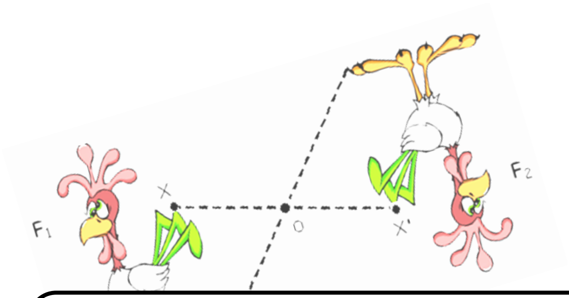
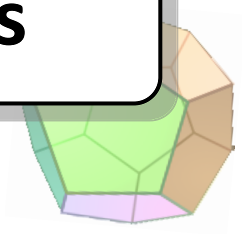


Mathématiques élémentaires



Détermination raisonnée du nombre de faces, de sommets et d'arêtes dans les polyèdres euclidiens

Cellule de géométrie – Catégorie pédagogique de la HEH

DEMAL Michel
demal.michel@skynet.be

DRAMAIX Jérémy
jeremy.dramaix@gmail.com

HIGNY Samuel
higny_samuel@hotmail.com

MALAGUARNERA Angelo
angelo.malaguarnera@gmail.com

Avec la collaboration de

ADABBO F. - LIEVENS A. - PILAETE C.

Faces, sommets et arêtes dans les polyèdres euclidiens
à l'intention des élèves

1. Détermination raisonnée du nombre de faces, de sommets et d'arêtes

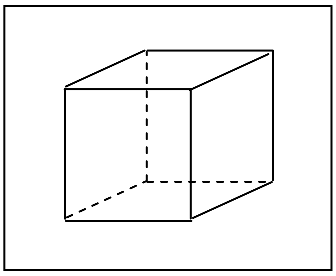
Avant 10 ans: essentiellement du comptage sur les polyèdres "simples".

Après 10 ans: la "complexité" des polyèdres présentés aux enfants entraîne la recherche d'une méthode "raisonnée" pour déterminer le nombre de faces (F), le nombre de sommets (S) et le nombre d'arêtes (A).

1.1. Polyèdres dont toutes les faces sont des polygones réguliers isométriques

Exemples:

✓ **Cube**



Type de faces: ....

Nombre de faces: ....

Nombre de faces par sommet: ....

Nombre d'arêtes: il y a .... arêtes par face et il y a .... faces.

Dès lors, on a envie de dire qu'il y a .... arêtes. Mais comme chaque arête appartient à .... faces, on les a donc comptées .... fois. Nous devons donc .... ce nombre d'arêtes par ....

Le cube possède donc .... arêtes, c'est-à-dire .... arêtes.

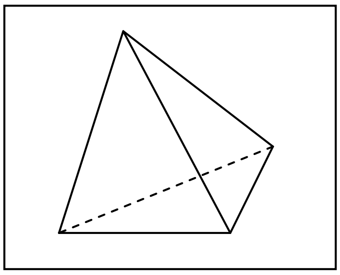
Nombre de sommets: il y a .... sommets par face et il y a .... faces.

Dès lors, on a envie de dire qu'il y a .... sommets. Mais comme chaque sommet appartient à .... faces, on les a donc comptés .... fois. Nous devons donc .... ce nombre de sommets par ....

Le cube possède donc .... sommets, c'est-à-dire .... sommets.

⇨ **Le cube possède donc .... faces, ... arêtes et .... sommets.**

✓ Tétraèdre régulier



Type de faces: …………………………………………………………………

Nombre de faces: …………………………………………………………….

Nombre de faces par sommet: …………………………………………..

Nombre d'arêtes: il y a ………… arêtes par face et il y a ………… faces.

Dès lors, on a envie de dire qu'il y a …………………………… arêtes. Mais comme chaque arête appartient à ………… faces, on les a donc comptées ………… fois. Nous devons donc …………………………… ce nombre d'arêtes par ………….

Le tétraèdre régulier possède donc ……………………………… arêtes, c'est-à-dire ……… arêtes.

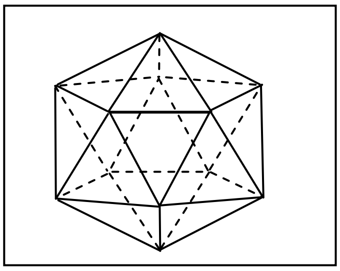
Nombre de sommets: il y a ……… sommets par face et il y a ……… faces.

Dès lors, on a envie de dire qu'il y a …………………….. sommets. Mais comme chaque sommet appartient à ……… faces, on les a donc comptés ……… fois. Nous devons donc …………………………… ce nombre de sommets par ……….

Le tétraèdre régulier possède donc ……………………….. sommets, c'est-à-dire …… sommets.

⇨ **Le tétraèdre régulier possède donc ………. faces, ………… arêtes et …………… sommets.**

✓ Icosaèdre régulier



Type de faces: …………………………………………………………………

Nombre de faces: …………………………………………………………….

Nombre de faces par sommet: …………………………………………

Nombre d'arêtes: il y a ………… arêtes par face et il y a ………… faces.

Dès lors, on a envie de dire qu'il y a …………………………… arêtes. Mais comme chaque arête appartient à ………… faces, on les a donc comptées ………… fois. Nous devons donc …………………………… ce nombre d'arêtes par ………….

L'icosaèdre régulier possède donc ………………………………… arêtes, c'est-à-dire ……… arêtes.

