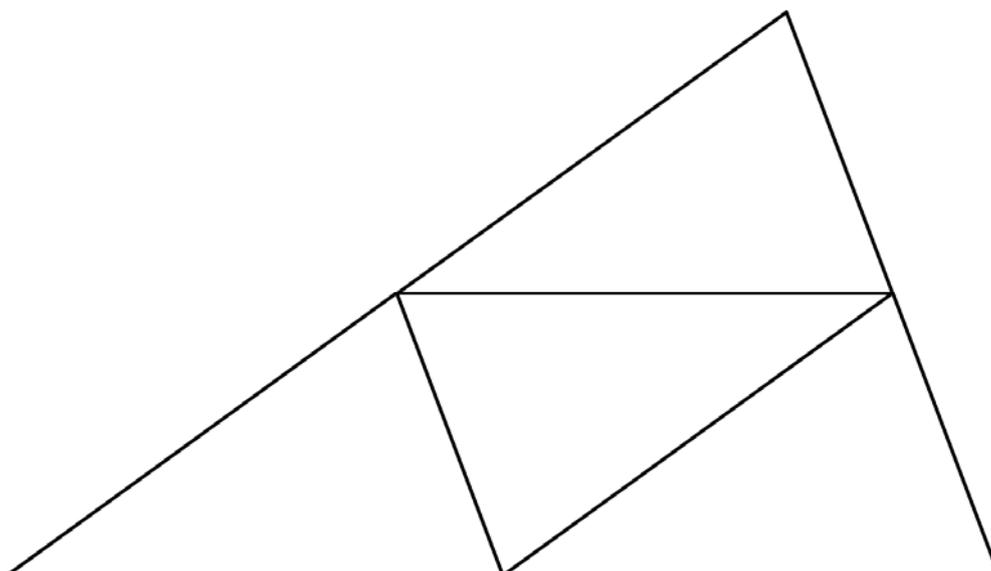
**Remarque:** Ici aussi le théorème des milieux et les propriétés des parallélogrammes permettent de justifier que les quatre triangles du développement sont isométriques.

