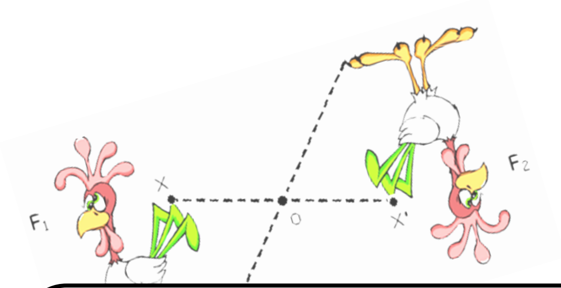
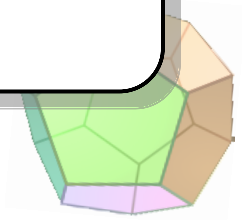
Centre de Recherche de la HAUTE ECOLE
de la Communauté française en HAINAUT




# Mathématiques au fondamental

## Approche intuitive



*Règles des signes*

*Exposant "0"*

*Division par une fraction*

**Cellule de géométrie – Catégorie pédagogique de la HEH**

DEMAL Michel
michel.demal@belgacom.net

DRAMAIX Jérémy
jeremy.dramaix@gmail.com

HIGNY Samuel
higny_samuel@hotmail.com

MALAGUARNERA Angelo
angelo.malaguarnera@gmail.com

# Table des matières

# Règles des signes: le "pourquoi"?

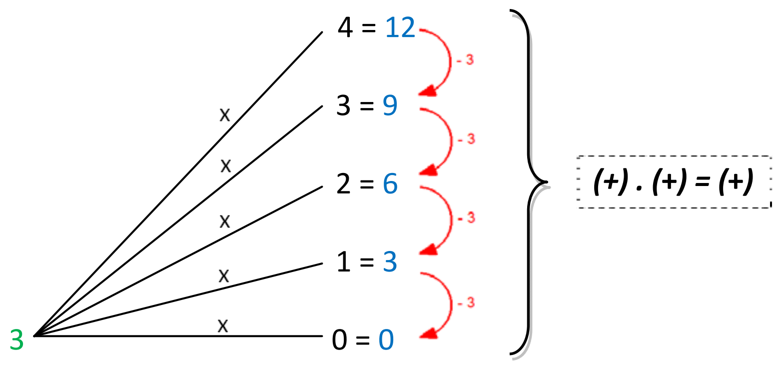
## 1. Préambule

Il est important de savoir que les règles des signes ((+).(+) = (+) ; (+).(–) = ( –) ; (–).(+) = (–) ; (–).(–) = (+)) ont été définies afin qu'il n'existe aucune contradiction au niveau de la théorie mathématique.

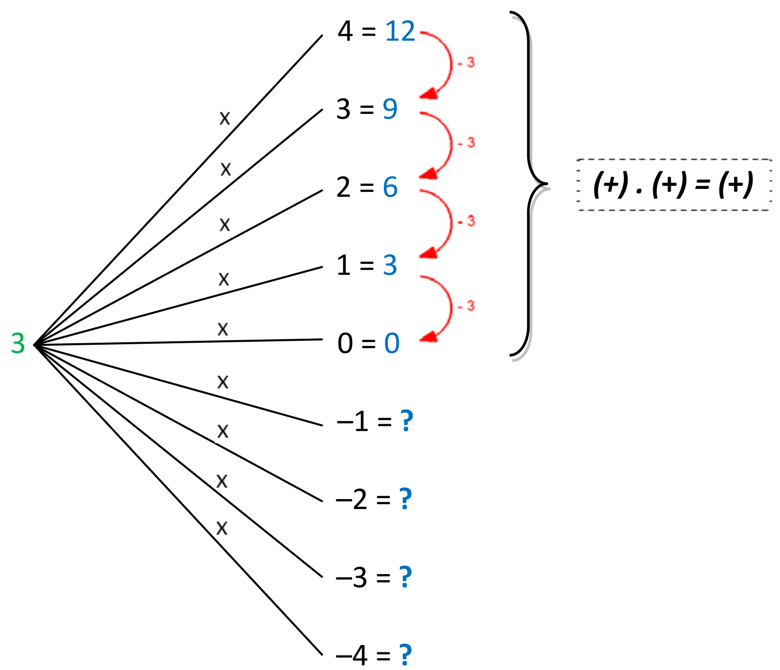
## 2. Règles des signes via les tables de multiplications

### 2.1. Lorsque le premier facteur est positif:

A) Si le deuxième facteur est, lui aussi, positif, on a:




B) Et si le deuxième facteur est négatif?