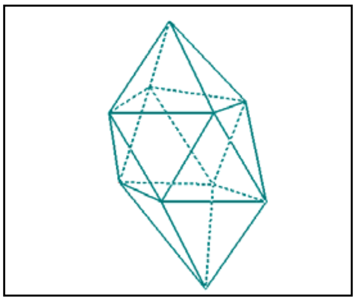
Nombre de sommets: il y a ……… sommets par face et il y a ……… faces.

Dès lors, on a envie de dire qu'il y a …………………….. sommets. Mais comme chaque sommet appartient à ……… faces, on les a donc comptés ……… fois. Nous devons donc …………………………… ce nombre de sommets par ……….

L'icosaèdre régulier possède donc ……………………………. sommets, c'est-à-dire …… sommets.

⇨ **L'icosaèdre régulier possède donc ………. faces, ………… arêtes et …………… sommets.**

✓ **<u>Deltaèdre</u>** (Pyramide carrée gyroallongée)



Type de faces: ……………………………………………………………….

Nombre de faces: ………………………………………………………..

Nombre de faces par sommet: ……………………………………..

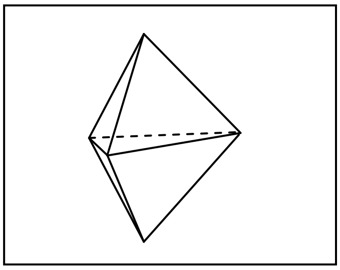
<u>Nombre d'arêtes</u>**:** il y a ………… arêtes par face et il y a ………… faces.

Dès lors, on a envie de dire qu'il y a ……………………………. arêtes. Mais comme chaque arête appartient à ………… faces, on les a donc comptées ………… fois. Nous devons donc ……………………………. ce nombre d'arêtes par ………….

Le deltaèdre possède donc ……………………………. arêtes, c'est-à-dire …… arêtes.

⇨ **Le deltaèdre possède donc ………. faces, ………… arêtes et …………… sommets.**

✓ **<u>Dipyramide triangulaire</u>** (Diamant triangulaire)



Type de faces: ……………………………………………………………….

Nombre de faces: ………………………………………………………..

Nombre de faces par sommet: ……………………………………..

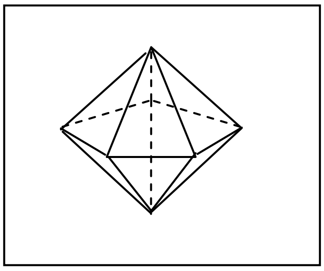
<u>Nombre d'arêtes</u>**:** il y a ………… arêtes par face et il y a ………… faces.

Dès lors, on a envie de dire qu'il y a ……………………………. arêtes. Mais comme chaque arête appartient à ………… faces, on les a donc comptées ………… fois. Nous devons donc ……………………………. ce nombre d'arêtes par ………….

La dipyramide triangulaire possède donc ……………………………. arêtes, c'est-à-dire …… arêtes.

⇨ **La dipyramide triangulaire possède donc ………. faces, ………… arêtes et …………… sommets.**

- ✓ **<u>Dipyramide pentagonale</u>** (Diamant pentagonal)



Type de faces: …………………………………………………………………

Nombre de faces: ……………………………………………………………

Nombre de faces par sommet: ……………………………………….

<u>Nombre d'arêtes</u>**:** il y a ……….. arêtes par face et il y a ……….. faces.

Dès lors, on a envie de dire qu'il y a …………………………. arêtes. Mais comme chaque arête appartient à ……….. faces, on les a donc comptées ……….. fois. Nous devons donc …………………………. ce nombre d'arêtes par ………..

La dipyramide pentagonale possède donc …………………………. arêtes, c'est-à-dire …… arêtes.

⇨ **La dipyramide pentagonale possède donc ………. faces, ……….. arêtes et …………… sommets.**

<u>Généralisation</u>:

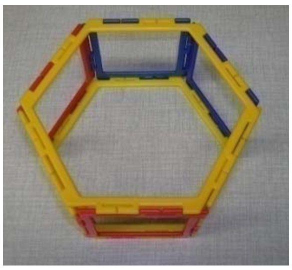
NOMBRE D'ARÊTES:

$$\frac{\boldsymbol{nombre\ de\ côtés\ d'une face \times nombre\ de\ faces}}{\mathbf{2}}$$

1.2. <u>Polyèdres dont toutes les faces ne sont pas des polygones isométriques</u>

<u>Exemples</u>:

- ✓ **<u>Prismes</u>**



Type de faces: …………………………………………………………………

Nombre de faces: ……………………………………………………………

Nombre de faces par sommet: ……………………………………….

Nombre d'arêtes**:**

Il y a ……….. arêtes par face de type ………………………………. et il y a ……….. arêtes par face de type ……………………………….

Dès lors, on a envie de dire qu'il y a …………………………. arêtes + ……………………………. arêtes. Mais comme chaque arête appartient à ……….. faces, on les a donc comptées ……….. fois. Nous devons donc …………………………… le nombre total d'arêtes par …………..

Ce prisme à base hexagonale possède donc …………………….. arêtes, c'est-à-dire …… arêtes.

Nombre de sommets**:**

Il y a ……… sommets par face de type ………………………………. et il y a ……… sommets par face de type ……………………………….