### 2.2.3. Essais de construction de T.E.F.I.

#### Modèles à découper

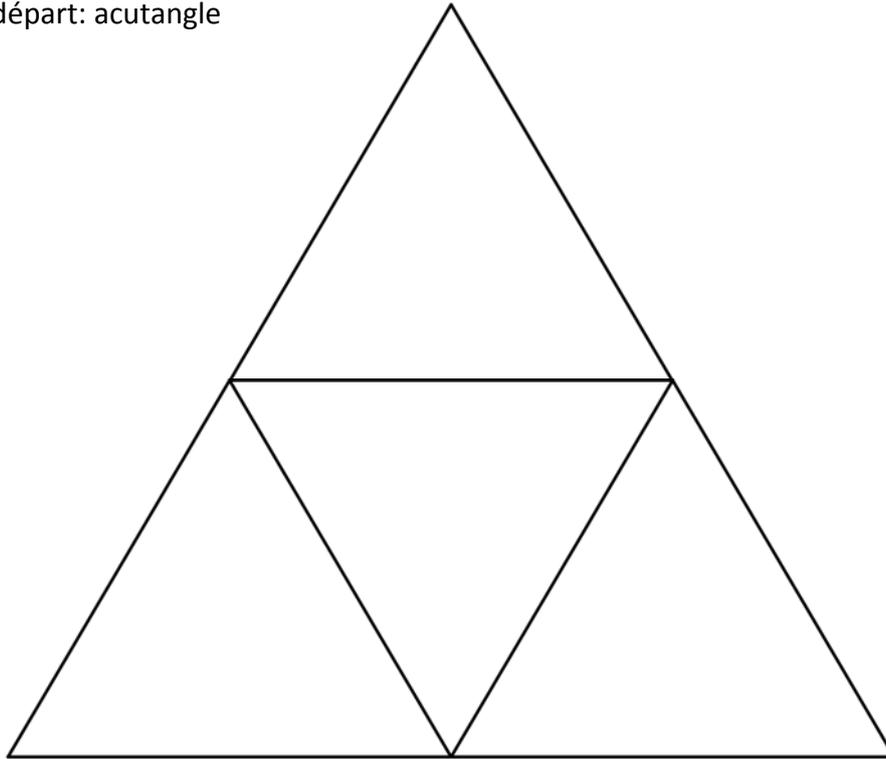
##### Modèle n° 1

Triangle de départ: acutangle



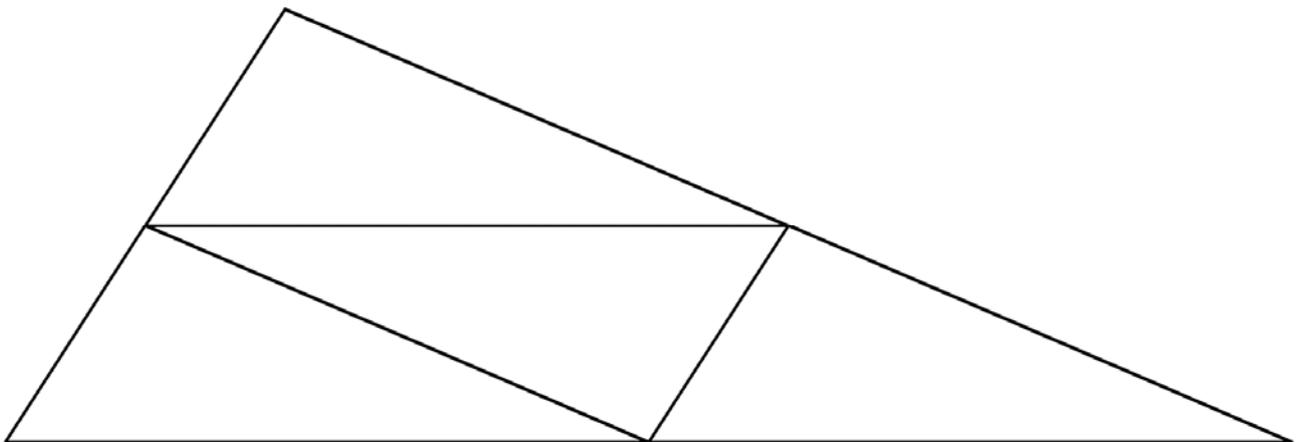
**Modèle n° 2**

Triangle de départ: acutangle



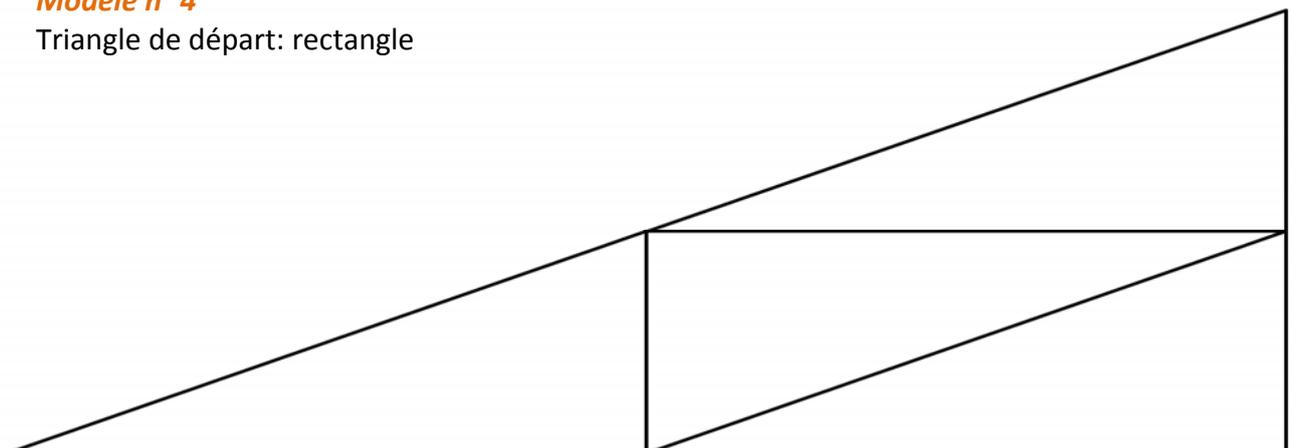