C) Si on suit la règle découverte au point A qui consiste à retirer trois unités du résultat précédent, on obtient:

$3 \times 4 = 12$
$3 \times 3 = 9$
$3 \times 2 = 6$
$3 \times 1 = 3$
$3 \times 0 = 0$

$\boxed{(+) . (+) = (+)}$

$3 \times -1 = -3$
$3 \times -2 = -6$
$3 \times -3 = -9$
$3 \times -4 = -12$

$\boxed{(+) . (-) = (-)}$

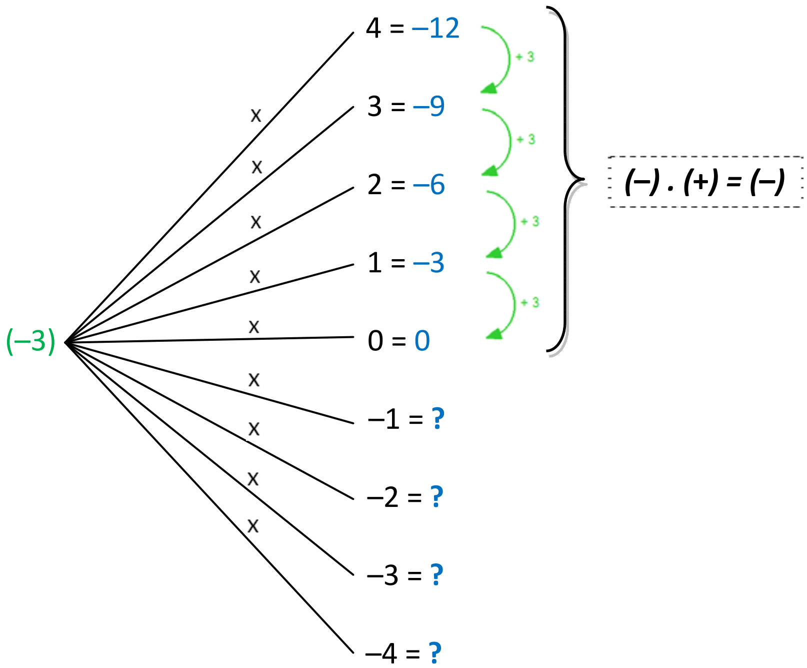
## 2.2. Lorsque le premier facteur est négatif:

A) Si le deuxième facteur est positif, on a:

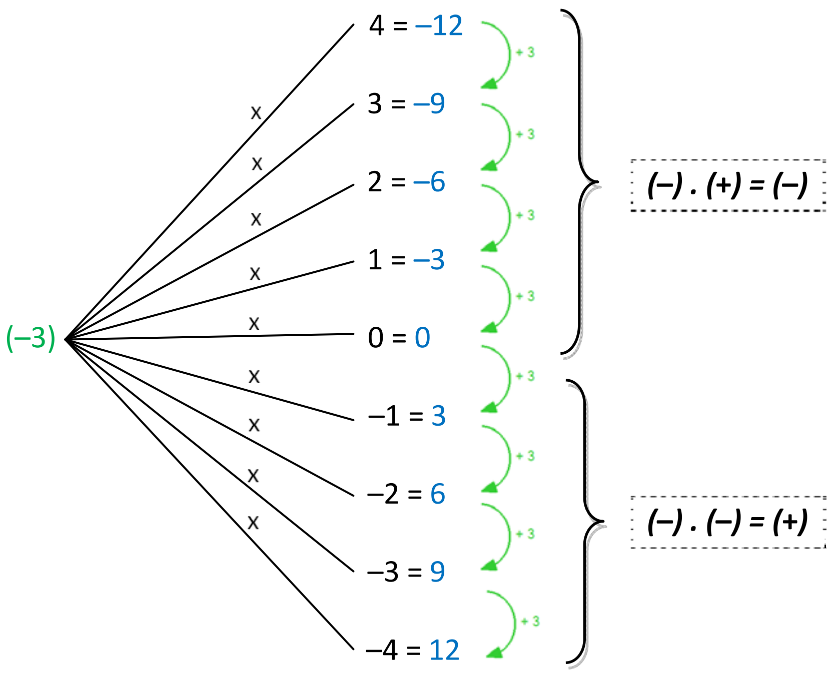
$(-3) \times 4 = -12$
$(-3) \times 3 = -9$
$(-3) \times 2 = -6$
$(-3) \times 1 = -3$
$(-3) \times 0 = 0$

$\boxed{(-) . (+) = (-)}$

B) Et si le deuxième facteur est, lui aussi, négatif?