Dès lors, on a envie de dire qu'il y a …………………….. sommets + ……………………………. sommets. Mais comme chaque sommet appartient à ……… faces, on les a donc comptés ……… fois. Nous devons donc …………………………… le nombre total de sommets par ………

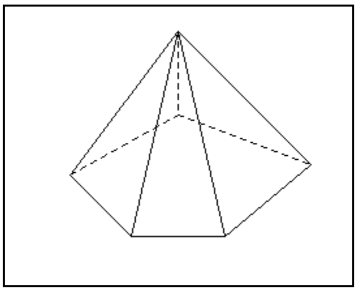
Ce prisme à base hexagonale possède donc …………….. sommets, c'est-à-dire … sommets.

⇨ **Ce prisme à base hexagonale possède donc ………. faces du type ………………………., ……… faces du type ……………………………. , ……… arêtes et ……… sommets.**

✓ Pyramides

L'exemple du tétraèdre régulier peut être repris dans la catégorie des pyramides. Remarquons cependant, que dans ce cas, les faces sont toutes isométriques.

Pour un autre exemple, faisons la recherche du nombre de faces, sommets et arêtes.



Type de faces: ……………………………………………………….

Nombre de faces: ……………………………………………….

Nombre de faces par sommet: ……………………………

Nombre d'arêtes**:**

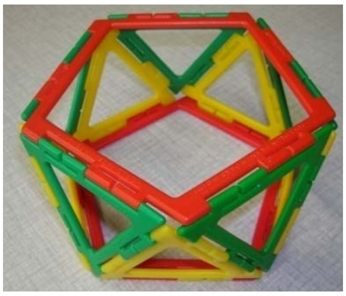
Il y a ……….. arêtes par face de type ………………………………. et il y a ……….. arêtes pour la face du type ……………………………….

Dès lors, on a envie de dire qu'il y a …………………………. arêtes + ……………………………. arêtes. Mais comme chaque arête appartient à ……….. faces, on les a donc comptées ……….. fois. Nous devons donc …………………………… le nombre total d'arêtes par …………..

Cette pyramide dont la base est un ………………… possède donc…………………….. arêtes, c'est-à-dire …… arêtes.

⇨ **Cette pyramide possède donc ………. faces du type …………………………., ……… face du type ……………………………. et ……… arêtes.**

✓ **Antiprismes**



Type de faces: …………………………………………………………………….

Nombre de faces: ………………………………………………..……………….

Nombre de faces par sommet: ……………………………………………

Nombre d'arêtes**:**

Il y a ………… arêtes par face de type ………………………………. et il y a ………… arêtes par face du type ………………………………..

Dès lors, on a envie de dire qu'il y a …………………………… arêtes + ……………………………. arêtes. Mais comme chaque arête appartient à ………… faces, on les a donc comptées ………… fois. Nous devons donc ……………………………. le nombre total d'arêtes par ………….

Cet antiprisme à base pentagonale possède donc ………………………… arêtes, c'est-à-dire ……. arêtes.

Nombre de sommets**:**

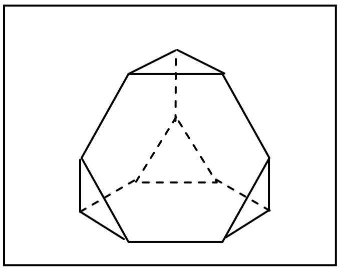
Il y a ……… sommets par face de type ………………………………. et il y a ……… sommets par face de type ………………………………..

Dès lors, on a envie de dire qu'il y a ……………………… sommets + ……………………………. sommets. Mais comme chaque sommet appartient à ……… faces, on les a donc comptés ……… fois. Nous devons donc ……………………………. le nombre total de sommets par ……….

Cet antiprisme à base pentagonale possède donc ……………………… sommets, c'est-à-dire …….. sommets.

⇨ **Cet antiprisme à base pentagonale possède donc ………. faces du type …………………………., ……… faces du type ……………………………. , ……… arêtes et ……… sommets.**

✓ **Tétraèdre tronqué**



Type de faces: ……………………………………………………………

Nombre de faces: ……………………………………………………..

Nombre de faces par sommet: ……………………………………

Nombre d'arêtes:

Il y a ………… arêtes par face de type ………………………………. et il y a ………… arêtes par face du type ………………………………..

Dès lors, on a envie de dire qu'il y a …………………………… arêtes + ……………………………. arêtes. Mais comme chaque arête appartient à ………… faces, on les a donc comptées ………… fois. Nous devons donc …………………………… le nombre total d'arêtes par ………….

Ce tétraèdre tronqué possède donc ……………………….. arêtes, c'est-à-dire ……. arêtes.

Nombre de sommets:

Il y a ……… sommets par face de type ………………………………. et il y a ……… sommets par face de type ………………………………..

Dès lors, on a envie de dire qu'il y a ……………………… sommets + ……………………………. sommets. Mais comme chaque sommet appartient à ……… faces, on les a donc comptés ……… fois. Nous devons donc …………………………… le nombre total de sommets par ……….

Ce tétraèdre tronqué possède donc …………………….. sommets, c'est-à-dire …….. sommets.