**Modèle n° 3**

Triangle de départ: obtusangle



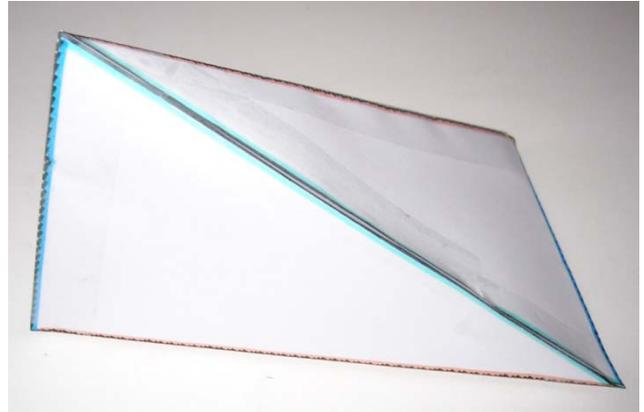
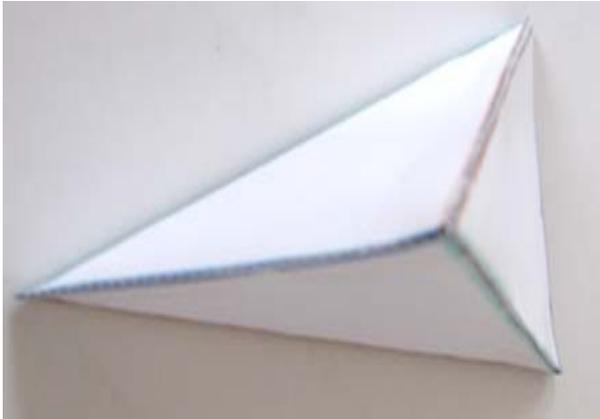
**Modèle n° 4**

Triangle de départ: rectangle



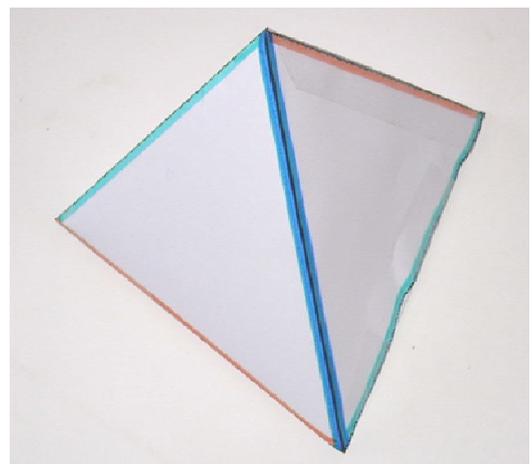
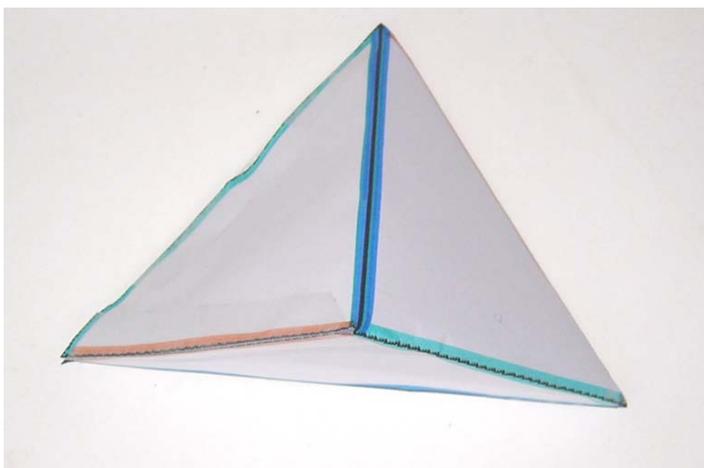
## 2.2.4. Photos des T.E.F.I. obtenus grâce aux modèles