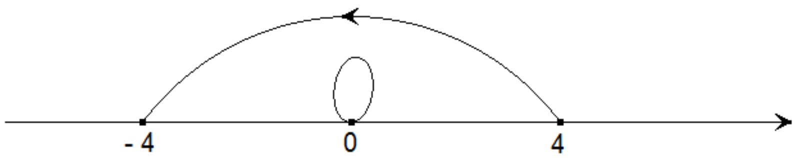



C) Si on suit la règle découverte au point D qui consiste à ajouter trois unités au résultat précédent, on obtient:



# 3. Exemples complémentaires pour justifier que (–) · (–) = (+)

## 3.1. Via la symétrie centrale et l'opposé d'un nombre



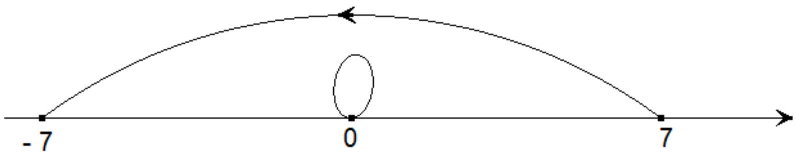

Ex: $opp(4) = -4 = S_0(4)$

### 3.1.1. Règle

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}: opp(a) = -a = S_0(a)}$$

### 3.1.2. Exemples

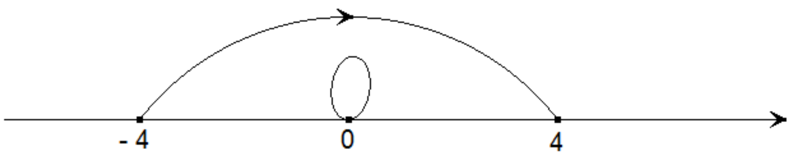
1)




$$opp(7) \overset{(1)}{=} -7 = S_0(7)$$

$\underset{(2)}{=}$

2)




$$\left.\begin{array}{l} opp(-4) \overset{(1)}{=} -(-4) \\ \quad \| \, (2) \\ S_0(-4) = 4 \end{array}\right\} \boxed{\mathbf{-(-4) = 4}}$$

D'où $\boxed{\boldsymbol{(-)\,.\,(-) = (+)}}$

## 3.2. Via la double distributivité

Prenons $(5 - 2) . (3 - 1) = ?$

*Remarque*: Le résultat doit être le même si on effectue directement l'opération ou si on distribue.

$\bullet_1$ *Si on effectue directement:* $\overbrace{(5 - 2)}^{3} . \overbrace{(3 - 1)}^{2} = 6$

$\bullet_2$ *Si on distribue:*

$$\begin{aligned}(5 - 2) . (3 - 1) &= (5 . 3) + (5 . (-1)) + ((-2).3) + ((-2) . (-1)) \\ &= 15 + (-5) + (-6) + \mathbf{((-2) . (-1))} \\ &= 15 - 5 - 6 + \mathbf{((-2) . (-1))} \\ &= 4 + \mathbf{((-2) . (-1))}\end{aligned}$$

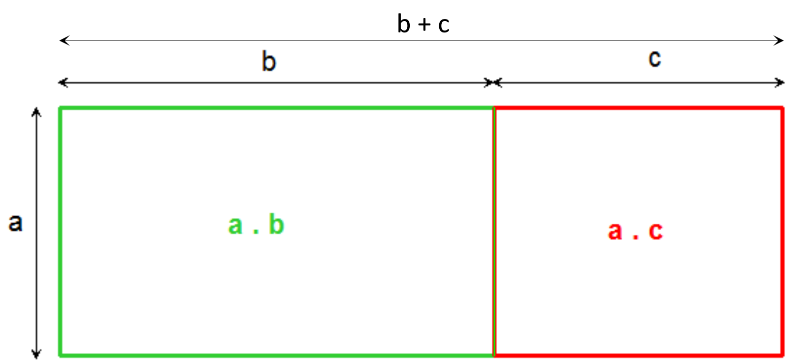
$\bullet_3$ *De la remarque et de* $\bullet_1$ *et* $\bullet_2$ *il vient que :*

$$4 + \overbrace{\mathbf{((-2) . (-1))}}^{?} = 6 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{((-2) . (-1)) = 2}$$