⇨ **Ce tétraèdre tronqué possède donc ………. faces du type …………………………., ……… faces du type ……………………………. , ……… arêtes et ……… sommets.**

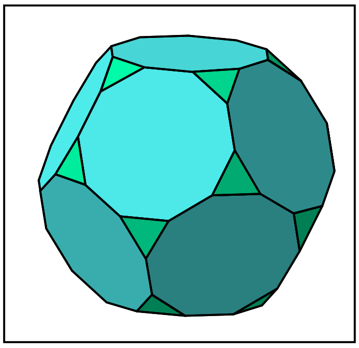
Généralisation :

NOMBRE D'ARÊTES :

$$\frac{\mathbf{3} \times \boldsymbol{nombre\ de\ faces\ triangulaires} + \mathbf{4} \times \boldsymbol{nombre\ de\ faces\ carrées} + \mathbf{5} \times \boldsymbol{nombre\ de\ faces\ pentagonales} + \cdots}{\mathbf{2}}$$

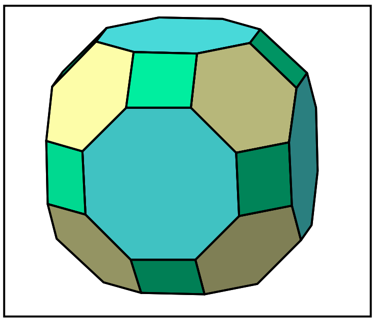
2. Exercices d'entraînement

✓ Dodécaèdre tronqué



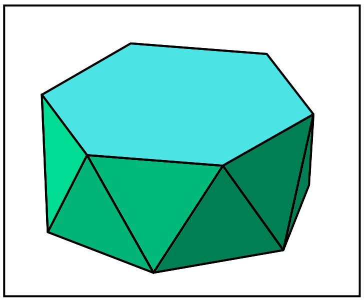
Calcule le nombre d'arêtes en sachant que le dodécaèdre tronqué possède 20 triangles équilatéraux et 12 10-gones réguliers.

✓ Cuboctaèdre tronqué



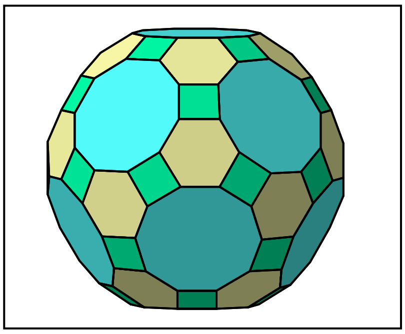
Calcule le nombre d'arêtes en sachant que le cuboctaèdre tronqué possède 12 carrés, 8 hexagones réguliers et 6 8-gones réguliers.

✓ Antiprisme à base hexagonale



Calcule le nombre d'arêtes en sachant que l'antiprisme à base hexagonale possède 12 triangles équilatéraux et 2 6-gones réguliers.

✓ Icosidodécaèdre tronqué



Calcule le nombre d'arêtes en sachant que l'icosidodécaèdre tronqué possède 30 carrés, 20 hexagones réguliers et 10 12-gones réguliers.

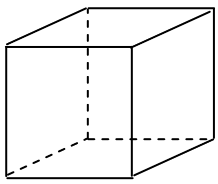
Faces, sommets et arêtes dans les polyèdres euclidiens
à l'intention des "initiés"

Détermination raisonnée du nombre de faces, de sommets et d'arêtes

La détermination du nombre de faces, de sommets et d'arêtes peut se faire, dans un premier temps, par comptage sur les polyèdres "simples".
Par la suite, la "complexité" de certains polyèdres rencontrés entraîne la recherche d'une méthode "raisonnée" pour déterminer le nombre de faces (F), le nombre de sommets (S) et le nombre d'arêtes (A) des polyèdres.

Exemples:

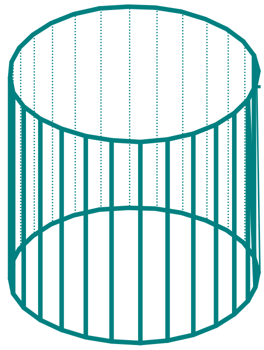
✓ **Cube**



- Nombre de faces (F)
  * 1 + 4 + 1
  * Comptage par 2
- Nombre d'arêtes (A)
  * 4 + 4 + 4
  * 4 par direction; 3 directions
  * $\frac{6 \times 4}{2}$
- Nombre de sommets (S)
  * 4 + 4
  * $\frac{6 \times 4}{3}$
- Nombre de sommets à partir du nombre d'arêtes
  * 1 arête → 2 sommets
  * 12 arêtes → $S = \frac{12 \times 2}{3} = 8$
  * En chaque sommet, il arrive trois arêtes
- Nombre d'arêtes à partir du nombre de sommets
  * En chaque sommet → 3 arêtes
  * 8 sommets
  * Toute arête relie deux sommets

Remarque: Un raisonnement analogue est réalisé pour les parallélépipèdes.

✓ Prismes dont les bases sont des n-gones



- Nombre de faces (F)
  2 + n

- Nombre d'arêtes (A)
  * n + n + n = 3 n
  * $\frac{2 . n + 4 . n}{2} = 3 n$

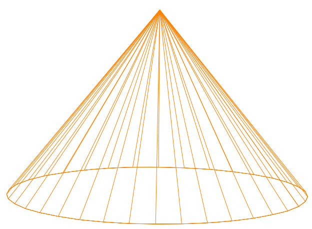
- Nombre de sommets (S)
  * n + n = 2 n
  * $\frac{2 . n + 4 . n}{3} = 2 n$

- Nombre de sommets à partir du nombre d'arêtes
  * 3 n arêtes
  * 1 arête apporte deux sommets → $S = \frac{3 . n \times 2}{3} = 2 n$
  * En tout sommet, il arrive 3 arêtes

- Nombre d'arêtes à partir du nombre de sommets
  * Par sommet, il y a 3 arêtes
  * 2 n sommets → $A = \frac{3 \times 2 . n}{2} = 3 n$
  * Toute arête relie 2 sommets

Remarque: Dans tout prisme, les arêtes latérales sont de la même longueur.