### Modèle n° 1



Triangle de départ: acutangle  
Construction possible

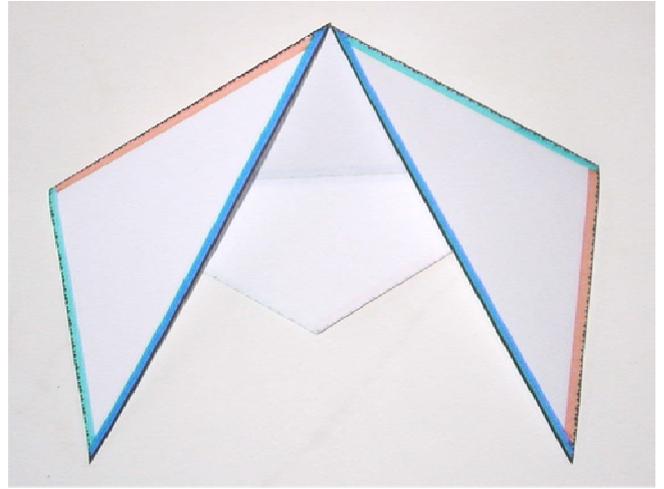
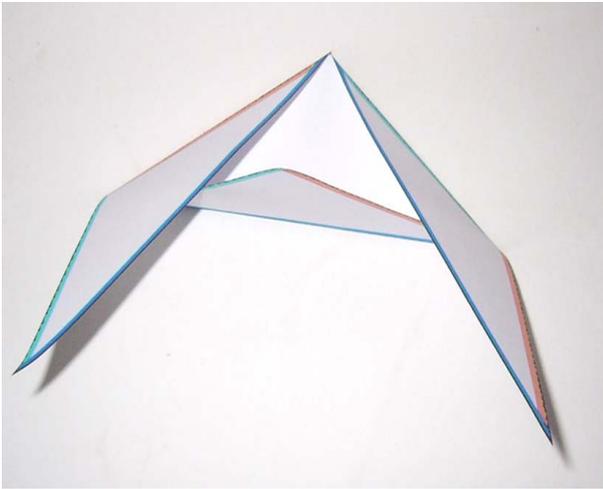
### Modèle n° 2



Triangle de départ: acutangle  
Construction possible

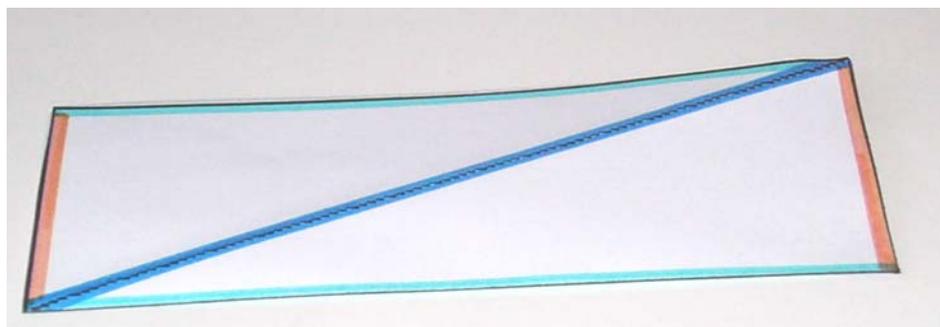
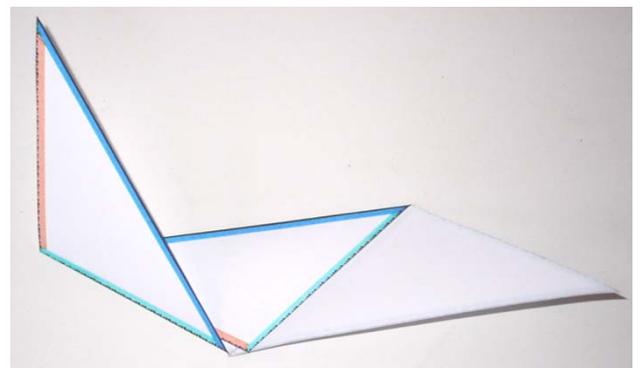
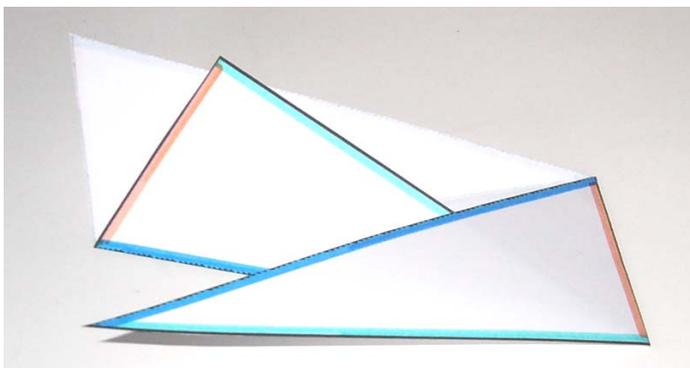
Dans les deux modèles ci-dessous (triangles de départ: obtusangle et rectangle), nous ne parvenons pas à construire le tétraèdre euclidien à faces isométriques.