**Conclusion**: On a bien que $\boxed{\boldsymbol{(-) . (-) = (+)}}$

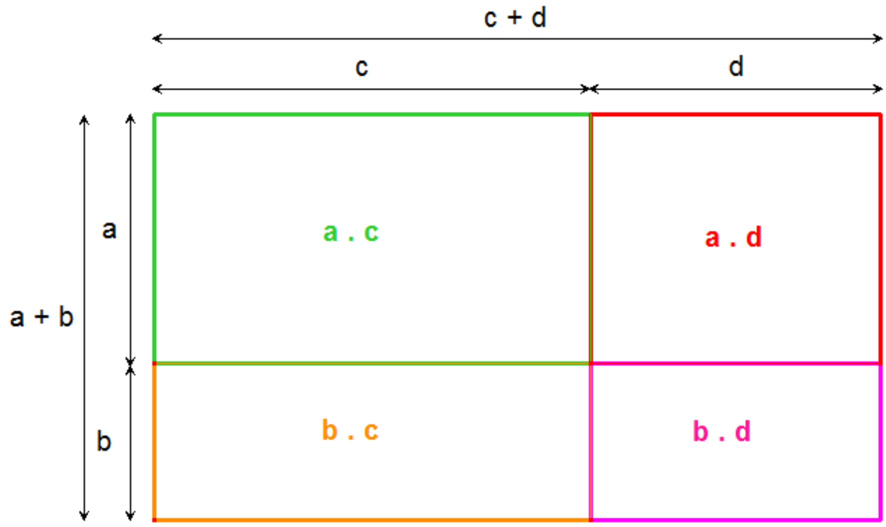
*Remarques/rappels concernant la double distributivité*:

➢ $\forall$ a, b et c $\in \mathbb{R}^+$ **a . (b + c) = ?**




$$\boxed{\Rightarrow \quad a . (b + c) = \mathbf{a . b} + \mathbf{a . c}}$$

➢ $\forall$ a, b, c et d $\in \mathbb{R}^+$ **(a + b) . (c + d) = ?**

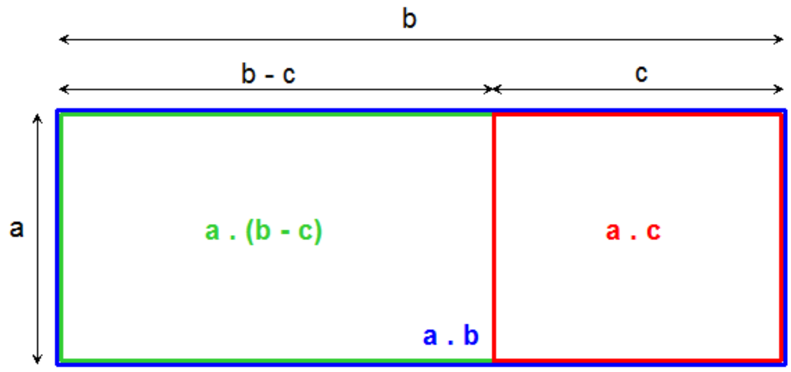



$$\Rightarrow (a + b) . (c + d) = a . c + a . d + b . c + b . d$$

➢ $\forall$ a, b, c et d $\in \mathbb{R}^+$ a . ( b – c) **= ?**

•$_1$ **a . (b – c)** = a . (b + (– c))
= (a . b) + (a . (– c)) (par la distributivité)

•$_2$




$$\Rightarrow a . (b - c) = a . b - a . c$$

•$_3$ De •$_1$ et •$_2$ , il vient que:

$$(a . b) + \mathbf{(a . (- c))} = a . b - \mathbf{a . c}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\mathbf{a . (- c) = - a . c}}$$

# Tout nombre non nul exposant 0 donne 1

## 1. Nombre non nul exposant 0

### 1.1. Les puissances de 5:

A) Lorsque l'exposant est positif, on a:

$5^4 = 5 . 5 . 5 . 5 = 625$

$\downarrow : 5$

$5^3 = 5 . 5 . 5 = 125$

$\downarrow : 5$

$5^2 = 5 . 5 = 25$

$5^1 =$ **?**

$5^0 =$ **?**

B) $5^1$ et $5^0$ ?

Si on suit la règle découverte en A qui consiste à diviser par 5 le résultat précédent, on obtient:

$5^4 = 625$

$\downarrow : 5$

$5^3 = 125$

$\downarrow : 5$

$5^2 = 25$

$\downarrow : 5$

$\mathbf{5^1 = 5}$

$\downarrow : 5$

$\boxed{\mathbf{5^0 = 1}}$

C) *Remarque:* La règle fonctionne aussi pour les exposants négatifs:

$5^4 = 625$

$\downarrow : 5$

$5^3 = 125$

$\downarrow : 5$

$5^2 = 25$

$\downarrow : 5$

$5^1 = 5$

$\downarrow : 5$

$\boxed{\mathbf{5^0 = 1}}$

$\downarrow : 5$

$5^{-1} = 1/5 = 1/5^1$

$\downarrow : 5$

$5^{-2} = 1/25 = 1/5^2$

$\downarrow : 5$

$5^{-3} = 1/125 = 1/5^3$

$\downarrow : 5$

$5^{-4} = 1/625 = 1/5^4$

## 1.2. Les puissances de 7:

A) Lorsque l'exposant est positif, on a:

$7^4 = 7 \,.\, 7 \,.\, 7 \,.\, 7 = 2401$

: 7

$7^3 = 7 \,.\, 7 \,.\, 7 = 343$

: 7

$7^2 = 7 \,.\, 7 = 49$

$7^1 =$ **?**

$7^0 =$ **?**

B) $7^1$ et $7^0$ ?