✓ Pyramides dont la base est un n-gone



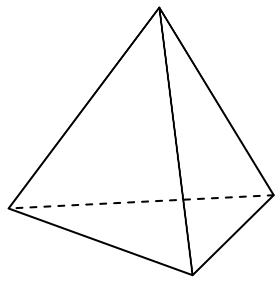
- Nombre de faces (F)
  1 + n

- Nombre d'arêtes (A)
  * n + n = 2 n
  * $\frac{1 . n + 3 . n}{2} = 2 n$

- Nombre de sommets (S)
  n + 1

- Nombre d'arêtes à partir du nombre de sommets
  * n sommets d'ordre 3
  * 1 sommet d'ordre n → $A = \frac{3 . n + 1 . n}{2} = 2 n$
  * diviser par 2 car toute arête relie 2 sommets

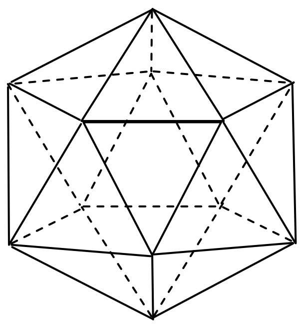
✓ **Tétraèdre régulier**



- Nombre de faces (F)
  4
- Nombre d'arêtes (A)
  * 3 + 3 = 6
  * $\frac{3 \times 4}{2} = 6$
- Nombre de sommets (S)
  * 3 + 1 = 4
  * $\frac{4 \times 3}{3} = 4$

- Nombre de sommets à partir du nombre d'arêtes
  $S = \frac{2 \times 6}{3} = 4$
- Nombre d'arêtes à partir du nombre de sommets
  $A = \frac{3 \times 4}{2} = 6$

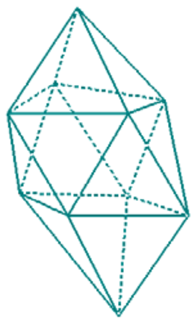
✓ **Icosaèdre régulier**



- Nombre de faces (F)
  * (5 + 5) x 2 = 20
  * 5 + 10 + 5 = 20
- Nombre d'arêtes (A)
  $\frac{20 \times 3}{2} = 30$
- Nombre de sommets (S)
  $\frac{20 \times 3}{5} = 12$

- Nombre de sommets à partir du nombre d'arêtes
  $S = \frac{2 \times 30}{5} = 12$
- Nombre d'arêtes à partir du nombre de sommets
  $A = \frac{5 \times 12}{2} = 30$

✓ **Deltaèdre** (Pyramide carrée gyroallongée)



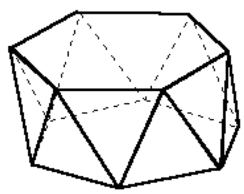
- Nombre de faces (F)
  16

- Nombre d'arêtes (A)
  $\frac{16 \text{ x } 3}{2} = 24$

- Nombre de sommets (S)
  2 sommets d'ordre 4 et
  8 sommets d'ordre 5

- Nombre d'arêtes à partir du nombre de sommets
  $A = \frac{2 . 4 + 8 . 5}{2} = 24$

✓ **Antiprismes**



- Nombre de faces (F)
  * 2 n + 2
  * 2 n-gones et 2 n triangles

- Nombre d'arêtes (A)
  * n + 2 n + n = 4 n
  * $\frac{2 . n + 2n \text{ x } 3}{2} = 4 \text{ n}$

- Nombre de sommets (S)
  2 n sommets d'ordre 4

- Nombre d'arêtes à partir du nombre de sommets
  $A = \frac{2 \text{ n x } 4}{2} = 4 \text{ n}$

- Nombre de sommets à partir du nombre d'arêtes
  $S = \frac{4 \text{ n x } 2}{4} = 2 \text{ n}$

Faces, sommets et arêtes dans les polyèdres euclidiens
à l'intention des élèves

1. Détermination raisonnée du nombre de faces, de sommets et d'arêtes

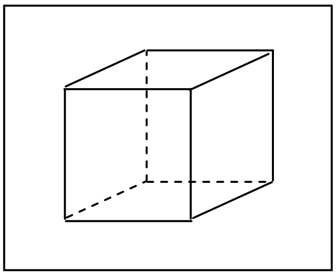
Avant 10 ans: essentiellement du comptage sur les polyèdres "simples".

Après 10 ans: la "complexité" des polyèdres présentés aux enfants entraîne la recherche d'une méthode "raisonnée" pour déterminer le nombre de faces (F), le nombre de sommets (S) et le nombre d'arêtes (A).

1.1. Polyèdres dont toutes les faces sont des polygones réguliers isométriques

***Exemples*:**

✓ **Cube**



Type de faces: carrés

Nombre de faces: 6

Nombre de faces par sommet: 3

Nombre d'arêtes**:** il y a 4 arêtes par face et il y a 6 faces.

Dès lors, on a envie de dire qu'il y a 4 x 6 arêtes. Mais comme chaque arête appartient à 2 faces, on les a donc comptées 2 fois. Nous devons donc diviser ce nombre d'arêtes par 2.

Le cube possède donc $\frac{4 \times 6}{2}$ *arêtes, c'est-à-dire 12 arêtes.*

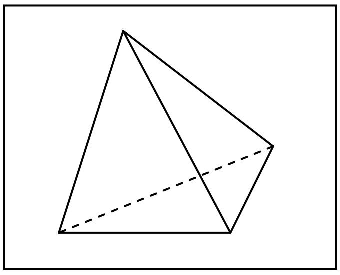
Nombre de sommets**:** il y a 4 sommets par face et il y a 6 faces.