**Modèle n° 3**



Triangle de départ: obtusangle  
Construction impossible

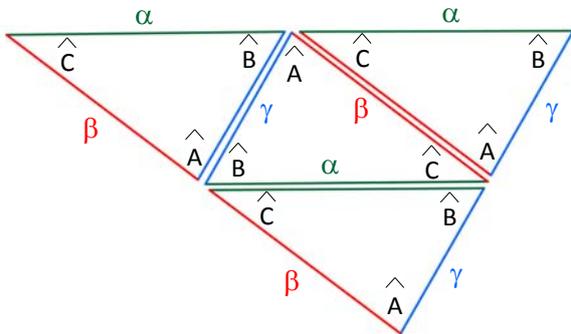
**Modèle n° 4**



Triangle de départ: rectangle  
Construction impossible

**2.2.5. Pour quelles raisons dans les cas des triangles obtusangles et rectangles, il n'est pas possible de construire le tétraèdre euclidien à faces isométriques? Où se trouve le problème?**

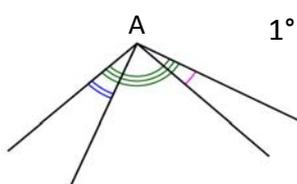
Nous avons oublié l'inégalité angulaire!



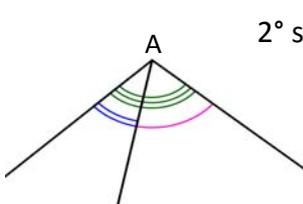
Celle-ci précise que l'amplitude d'un des angles faces d'un sommet d'un polyèdre doit être inférieure à la somme des amplitudes de tous les autres angles faces formant ce même sommet.

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A} < \widehat{B} + \widehat{C} \\ \widehat{B} < \widehat{A} + \widehat{C} \\ \widehat{C} < \widehat{A} + \widehat{B} \end{array} \right\} \text{ (I)}$$

En effet:



1° si  $|\widehat{A}| > |\widehat{B}| + |\widehat{C}|$ , quand nous replions le modèle, il est impossible d'obtenir un angle solide, c'est-à-dire un début de polyèdre.



2° si  $|\widehat{A}| = |\widehat{B}| + |\widehat{C}|$ , quand nous replions le modèle, il est également impossible d'obtenir un angle solide, c'est-à-dire un début de polyèdre. En effet, dans ce cas, les "trois faces" sont dans un même plan.

Sachant qu'en chaque sommet, la somme des amplitudes des angles faces vaut  $180^\circ$ , on a:

$$|\widehat{A}| + |\widehat{B}| + |\widehat{C}| = 180^\circ \text{ (**)}.$$

Dès lors, l'inégalité angulaire (I) donne:

$$\begin{aligned} |\widehat{A}| < |\widehat{B}| + |\widehat{C}| = 180^\circ - |\widehat{A}| &\Rightarrow |\widehat{A}| < 180^\circ - |\widehat{A}| \Rightarrow 2|\widehat{A}| < 180^\circ \Rightarrow |\widehat{A}| < 90^\circ \\ |\widehat{B}| < |\widehat{A}| + |\widehat{C}| = 180^\circ - |\widehat{B}| &\Rightarrow |\widehat{B}| < 180^\circ - |\widehat{B}| \Rightarrow 2|\widehat{B}| < 180^\circ \Rightarrow |\widehat{B}| < 90^\circ \\ |\widehat{C}| < |\widehat{A}| + |\widehat{B}| = 180^\circ - |\widehat{C}| &\Rightarrow |\widehat{C}| < 180^\circ - |\widehat{C}| \Rightarrow 2|\widehat{C}| < 180^\circ \Rightarrow |\widehat{C}| < 90^\circ \end{aligned}$$

### 2.2.6. Conclusion

Il faut que les triangles isométriques soient acutangles pour pouvoir construire un T.E.F.I.