Si on suit la règle découverte en A qui consiste à diviser par 7 le résultat précédent, on obtient:

$7^4 = 2401$

: 7

$7^3 = 343$

: 7

$7^2 = 49$

: 7

$\mathbf{7^1 = 7}$

: 7

$\boxed{\mathbf{7^0 = 1}}$

C) *Remarque:* La règle fonctionne aussi pour les exposants négatifs :

$7^4 = 2401$

: 7

$7^3 = 343$

: 7

$7^2 = 49$

: 7

$7^1 = 7$

: 7

$\boxed{\mathbf{7^0 = 1}}$

: 7

$7^{-1} = 1/7 = 1/7^1$

: 7

$7^{-2} = 1/49 = 1/7^2$

: 7

$7^{-3} = 1/343 = 1/7^3$

: 7

$7^{-4} = 1/2401 = 1/7^4$

### 1.3. Conclusion partielle:

D'après les 1.1. et 1.2., on a envie de dire que tout nombre exposant 0 donne 1. Mais qu'en est-il du cas $0^0$ ?

### 1.4. Les puissances de 0:

A) Lorsque l'exposant est positif, on a:

$$0^4 = 0 \,.\, 0 \,.\, 0 \,.\, 0 = 0$$

$$0^3 = 0 \,.\, 0 \,.\, 0 = 0$$

$$0^2 = 0 \,.\, 0 = 0$$

$$0^1 = 0$$

B) Et $0^0$ ?

Comme toutes les puissances de 0 ont l'air de donner 0, on a envie de dire que $0^0$ donne également 0. Cependant, nous avons partiellement conclu précédemment que tout nombre exposant 0 semble donner 1.

$$0^4 = 0 \,.\, 0 \,.\, 0 \,.\, 0 = 0$$

$$0^3 = 0 \,.\, 0 \,.\, 0 = 0$$

$$0^2 = 0 \,.\, 0 = 0$$

$$0^1 = 0$$

$$\boxed{0^0 = \begin{cases} \mathbf{1\ ?} \\ \mathbf{0\ ?} \end{cases}} \quad \begin{array}{l} \textbf{(en pensant à 1.3.)} \\ \textbf{(en pensant à 1.4.A)} \end{array}$$

Nous nous retrouvons alors devant deux possibilités. Laquelle choisir?

Aucun élément mathématique ne nous indique de faire un choix plutôt qu'un autre. En mathématique, nous dirons que le cas $0^0$ est une ***indétermination*** car deux réponses potentielles existent.

## 2. Conclusion générale

De ce qui précède, nous pouvons conclure que:

***"Tout nombre non nul exposant 0 donne 1"***

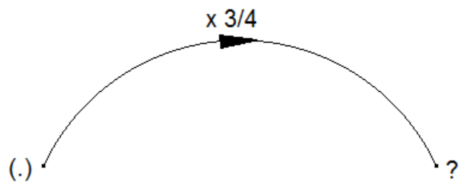
*Remarque*: Le cas $0^0$ est une indétermination.

# Division par une fraction

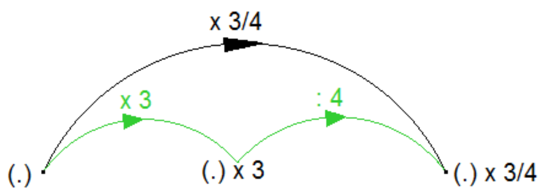
## 1. En partant de la multiplication par une fraction

### 1.1. Exemple numérique

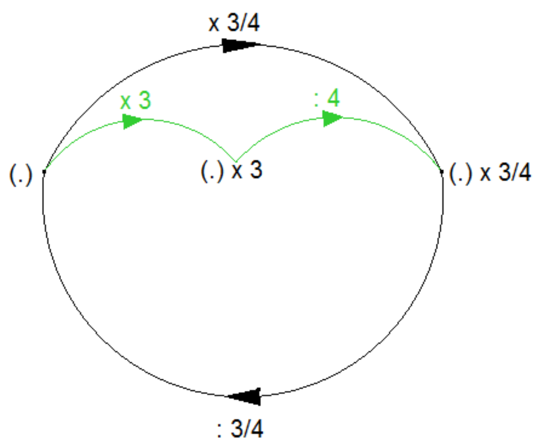
A) Pour multiplier un nombre (.) par 3/4:



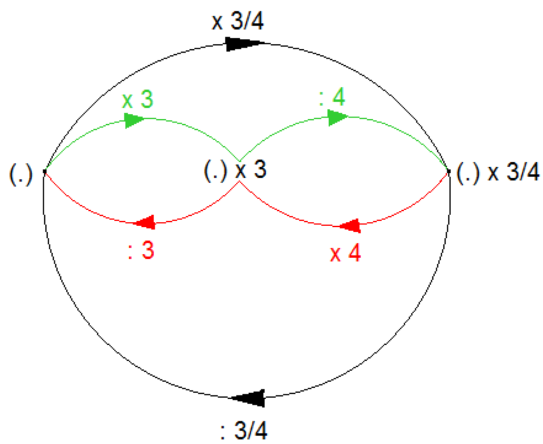

B) On peut multiplier le nombre (.) par 3 puis diviser le résultat par 4:




C) Or, nous savons que la réciproque de la multiplication est la division. On a donc:

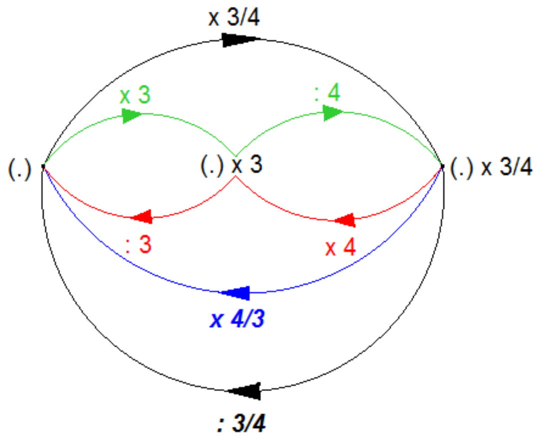



D) La réciproque de ": 4" étant "x 4" et la réciproque de "x 3" étant ": 3", on a:



E) **Constatation:**

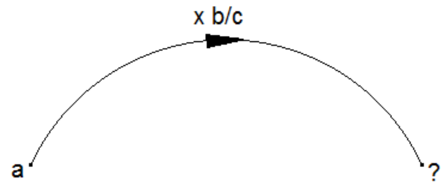
On voit clairement que diviser par **3/4** revient à multiplier par **4** puis diviser par **3**, c'est-à-dire à multiplier par **4/3** (la fraction inverse de 3/4).



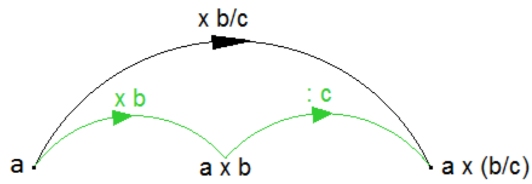

## 1.2. Généralisation

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}_0$ :

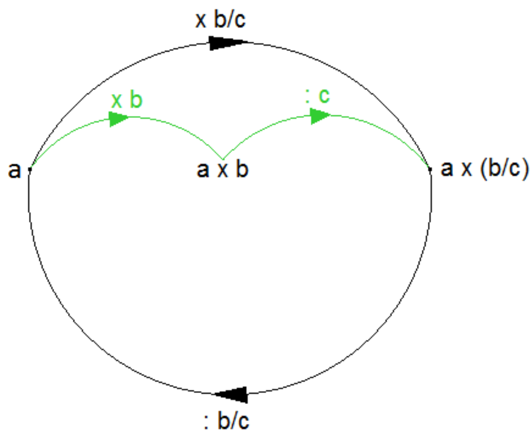
A) Pour multiplier un nombre **a** par **b/c**:



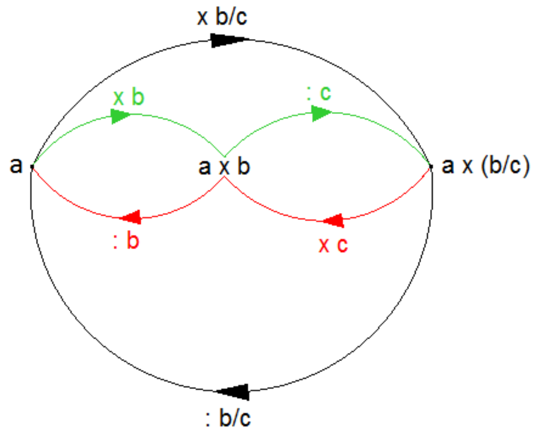

B) On peut multiplier le nombre **a** par **b** puis diviser le résultat par **c**:




C) Or, nous savons que la réciproque de la multiplication est la division. On a donc:

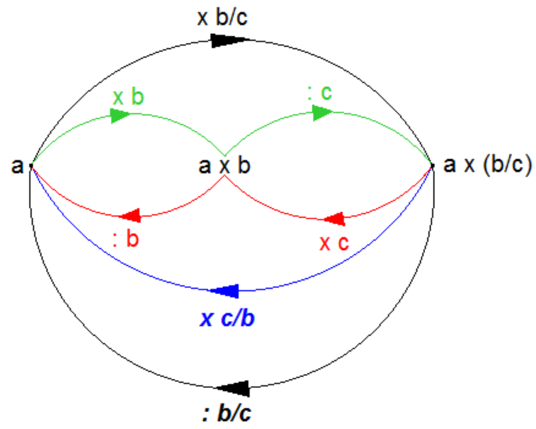


D) La réciproque de ": c" étant " x c" et la réciproque de "x b" étant ": b", on a:




E) **<u>Constatation</u>:**

On voit clairement que diviser par **b/c** revient à multiplier par **c** puis diviser par **b**, c'est-à-dire à multiplier par **c/b** (la fraction inverse de b/c).