Dès lors, on a envie de dire qu'il y a 4 x 6 sommets. Mais comme chaque sommet appartient à 3 faces, on les a donc comptés 3 fois. Nous devons donc diviser ce nombre de sommets par 3.

Le cube possède donc $\frac{4 \times 6}{3}$ *sommets, c'est-à-dire 8 sommets.*

⇨ **Le cube possède donc 6 faces, 12 arêtes et 8 sommets.**

✓ <u>Tétraèdre régulier</u>



Type de faces: triangles équilatéraux

Nombre de faces: 4

Nombre de faces par sommet: 3

<u>Nombre d'arêtes</u>**:** il y a 3 arêtes par face et il y a 4 faces.

Dès lors, on a envie de dire qu'il y a 3 x 4 arêtes. Mais comme chaque arête appartient à 2 faces, on les a donc comptées 2 fois. Nous devons donc diviser ce nombre d'arêtes par 2.

Le tétraèdre régulier possède donc $\frac{3 \times 4}{2}$ *arêtes, c'est-à-dire 6 arêtes.*

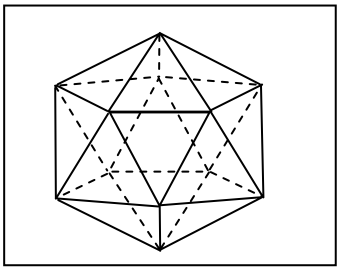
<u>Nombre de sommets</u>**:** il y a 3 sommets par face et il y a 4 faces.

Dès lors, on a envie de dire qu'il y a 3 x 4 sommets. Mais comme chaque sommet appartient à 3 faces, on les a donc comptés 3 fois. Nous devons donc diviser ce nombre de sommets par 3.

Le tétraèdre régulier possède donc $\frac{3 \times 4}{3}$ *sommets, c'est-à-dire 4 sommets.*

⇨ **Le tétraèdre régulier possède donc 4 faces, 6 arêtes et 4 sommets.**

✓ <u>Icosaèdre régulier</u>



Type de faces: triangles équilatéraux

Nombre de faces: 20

Nombre de faces par sommet: 5

<u>Nombre d'arêtes</u>**:** il y a 3 arêtes par face et il y a 20 faces.

Dès lors, on a envie de dire qu'il y a 3 x 20 arêtes. Mais comme chaque arête appartient à 2 faces, on les a donc comptées 2 fois. Nous devons donc diviser ce nombre d'arêtes par 2.

L'icosaèdre régulier possède donc $\frac{3 \times 20}{2}$ *arêtes, c'est-à-dire 30 arêtes.*

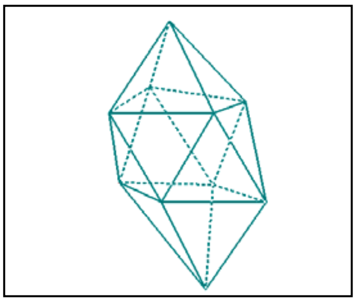
<u>Nombre de sommets</u>**:** il y a 3 sommets par face et il y a 20 faces.

Dès lors, on a envie de dire qu'il y a 3 x 20 sommets. Mais comme chaque sommet appartient à 5 faces, on les a donc comptés 5 fois. Nous devons donc diviser ce nombre de sommets par 5.

L'icosaèdre régulier possède donc $\frac{3 \times 20}{5}$ sommets, c'est-à-dire 12 sommets.

⇨ **L'icosaèdre régulier possède donc 20 faces, 30 arêtes et 12 sommets.**

✓ **<u>Deltaèdre</u>** (Pyramide carrée gyroallongée)



Type de faces: triangles équilatéraux

Nombre de faces: 16

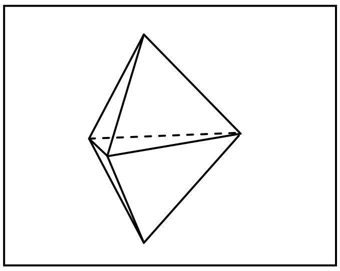
Nombre de faces par sommet: 4 ou 5

<u>Nombre d'arêtes</u>**:** il y a 3 arêtes par face et il y a 16 faces.
Dès lors, on a envie de dire qu'il y a 3 x 16 arêtes. Mais comme chaque arête appartient à 2 faces, on les a donc comptées 2 fois. Nous devons donc diviser ce nombre d'arêtes par 2.

Le deltaèdre possède donc $\frac{3 \times 16}{2}$ arêtes, c'est-à-dire 24 arêtes.

⇨ **Le deltaèdre possède donc 16 faces, 24 arêtes et 10 sommets.**

✓ **<u>Dipyramide triangulaire</u>** (Diamant triangulaire)



Type de faces: triangles équilatéraux

Nombre de faces: 6

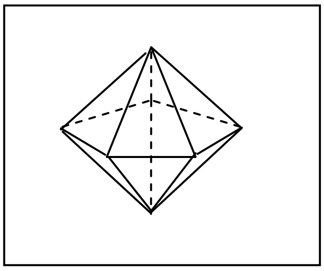
Nombre de faces par sommet: 3 ou 4

<u>Nombre d'arêtes</u>**:** il y a 3 arêtes par face et il y a 6 faces.
Dès lors, on a envie de dire qu'il y a 3 x 6 arêtes. Mais comme chaque arête appartient à 2 faces, on les a donc comptées 2 fois. Nous devons donc diviser ce nombre d'arêtes par 2.