#### Remarque:

Des conditions  $|\hat{A}| + |\hat{B}| + |\hat{C}| = 180^\circ$  et  $|\hat{C}| < 90^\circ$  nous pouvons déduire que:

$$|\hat{C}| = 180^\circ - |\hat{A}| - |\hat{B}| < 90^\circ$$

$$\Downarrow$$

$$90^\circ - |\hat{A}| < |\hat{B}|$$

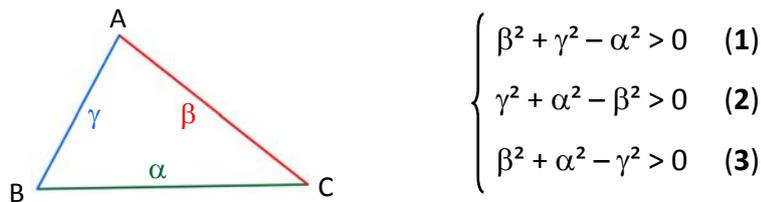
Dès lors, les conditions concernant l'amplitude des angles sont telles que:

- 1)  $0 < |\hat{A}| < 90^\circ$
- 2)  $90^\circ - |\hat{A}| < |\hat{B}| < 90^\circ$
- 3)  $|\hat{C}| = 180^\circ - |\hat{A}| - |\hat{B}| < 90^\circ$

#### Vision trigonométrique:

Les conditions  $|\hat{A}| < 90^\circ$ ,  $|\hat{B}| < 90^\circ$  et  $|\hat{C}| < 90^\circ$  étaient également présentes dans le tétraèdre obtenu à partir d'une "brique".

Dans l'approche via la brique, nous avons vu à la page 8 qu'il existait une solution si:



Conditions équivalentes à:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 < 0 & \text{(1)} \\ \beta^2 - \gamma^2 - \alpha^2 < 0 & \text{(2)} \\ \gamma^2 - \beta^2 - \alpha^2 < 0 & \text{(3)} \end{cases}$$

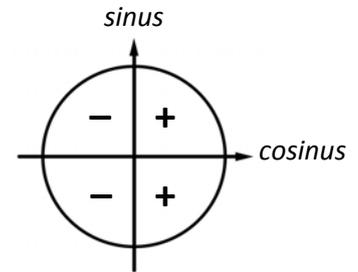
De plus, les formules des cosinus dans un triangle quelconque sont:

$$\begin{cases} \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos \hat{A} & \Leftrightarrow & \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 = -2\beta\gamma \cos \hat{A} & \text{(a)} \\ \beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma \cos \hat{B} & \Leftrightarrow & \beta^2 - \alpha^2 - \gamma^2 = -2\alpha\gamma \cos \hat{B} & \text{(b)} \\ \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos \hat{C} & \Leftrightarrow & \gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2 = -2\alpha\beta \cos \hat{C} & \text{(c)} \end{cases}$$

Dès lors, les conditions d'existence (1), (2) et (3) deviennent grâce aux formules du cosinus:

$$\begin{aligned}\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 < 0 &\Leftrightarrow -2\beta\gamma \cos \hat{A} < 0 \\ &\Leftrightarrow \cos \hat{A} > 0 \\ &\Leftrightarrow 0^\circ < |\hat{A}| < 90^\circ \quad (***)\end{aligned}$$

(\*\*\*) Signe des cosinus



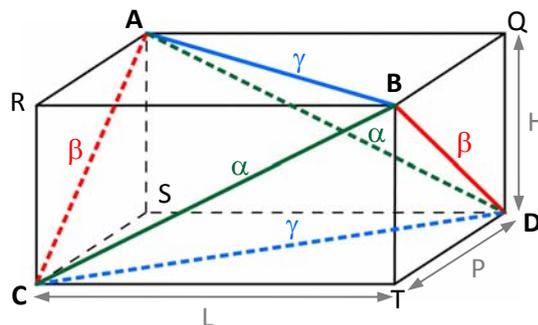
Car l'angle d'un triangle peut varier que de  $0^\circ$  à  $180^\circ$  non compris

$$\begin{aligned}\beta^2 - \gamma^2 - \alpha^2 < 0 &\Leftrightarrow -2\alpha\gamma \cos \hat{B} < 0 \\ &\Leftrightarrow \cos \hat{B} > 0 \\ &\Leftrightarrow 0^\circ < |\hat{B}| < 90^\circ \quad (***)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2 < 0 &\Leftrightarrow -2\alpha\beta \cos \hat{C} < 0 \\ &\Leftrightarrow \cos \hat{C} > 0 \\ &\Leftrightarrow 0^\circ < |\hat{C}| < 90^\circ \quad (***)\end{aligned}$$

En conclusion, les tétraèdres à faces isométriques obtenus à partir des "briques" ont les triangles isométriques acutangles.