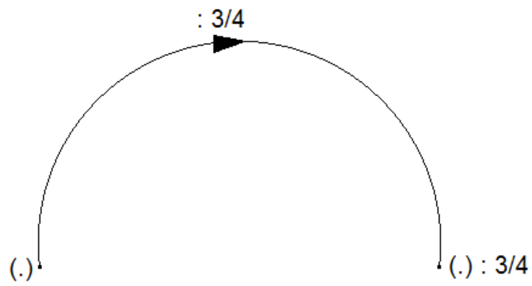

### 1.3. <u>Règle</u>

| |
|---|
| Pour **diviser par une fraction**, on ***multiplie par la fraction inverse*** <br><br> : **a/b** ⇔ x **b/a** |

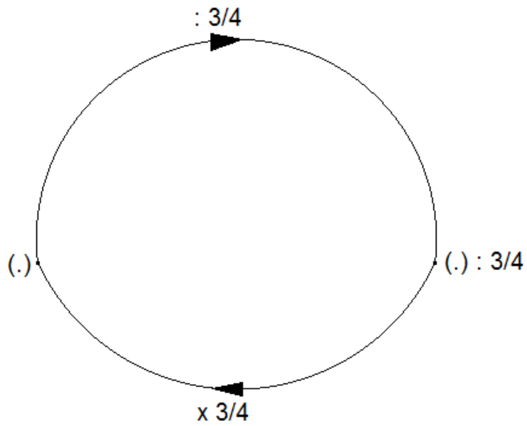
## 2. <u>En partant de la division par une fraction</u>

### 2.1. <u>Exemple numérique</u>

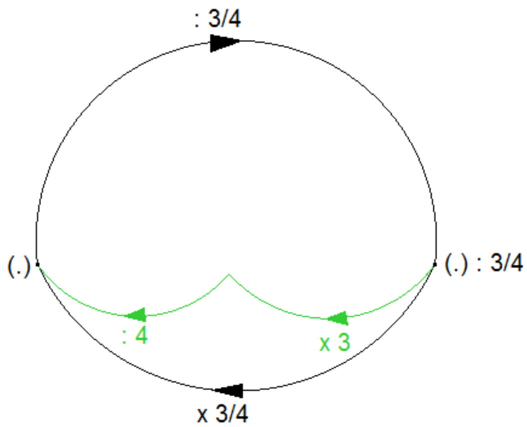
A) Pour diviser un nombre (.) par 3/4:



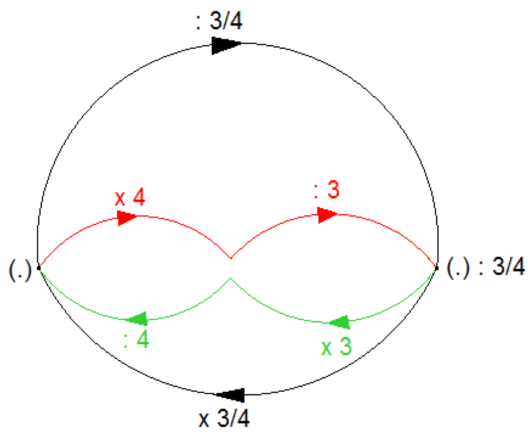
B) Nous savons que la réciproque de la division est la multiplication. On a donc:




C) Pour multiplier par 3/4, on peut multiplier par 3 puis diviser le résultat par 4:

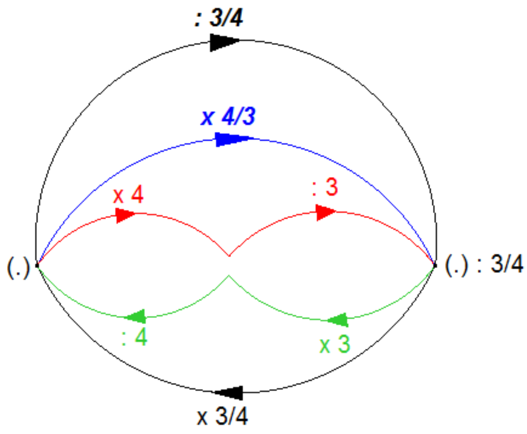



D) La réciproque de ": 4" étant "x 4" et la réciproque de "x 3" étant ": 3", on a:



E) **Constatation:**

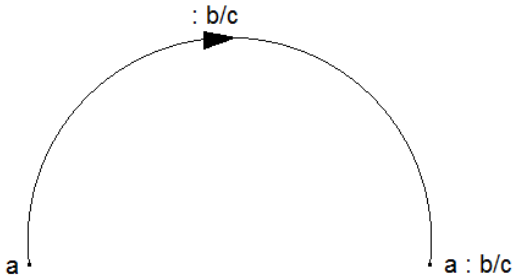
On voit clairement que diviser par **3/4** revient à multiplier par **4** puis diviser par **3**, c'est-à-dire à multiplier par **4/3** (la fraction inverse de 3/4).



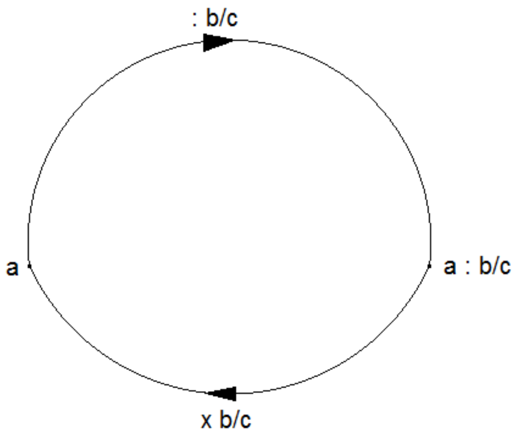

## 2.2. Généralisation

Soient a ∈ IR, b ∈ $\mathbb{Z}$ et c ∈ $\mathbb{Z}_0$:

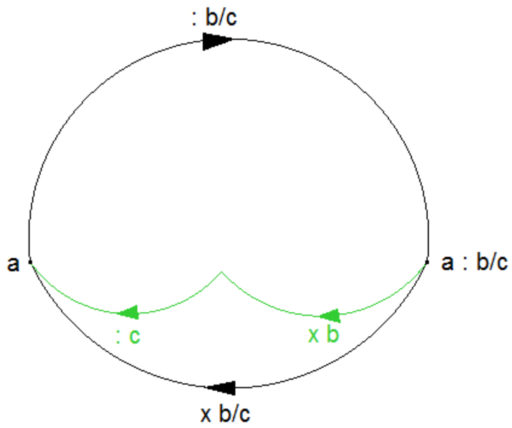
A) Pour diviser un nombre **a** par **b/c**:



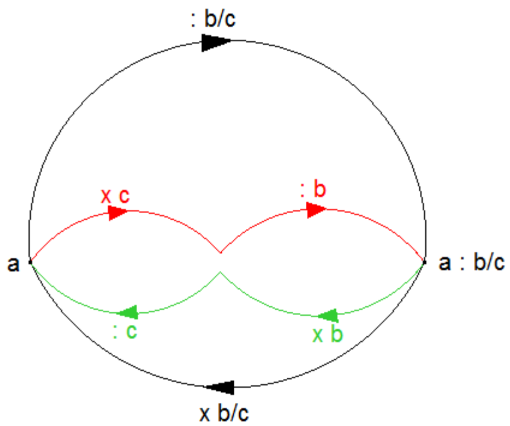

B) Nous savons que la réciproque de la division est la multiplication. On a donc:



C) Pour multiplier par **b/c**, on peut multiplier par **b** puis diviser le résultat par **c**:

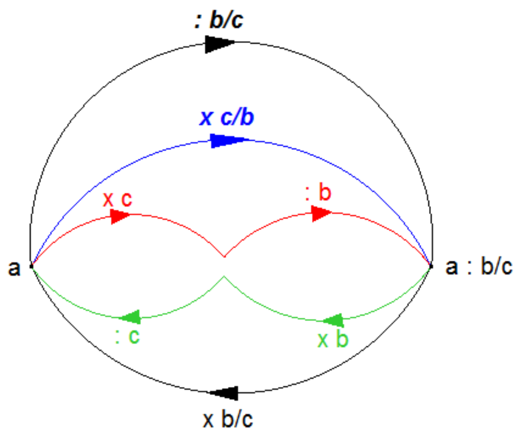



D) La réciproque de ": c" étant "x c" et la réciproque de "x b" étant ": b", on a:




**E) <u>Constatation</u>:**

On voit clairement que diviser par **b/c** revient à multiplier par **c** puis diviser par **b**, c'est-à-dire à multiplier par **c/b** (la fraction inverse de b/c).




## 2.3. Règle

| |
|---|
| Pour **diviser par une fraction**, on ***multiplie par la fraction inverse*** |
| : **a/b** ⇔ x **b/a** |