La dipyramide triangulaire possède donc $\frac{3 \times 6}{2}$ arêtes, c'est-à-dire 9 arêtes.

⇨ **La dipyramide triangulaire possède donc 6 faces, 9 arêtes et 5 sommets.**

✓ **Dipyramide pentagonale** (Diamant pentagonal)



Type de faces: triangles équilatéraux

Nombre de faces: 10

Nombre de faces par sommet: 4 ou 5

Nombre d'arêtes: il y a 3 arêtes par face et il y a 10 faces.

Dès lors, on a envie de dire qu'il y a 3 x 10 arêtes. Mais comme chaque arête appartient à 2 faces, on les a donc comptées 2 fois. Nous devons donc diviser ce nombre d'arêtes par 2.

La dipyramide pentagonale possède donc $\frac{3 \times 10}{2}$ *arêtes, c'est-à-dire 15 arêtes.*

⇨ **La dipyramide pentagonale possède donc 10 faces, 15 arêtes et 7 sommets.**

Généralisation:

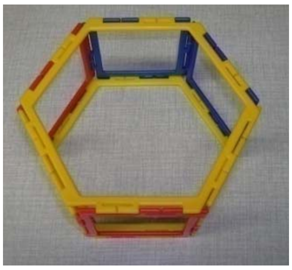
NOMBRE D'ARÊTES:

$$\frac{\boldsymbol{nombre\ de\ côtés\ d'une face\ \times\ nombre\ de\ faces}}{\mathbf{2}}$$

1.2. Polyèdres dont toutes les faces ne sont pas des polygones isométriques

Exemples:

✓ **Prismes**



Type de faces: carrés et hexagones

Nombre de faces: 2 hexagones et 6 carrés

Nombre de faces par sommet: 3

Nombre d'arêtes:

Il y a 6 arêtes par face de type 6-gones et il y a 4 arêtes par face de type 4-gones.

Dès lors, on a envie de dire qu'il y a 6 x 2 arêtes + 4 x 6 arêtes. Mais comme chaque arête appartient à 2 faces, on les a donc comptées 2 fois. Nous devons donc diviser le nombre total d'arêtes par 2.

Ce prisme à base hexagonale possède donc $\frac{6 \times 2 + 4 \times 6}{2}$ *arêtes, c'est-à-dire 18 arêtes.*

Nombre de sommets:

Il y a 6 sommets par face de type 6-gones et il y a 4 sommets par face de type 4-gones.

Dès lors, on a envie de dire qu'il y a 6 x 2 sommets + 4 x 6 sommets. Mais comme chaque sommet appartient à 3 faces, on les a donc comptés 3 fois. Nous devons donc diviser le nombre total de sommets par 3.

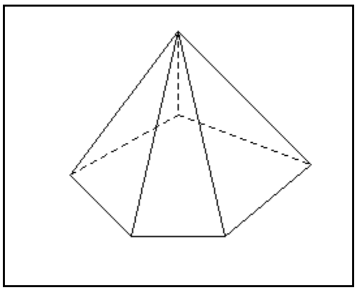
Ce prisme à base hexagonale possède donc $\frac{6 \times 2 + 4 \times 6}{3}$ *sommets, c'est-à-dire 12 sommets.*

⇨ **Ce prisme à base hexagonale possède donc 2 faces du type 6-gones, 6 faces du type 4-gones, 18 arêtes et 12 sommets.**

✓ Pyramides

L'exemple du tétraèdre régulier peut être repris dans la catégorie des pyramides. Remarquons cependant, que dans ce cas, les faces sont toutes isométriques.

Pour un autre exemple, faisons la recherche du nombre de faces, sommets et arêtes.



Type de faces: triangles et pentagone

Nombre de faces: 5 triangles et 1 pentagone

Nombre de faces par sommet: 3 ou 5

Nombre d'arêtes:

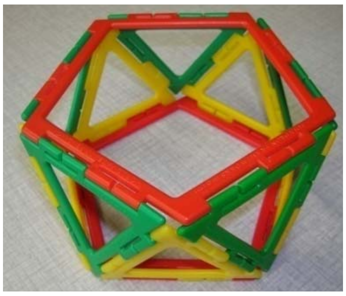
Il y a 3 arêtes par face de type 3-gones et il y a 5 arêtes pour la face du type 5-gones.

Dès lors, on a envie de dire qu'il y a 3 x 5 arêtes + 5 x 1 arêtes. Mais comme chaque arête appartient à 2 faces, on les a donc comptées 2 fois. Nous devons donc diviser le nombre total d'arêtes par 2.

Cette pyramide dont la base est un pentagone possède donc $\frac{3 \times 5 + 5 \times 1}{2}$ *arêtes, c'est-à-dire 10 arêtes.*

⇨ **Cette pyramide possède donc 5 faces du type 3-gones, 1 face du type 5-gones, 10 arêtes et 6 sommets.**

✓ **Antiprismes**



Type de faces: triangles et pentagones

Nombre de faces: 10 triangles et 2 pentagones

Nombre de faces par sommet: 4

Nombre d'arêtes**:**

Il y a 3 arêtes par face de type 3-gones et il y a 5 arêtes par face du type 5-gones.

Dès lors, on a envie de dire qu'il y a 3 x 10 arêtes + 5 x 2 arêtes. Mais comme chaque arête appartient à 2 faces, on les a donc comptées 2 fois. Nous devons donc diviser le nombre total d'arêtes par 2.