**Remarque:** Nous aurions pu également trouver les mêmes conditions en partant des dimensions H, L et P de la brique.



$$\begin{aligned}\text{où } \alpha &= \sqrt{L^2 + H^2} \\ \beta &= \sqrt{H^2 + P^2} \\ \gamma &= \sqrt{L^2 + P^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Il vient que: } \cos \hat{A} &= \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2 \beta \gamma} \\
&= \frac{H^2 + P^2 + L^2 + P^2 - L^2 - H^2}{2 \sqrt{H^2 + P^2} \sqrt{L^2 + P^2}} \\
&= \frac{2P^2}{2 \sqrt{H^2 + P^2} \sqrt{L^2 + P^2}} \\
&= \frac{P^2}{\sqrt{H^2 + P^2} \sqrt{L^2 + P^2}} \quad \text{On divise le numérateur et le dénominateur par } P^2 \\
&= \frac{1}{\frac{\sqrt{H^2 + P^2}}{P} \frac{\sqrt{L^2 + P^2}}{P}} \quad \text{On "rentre" le P dans la racine} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{H^2 + P^2}{P^2}} \sqrt{\frac{L^2 + P^2}{P^2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{H^2}{P^2} + 1} \sqrt{\frac{L^2}{P^2} + 1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{H^2}{P^2} + 1\right) \cdot \left(\frac{L^2}{P^2} + 1\right)}}
\end{aligned}$$

Les expressions  $\left(\frac{H^2}{P^2} + 1\right)$  et  $\left(\frac{L^2}{P^2} + 1\right)$  étant strictement plus grandes que l'unité, il vient immédiatement que:

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\left(\frac{H^2}{P^2} + 1\right) \cdot \left(\frac{L^2}{P^2} + 1\right)} > 1 \\ 0 < \cos \hat{A} < 1 \Rightarrow 0 < |\hat{A}| < 90^\circ \end{cases}$$

De même:

$$\begin{aligned}
\cos \hat{B} &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{H^2}{L^2} + 1\right) \cdot \left(\frac{P^2}{L^2} + 1\right)}} & \cos \hat{C} &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{L^2}{H^2} + 1\right) \cdot \left(\frac{P^2}{H^2} + 1\right)}} \\
\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\left(\frac{H^2}{L^2} + 1\right) \cdot \left(\frac{P^2}{L^2} + 1\right)} > 1 \\ 0 < \cos \hat{B} < 1 \Rightarrow 0 < |\hat{B}| < 90^\circ \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\left(\frac{L^2}{H^2} + 1\right) \cdot \left(\frac{P^2}{H^2} + 1\right)} > 1 \\ 0 < \cos \hat{C} < 1 \Rightarrow 0 < |\hat{C}| < 90^\circ \end{cases}
\end{aligned}$$

### 3. Annexe

#### 3.1. Polygones euclidiens: définition

Par définition, les polygones euclidiens sont constitués de sommets et de côtés tels que:

- les sommets forment un ensemble fini (ordonné) de points d'un même plan;
- les côtés sont des segments de droites dont les extrémités sont des sommets;
- deux côtés consécutifs ne sont jamais alignés (colinéaires);
- tout sommet est l'extrémité d'exactly deux côtés;
- les sommets et les côtés forment une figure connexe (en une seule partie).

#### 3.2. Polyèdres euclidiens: définition

Un polyèdre euclidien est formé de sommets, d'arêtes et de faces, tel que:

- toutes les faces sont des polygones euclidiens;
- toute arête est à l'intersection de deux faces;
- les extrémités des arêtes sont les sommets du polyèdre;
- les faces, les sommets et les arêtes forment un ensemble connexe (en une seule partie);
- deux faces contiguës ne sont jamais coplanaires;
- aucun sommet n'est commun à plusieurs angles polyèdres.