Cet antiprisme à base pentagonale possède donc $\frac{3 \times 10 + 5 \times 2}{2}$ *arêtes, c'est-à-dire 20 arêtes.*

Nombre de sommets**:**

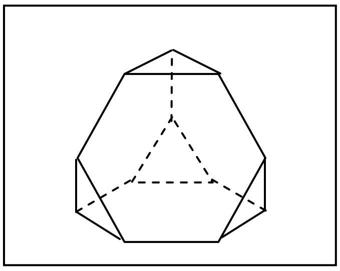
Il y a 3 sommets par face de type 3-gones et il y a 5 sommets par face de type 5-gones.

Dès lors, on a envie de dire qu'il y a 3 x 10 sommets + 5 x 2 sommets. Mais comme chaque sommet appartient à 4 faces, on les a donc comptés 4 fois. Nous devons donc diviser le nombre total de sommets par 4.

Cet antiprisme à base pentagonale possède donc $\frac{3 \times 10 + 5 \times 2}{4}$ *sommets, c'est-à-dire 10 sommets.*

⇨ **Cet antiprisme à base pentagonale possède donc 10 faces du type 3-gones, 2 faces du type 5-gones, 20 arêtes et 10 sommets.**

✓ Tétraèdre tronqué



Type de faces: triangles et hexagones

Nombre de faces: 4 triangles et 4 hexagones

Nombre de faces par sommet: 3

Nombre d'arêtes:

Il y a 3 arêtes par face de type 3-gones et il y a 6 arêtes par face du type 6-gones.

Dès lors, on a envie de dire qu'il y a 3 x 4 arêtes + 6 x 4 arêtes. Mais comme chaque arête appartient à 2 faces, on les a donc comptées 2 fois. Nous devons donc diviser le nombre total d'arêtes par 2.

Ce tétraèdre tronqué possède donc $\frac{3 \times 4 + 6 \times 4}{2}$ *arêtes, c'est-à-dire 10 arêtes.*

Nombre de sommets:

Il y a 3 sommets par face de type 3-gone et il y a 6 sommets par face de type 6-gones.

Dès lors, on a envie de dire qu'il y a 4 x 3 sommets + 4 x 6 sommets. Mais comme chaque sommet appartient à 3 faces, on les a donc comptés 3 fois. Nous devons donc diviser le nombre total de sommets par 3.

Ce tétraèdre tronqué possède donc $\frac{3 \times 4 + 6 \times 4}{3}$ *sommets, c'est-à-dire 12 sommets.*

⇨ **Ce tétraèdre tronqué possède donc 4 faces du type 3-gones, 4 faces du type 6-gones, 10 arêtes et 12 sommets.**

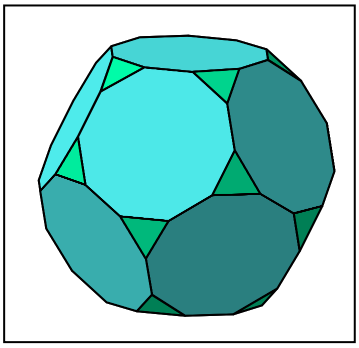
Généralisation :

NOMBRE D'ARÊTES :

$$\frac{\mathbf{3} \times \boldsymbol{nombre\ de\ faces\ triangulaires} + \mathbf{4} \times \boldsymbol{nombre\ de\ faces\ carrées} + \mathbf{5} \times \boldsymbol{nombre\ de\ faces\ pentagonales} + \cdots}{\mathbf{2}}$$

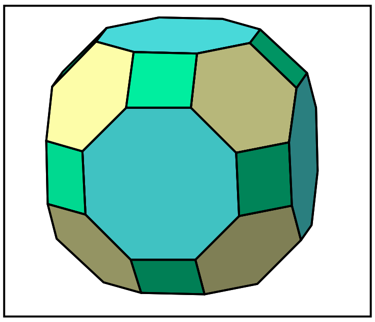
2. Exercices d'entraînement

✓ Dodécaèdre tronqué



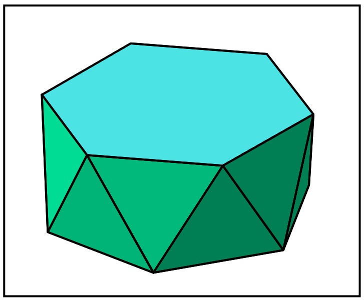
Calcule le nombre d'arêtes en sachant que le dodécaèdre tronqué possède 20 triangles équilatéraux et 12 10-gones réguliers.

✓ Cuboctaèdre tronqué



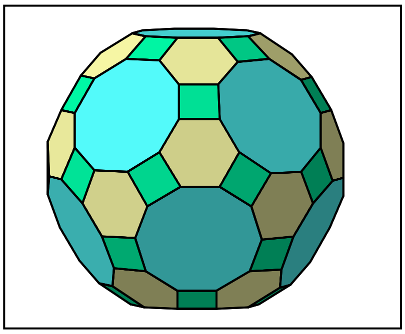
Calcule le nombre d'arêtes en sachant que le cuboctaèdre tronqué possède 12 carrés, 8 hexagones réguliers et 6 8-gones réguliers.

✓ Antiprisme à base hexagonale



Calcule le nombre d'arêtes en sachant que l'antiprisme à base hexagonale possède 12 triangles équilatéraux et 2 6-gones réguliers.

✓ Icosidodécaèdre tronqué



Calcule le nombre d'arêtes en sachant que l'icosidodécaèdre tronqué possède 30 carrés, 20 hexagones réguliers et 10 12-gones réguliers.